

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №4.

Тема: Системи лінійних рівнянь. Метод Крамера. Матричний метод.

ПРАКТИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

П р и к л а д : Розв'язати систему лінійних рівнянь за правилом Крамера

$$\text{та матричним методом: } \begin{cases} 2x + 7y + z = -17, \\ 7x + 3y + 5z = 8, \\ 3x + 2y + 6z = 9. \end{cases}$$

Розв'язання:

а) Розв'яжемо систему лінійних рівнянь за правилом Крамера. Для цього обчислимо головний визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 7 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 6 + 1 \cdot 7 \cdot 2 + 7 \cdot 5 \cdot 3 - 1 \cdot 3 \cdot 3 - 2 \cdot 5 \cdot 2 - 7 \cdot 7 \cdot 6 =$$
$$= 36 + 14 + 105 - 9 - 20 - 294 = -168.$$

Так як $\Delta \neq 0$, то система має єдиний розв'язок.

Обчислимо додаткові визначники, замінюючи по черзі перший, другий та третій стовбець головного визначника стовбцем вільних елементів:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -17 & 7 & 1 \\ 8 & 3 & 5 \\ 9 & 2 & 6 \end{vmatrix} = (-17) \cdot 3 \cdot 6 + 8 \cdot 2 \cdot 1 + 7 \cdot 5 \cdot 9 - 1 \cdot 3 \cdot 9 - 2 \cdot 5 \cdot (-17) - 8 \cdot 7 \cdot 6 =$$
$$= -306 + 16 + 315 - 27 + 170 - 336 = -168;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & -17 & 1 \\ 7 & 8 & 5 \\ 3 & 9 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 8 \cdot 6 + 7 \cdot 9 \cdot 1 + 3 \cdot (-17) \cdot 5 - 1 \cdot 8 \cdot 3 - 2 \cdot 5 \cdot 9 - 7 \cdot 6 \cdot (-17) =$$
$$= 96 + 63 - 255 - 24 - 90 + 714 = 504;$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 7 & -17 \\ 7 & 3 & 8 \\ 3 & 2 & 9 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 9 + 7 \cdot 8 \cdot 3 + 7 \cdot 2 \cdot (-17) - (-17) \cdot 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 \cdot 8 - 7 \cdot 7 \cdot 9 =$$
$$= 54 + 168 - 238 + 153 - 32 - 441 = -336.$$

Визначимо корені системи рівнянь за формулами Крамера:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-168}{-168} = 1; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{504}{-168} = -3; \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-336}{-168} = 2.$$

Отже, $\{1; -3; 2\}$ – шуканий розв'язок системи лінійних рівнянь.

б) Розв'яжемо систему лінійних рівнянь матричним методом, скориставшись

$$\text{формулою: } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} A^* \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},$$

де Δ – головний визначник системи,

A^* – зведена матриця, $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ – стовбець вільних елементів.

З попередніх обчислень головний визначник системи дорівнює $\Delta = -168$.

Обчислимо математичні доповнення до кожного елемента матриці за

формулою: $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot 6 - 5 \cdot 2 = 18 - 10 = 8;$$

$$A_{12} = - \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -(7 \cdot 6 - 5 \cdot 3) = -(42 - 15) = -27;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = 14 - 9 = 5;$$

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -(7 \cdot 6 - 1 \cdot 2) = -(42 - 2) = -40;$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 1 \cdot 3 = 12 - 3 = 9;$$

$$A_{23} = - \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(2 \cdot 2 - 7 \cdot 3) = -(4 - 21) = 17;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 7 \cdot 5 - 1 \cdot 3 = 35 - 3 = 32;$$

$$A_{32} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = -(2 \cdot 5 - 1 \cdot 7) = -(10 - 7) = -3;$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 7 \cdot 7 = 6 - 49 = -43.$$

Запишемо зведену матрицю: $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -40 & 32 \\ -27 & 9 & -3 \\ 5 & 17 & -43 \end{pmatrix}$.

