

## ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №6.

Тема: Пряма і площина в просторі.

### ПРАКТИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

П р и к л а д : Дано координати  $A_1 (2; 3; -4)$ ;  $A_2 (5; 7; 9)$ ;  $A_3 (2; -2; 4)$ ;  $A_4 (13; 1; 2)$  вершин піраміди  $A_1A_2A_3A_4$ . Знайти: а) довжину ребра  $A_1A_2$ ; б) рівняння ребер  $A_1A_2$  і  $A_1A_4$ ; в) косинус кута  $A_4A_1A_2$ ; г) площу грані  $A_1A_2A_3$ ; д) рівняння площини  $A_1A_2A_3$ ; е) об'єм піраміди.

Розв'язання:

а) Довжину ребра  $A_1A_2$  обчислимо за формулою:

$$A_1A_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}, \text{ тобто}$$

$$A_1A_2 = \sqrt{(5-2)^2 + (3-7)^2 + (-4-9)^2} = \sqrt{9+16+169} = \sqrt{194} \approx 14 \text{ од.}$$

б) Рівняння ребер  $A_1A_2$  і  $A_1A_4$  запишемо, користуючись формулою:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \text{ За умовою } A_1 (2; 3; -4); A_2 (5; 7; 9); A_4 (13; 1; 2),$$

тоді

$$\text{Для прямої } A_1A_2: \frac{x-2}{5-2} = \frac{y-3}{7-3} = \frac{z-(-4)}{9-(-4)} \Rightarrow \frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+4}{13}.$$

$$\text{Для прямої } A_1A_4: \frac{x-2}{13-2} = \frac{y-3}{1-3} = \frac{z-(-4)}{2-(-4)} \Rightarrow \frac{x-2}{11} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+4}{6}.$$

$$\text{в) Косинус кута } A_4A_1A_2: \cos A = \frac{a_x v_x + a_y v_y + a_z v_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}.$$

Враховуючи, що рівняння прямої можна подати у вигляді:

$$\frac{x-x_1}{a_x} = \frac{y-y_1}{a_y} = \frac{z-z_1}{a_z}, \text{ то для прямої } A_1A_2 \vec{a} (3; 4; 13), \text{ а для } A_1A_4 \vec{v} (11; -2;$$

$$\text{б). Тоді } \cos A = \frac{3 \cdot 11 + 4 \cdot (-2) + 13 \cdot 6}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 13^2} \sqrt{11^2 + (-2)^2 + 6^2}} = \frac{103}{\sqrt{194} \cdot \sqrt{161}} \approx 0,5829.$$

Отже,  $\angle A = \arccos 0,5829 = 53^\circ 30'$ .

г) Площу грані  $A_1A_2A_3$  обчислимо, користуючись властивістю добутку

$$\text{векторів } A_1A_2 \text{ і } A_1A_3: S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_3}|, \text{ де } \overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_3} = \begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} +$$

$$+ \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \cdot \vec{k} = \begin{vmatrix} 4 & 13 \\ -5 & 8 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} + \begin{vmatrix} 3 & 13 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \cdot \vec{k} =$$

$$= (32 + 65)\vec{i} + (24 - 0)\vec{j} + (-15 - 0)\vec{k} = 97\vec{i} + (-24)\vec{j} + (-15)\vec{k}.$$

$$\text{Тоді: } |\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_3}| = \sqrt{97^2 + (-24)^2 + (-15)^2} = \sqrt{10210}.$$

$$\text{Отже, } S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_3}| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{10210} \approx 50 \text{ кв.од.}$$

д) Рівняння площини  $A_1A_2A_3$  у загальному вигляді:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0, \text{ тобто } \begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z+4 \\ 5-2 & 7-3 & 9+4 \\ 2-2 & -2-3 & 4+4 \end{vmatrix} = 0;$$

$$32(x-2) - 15(z+4) - 24(y-3) + 65(x-2) = 0 \Rightarrow 97x - 24y - 15z - 182 = 0.$$

е) Об'єм піраміди:

$$V = \pm \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix} = \pm \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 3 & 4 & 13 \\ 0 & -5 & 8 \\ 11 & -2 & 6 \end{vmatrix} = \pm \frac{1}{6} (-90 + 352 + 715 + 48) =$$

$$= 170 \frac{5}{6} \text{ куб.од.}$$

### ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

**2.14.** На якій відстані від початку координат знаходяться точки  $A(-3; 0; 4)$ ,  $B(0; 8; -6)$ ,  $C(1; -1; 4)$ .

**2.15.** Задано дві вершини  $A(2; -3; -5)$ ,  $B(-1; 3; 2)$  паралелограма  $ABCD$  і точку перетину його діагоналей  $M(4; -1; 7)$ . Визначити координати двох інших вершин цього паралелограма.

