

### ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №3.

Тема: Обернена матриця.

#### ПРАКТИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

П р и к л а д 1: Знайти матрицю, обернену до заданої:  $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ .

Обчислимо визначник матриці  $A$  і алгебраїчні доповнення всіх елементів:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -68.$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -17; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -5; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 9;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -17; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 32 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 17; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -11; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -21.$$

Обернена матриця має вигляд:

$$A^{-1} = -\frac{1}{68} \cdot \begin{pmatrix} -17 & -17 & 17 \\ -5 & 7 & -11 \\ 9 & 1 & -21 \end{pmatrix}.$$

Матриця  $A^{-1}$  знайдена правильно, тому що  $A \cdot A^{-1} = E$ , тобто:

$$\begin{aligned} A \cdot A^{-1} &= \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{68}\right) \cdot \begin{pmatrix} -17 & -17 & 17 \\ -5 & 7 & -11 \\ 9 & 1 & -21 \end{pmatrix} = \\ &= -\frac{1}{68} \begin{pmatrix} 2 \cdot (-17) + 5 \cdot (-5) - 1 \cdot 9 & 2 \cdot (-17) + 5 \cdot 7 - 1 \cdot 1 & 2 \cdot 17 + 5 \cdot (-11) - 1 \cdot (-21) \\ 3 \cdot (-17) - 3 \cdot (-5) + 4 \cdot 9 & 3 \cdot (-17) - 3 \cdot 7 + 4 \cdot 1 & 3 \cdot 17 - 3 \cdot (-11) + 4 \cdot (-21) \\ 1 \cdot (-17) + 2 \cdot (-5) + 3 \cdot 9 & 1 \cdot (-17) + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 17 + 2 \cdot (-11) + 3 \cdot (-21) \end{pmatrix} = \\ &= -\frac{1}{68} \cdot \begin{pmatrix} -68 & 0 & 0 \\ 0 & -68 & 0 \\ 0 & 0 & -68 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

П р и к л а д 2 : Розв'язати матричне рівняння:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 7 \end{pmatrix};$$

$$X = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}^{-1};$$

Обчислимо обернену матрицю  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}^{-1}$  :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 10 = -13;$$

$$A_{11} = -3;$$

$$A_{12} = -5$$

$$A_{21} = -2$$

$$A_{22} = 1$$

Тоді обернена матриця матиме вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-13} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$X = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{-13} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix};$$

$$X = -\frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} 5 \cdot (-3) + 9 \cdot (-5) & 5 \cdot (-2) + 9 \cdot 1 \\ 4 \cdot (-3) + 7 \cdot (-5) & 4 \cdot (-2) + 7 \cdot 1 \end{pmatrix};$$

$$X = -\frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} -60 & -1 \\ -47 & -1 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} \frac{60}{13} & \frac{1}{13} \\ \frac{47}{13} & \frac{1}{13} \end{pmatrix}.$$

### ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Для заданих матриць знайти обернені матриці:

№1.49.  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix};$

№1.50.  $\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix};$

№1.51.  $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix};$

№1.52.  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix};$

№1.53.  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix};$

№1.54.  $\begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix};$

№1.55.  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix};$

№1.56.  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix};$

$$\text{№1.57. } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix};$$

$$\text{№1.58. } \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \\ -2 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язати матричне рівняння:

$$\text{№1.59. } \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -7 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\text{№1.60. } \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 15 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\text{№1.61. } \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -5 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\text{№1.62. } \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 11 & 10 \\ 5 & 12 \end{pmatrix};$$

$$\text{№1.63. } \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\text{№1.64. } \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 5 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\text{№1.65. } \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 11 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{№1.66. } \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

№1.67.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\text{№1.68. } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -4 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

З'ясувати, чи існують матриці, обернені до заданих:

$$\text{№1.69. } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{№1.70. } \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Якщо так, то виконати перевірку  $A \cdot A^{-1} = E$ .

### Індивідуальне завдання

1. Знайти обернену матрицю до заданої:  $A = \begin{pmatrix} 1 & n & 2 \\ -3 & n-1 & 5 \\ 4 & n+1 & -7 \end{pmatrix}$ .

2. Розв'язати матричне рівняння:  $\begin{pmatrix} 1 & n \\ n-7 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -n \end{pmatrix}$ ,

де  $n$  – остання цифра номера студента за списком.

### Теми рефератів

1. Матриця та її ранг.
2. Застосування матричного числення при розв'язуванні економічних задач.