Тоді стовбець невідомих елементів $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ дорівнює: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} A^* \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} =$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{-168} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 40 & 32 \\ -27 & 9 & -3 \\ 5 & 17 & -43 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -17 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{-168} \cdot \begin{pmatrix} 8 \cdot (-17) - 40 \cdot 8 + 32 \cdot 9 \\ (-27) \cdot (-17) + 9 \cdot 8 + (-3) \cdot 9 \\ 5 \cdot (-17) + 17 \cdot 8 + (-43) \cdot 9 \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{-168} \cdot \begin{pmatrix} -136 - 320 + 288 \\ 459 + 72 - 27 \\ -85 + 136 - 387 \end{pmatrix} = \frac{1}{-168} \cdot \begin{pmatrix} -168 \\ 504 \\ -336 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Отже, $\{1; -3; 2\}$ – шуканий розв’язок системи лінійних рівнянь.

Відповідь: $\{1; -3; 2\}$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Розв’язати систему лінійних рівнянь:

а) за правилом Крамера; б) матричним методом:

$$\text{№1.71.} \begin{cases} 4x - 3y - 2z = 9, \\ 2x + 5y + 3z = -7, \\ 6x - 3y + 5z = 5; \end{cases}$$

$$\text{№1.72.} \begin{cases} x + 2y - 3z = 7, \\ 3x - y - 4z = 13, \\ 4x + y + 2z = 0; \end{cases}$$

$$\text{№1.73.} \begin{cases} 2x + y - z = 0, \\ x - y - 3z = 13, \\ 3x - 2y + 4z = -15; \end{cases}$$

$$\text{№1.74.} \begin{cases} x + y - 2z = 4, \\ 2x - 3y + z = 3, \\ 3x - 2y + 6z = 0; \end{cases}$$

$$\text{№1.75.} \begin{cases} 5x - 3y + 6z = 6, \\ 2x - y - 3z = 8, \\ x + 4y - 2z = 9; \end{cases}$$

$$\text{№1.76.} \begin{cases} x - y + z = 3, \\ 2x + y + z = 11, \\ x + y + 2z = 8; \end{cases}$$

$$\text{№1.77.} \begin{cases} 2x - 3y - 4z = -5, \\ x + 5y - 5z = -6, \\ 8x - 2y + 4z = -10; \end{cases}$$

$$\text{№1.78.} \begin{cases} 2x + 2y + z = 1, \\ 3x + y + 2z = -2, \\ 4x - y - 7z = 7; \end{cases}$$

$$\text{№1.79.} \begin{cases} x - 8y + 3z = 1, \\ 2x - 6y + z = 4, \\ 0,1x - 2y + z = 0; \end{cases}$$

$$\text{№1.80.} \begin{cases} x - 5y + z = 4, \\ 2x - y + 3z = 14, \\ 3x + 5y + z = 8; \end{cases}$$

$$\text{№1.81.} \begin{cases} 3x - y - 4z = -2, \\ 6x + 2y + z = 9, \\ 2x + 4y - 3z = 3; \end{cases}$$

$$\text{№1.82.} \begin{cases} 3x + 2y + z = 5, \\ x + y - z = -2, \\ 4x - y + 5z = 3; \end{cases}$$

Індивідуальне завдання

Розв’язати систему лінійних рівнянь за правилом Крамера та матричним методом.

$$1. \begin{cases} 2x - 3y + z = -6, \\ 3x + 3y - 2z = 20, \\ 5x - 6y + 4z = -12. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 2x + 3y + z = 0, \\ 2x + y + 3z = 4, \\ 3x + 2y + z = 2. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 2x + 5y + 9z = -20, \\ 9x - 7y + 3z = 1, \\ 6x + 4y + 7z = -2; \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 4x - 2y + 3z = -9, \\ 3x + 5y - 4z = 25, \\ 7x + 2y + 3z = 2; \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x + y + z = -2, \\ 2x + 3y - z = 1, \\ x - y + 2z = -7. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 3x + 4y + 2z = -5, \\ 2x - 4y + 3z = 20, \\ 4x - 3y - 5z = 3; \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 3x + 2y + 4z = -3, \\ 2x - 3y + z = -4, \\ 4x - 5y - 2z = 10; \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} x + 2y + 3z = -2, \\ 3x + 4y - 2z = -17, \\ 2x + 3y + z = -9; \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} 2x + 5y - 2z = 9, \\ 4x + y - 4z = 9, \\ x + y - 4z = 9; \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} x - y + z = 3, \\ 2x + y + z = 1, \\ x + y + 2z = 8. \end{cases}$$

/Завдання обирається за останньою цифрою номера студента в списку.
Наприклад, студенти за номерами 3, 13 та 23 розв'язують систему №3./

Теми рефератів

1. Розв'язування систем лінійних рівнянь методом Гауса.
2. Прямокутні системи.