**2.16.** Задано вершини трикутника  $A(3; 2; -1)$ ,  $B(5; -4; 7)$  і  $C(-1; 1; 2)$ . Обчислити довжину його медіани, що проведена із вершини  $C$ .

**2.17.** Обчислити відстань від точки  $P(-1; 1; -2)$  до площини, що проходить через три задані точки  $A(1; -1; 1)$ ,  $B(-2; 1; 3)$  і  $C(4; -5; -2)$ .

**2.18.** Скласти рівняння площини, що проходить через точку перетину трьох площин  $2x - y - z - 1 = 0$ ,  $x + 2z - 4 = 0$ ,  $x - y = 0$ , через початок координат і через точку  $P(7; 1; 2)$ .

**2.19.** Знайти точку перетину площин  $2x - y + 3z - 9 = 0$ ,  $3x + y - 4z + 6 = 0$ ,  $x + 2y + 2z - 3 = 0$ .

**2.20.** Дано координати вершин піраміди  $A_1A_2A_3A_4$ :

$A_1(1; 1; 1)$ ;  $A_2(-1; -2; -2)$ ;  $A_3(0; -3; 3)$ ;  $A_4(4; 3; -1)$ . Знайти:

- довжину ребра  $A_1A_2$ ;
- рівняння ребер  $A_1A_2$  і  $A_1A_3$ ;
- косинус кута  $A_3A_1A_2$ ;
- площу грані  $A_1A_2A_3$ ;
- рівняння площини  $A_1A_2A_3$ ;
- об'єм піраміди.

### Індивідуальне завдання

Дано координати вершин піраміди  $A_1A_2A_3A_4$ . Знайти:

- довжину ребра  $A_1A_2$ ;
- рівняння ребер  $A_1A_2$  і  $A_1A_3$ ;
- косинус кута  $A_3A_1A_2$ ;
- площу грані  $A_1A_2A_3$ ;
- рівняння площини  $A_1A_2A_3$ ;
- об'єм піраміди.

1.  $A_1 (1; 2; 1); A_2 (-3; 2; -2); A_3 (-5; -3; 3); A_4 (0; 2; -1)$ .
2.  $A_1 (3; 2; 1); A_2 (-3; -1; 2); A_3 (-5; -2; -3); A_4 (0; 1; -6)$ .
3.  $A_1 (2; 1; 2); A_2 (-3; -2; 2); A_3 (-3; -5; -3); A_4 (0; 2; -4)$ .
4.  $A_1 (1; 1; 3); A_2 (-4; -3; 2); A_3 (-4; -3; -5); A_4 (0; 2; -7)$ .
5.  $A_1 (1; 2; 6); A_2 (-3; -3; -2); A_3 (-5; -5; 3); A_4 (0; 2; -1)$ .
6.  $A_1 (2; 4; 6); A_2 (-3; -3; -1); A_3 (-5; -5; 2); A_4 (0; 1; -6)$ .
7.  $A_1 (4; 3; 6); A_2 (-2; -3; -2); A_3 (-5; -5; 1); A_4 (0; 2; -3)$ .
8.  $A_1 (5; 4; 6); A_2 (-4; -3; -2); A_3 (-5; -5; 4); A_4 (0; 2; -4)$ .
9.  $A_1 (1; 6; 6); A_2 (-3; -3; -5); A_3 (-2; -5; 3); A_4 (0; 2; -7)$ .
10.  $A_1 (1; 7; 6); A_2 (-5; -3; -2); A_3 (-4; -5; 3); A_4 (0; 2; -8)$ .

/Завдання обирається за останньою цифрою номера студента в списку./

### Теми рефератів

1. Площина в просторі.
2. Нерівності і їх геометричний зміст.