Лекція 9.

Тема: Неперервність та розриви функцій.

1. Поняття неперервності функції
2. Властивості неперервних функцій
3. Основні теореми про неперервність.
4. Розриви функцій

1. Поняття неперервності функції

Важливе значення у математичному аналізі мають так звані <u>неперервні функції</u>. Вивчаючи основи аналітичної геометрії, ми мали справу з рівняннями прямої лінії. Стверджувалося, що вони існують на всій числовій осі, тобто що немає жодного значення x, яке не влаштовує рівняння прямої. Кожному значенню абсциси обов'язково відповідає якесь значення ординати.

Розглянемо рівняння трьох прямих, на які накладені обмеження. Нехай функція $y = f(x)$ задана таким чином, що на інтервалі $(-\infty; a)$ вона задається прямою $A_1x+B_1y+C=0$, на відрізку $[a;b]$ − прямою $A_2x+B_2y+C_2=0$, а на інтервалі $(b;+\infty)$ − прямою $A_3x+B_3y+C_3=0$.

<u>Приклад:</u> Дослідити на неперервність функцію і побудувати її графік:

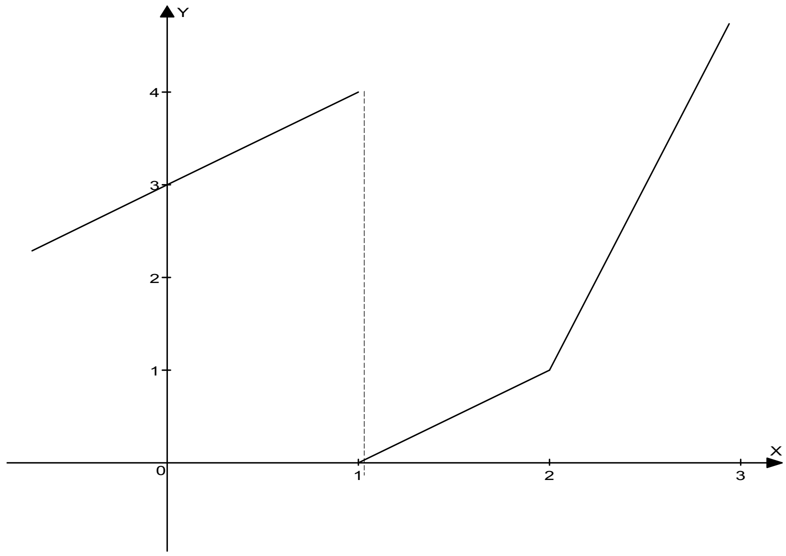
$$y=\begin{cases} x+3, & x<1 \\ x-1, & x\in[1;2]. \\ 4x-7, & x>2 \end{cases}$$

Зайдемо границі справа та зліва в точках $x=1$ та $x=2$.

Для точки $x=1$: $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 1-0}(x+3) = 4$, $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 1+0}(x-1) = 0$. Лівостороння та правостороння границі мають різні значення $(4\neq 1)$. Отже, функція має розрив у точці $x=1$.

Для точки $x=2$: $\lim\limits_{x\to 2+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 2+0}(4x-7) = 1$; $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 2-0}(x-1) = 1$.

Лівостороння та правостороння границі мають однакові значення $(1=1)$. Отже, функція неперервна в точці $x=2$.



Можна стверджувати, що в точці $x = x_0$ функція буде неперервною, якщо:

1) сама функція існує у цій точці і має значення $f(x_0)$;

2) граничне значення функції $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ буде однаковим при наближенні до x_0 справа та зліва;

3) граничне значення функції співпадає зі значенням функції в точці x_0, тобто $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Озн. Неперервною в точці *x_0* називається функція, якщо границя справа $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ дорівнює границі зліва $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ та значенню функції в цій точці.

Граничне наближення справа та зліва називається відповідно правостороннім та лівостороннім наближенням або правосторонньою та лівосторонньою границями. Відповідне математичне позначення :

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) \text{ та } \lim_{x \to x_0 - 0} f(x).$$

Під $x_0 + 0$ треба розуміти, що кожне значення x при наближенні до x_0 буде дещо більше від x_0 (наближення справа); аналогічно розуміється $x_0 - 0$ як наближення зліва.

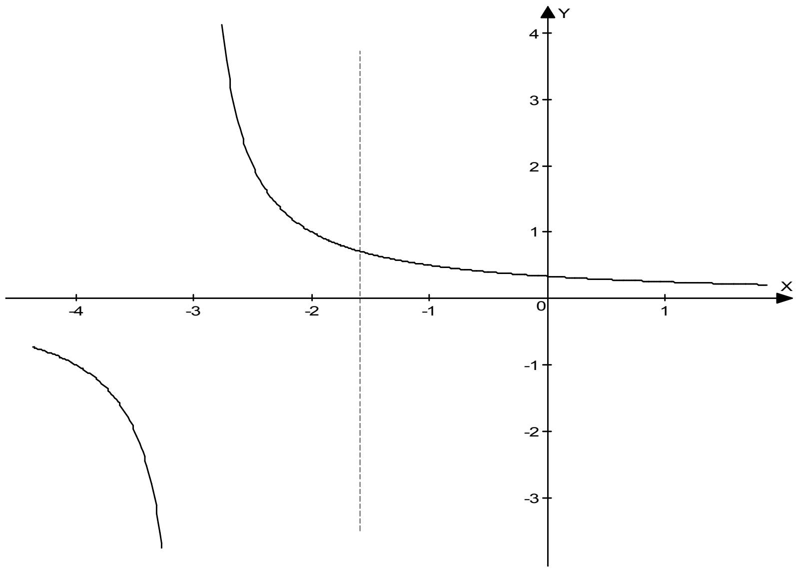
<u>Приклад:</u> Дослідити на неперервність функцію і побудувати її графік:

$$y = \frac{1}{3 + x}, \text{ при } x \in R.$$

Так як $x \neq 3$, то знайдемо границі справа та зліва в точці розриву $x = 3$:

$$\lim_{x\to-3+0} f(x) = \lim_{x\to-3+0}\left(\frac{1}{3+x}\right) = \frac{1}{0} = \infty\,;\; \lim_{x\to-30} f(x) = \lim_{x\to-3+0}\left(\frac{1}{3+x}\right) = \frac{1}{-0} = -\infty\,.$$

Отже, маємо розрив.



2. Властивості неперервних функцій

1. Якщо дві функції $f_1(x)$ та $f_2(x)$ неперервні на проміжку $(a;b)$, то їх алгебраїчна сума $f_1(x) \pm f_2(x)$ також буде неперервною функцією на цьому ж відрізку, тобто $f_3(x) = f_1(x) \pm f_2(x)$ − неперервна на $(a;b)$.

2. Множення неперервної функції на сталу не змінює її неперервності: якщо $f_1(x)$ неперервна на $(a;b)$, то $f_2(x) = C \cdot f_1(x)$ також неперервна на $(a;b)$.

3. Добуток неперервних на $(a;b)$ функцій є неперервною функцією на цьому ж інтервалі: $f_1(x) \cdot f_2(x) = f_3(x)$ − неперервна на $(a;b)$, якщо $f_1(x)$ та $f_2(x)$ − неперервні на $(a;b)$.

4. Відношення неперервних на $(a;b)$ функцій є неперервною функцією на $(a;b)$, якщо вона існує. $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = f_3(x)$ − неперервна на $(a;b)$, якщо $f_1(x)$ та $f_2(x)$ − неперервні на $(a;b)$ і якщо $f_2(x) \neq 0$.

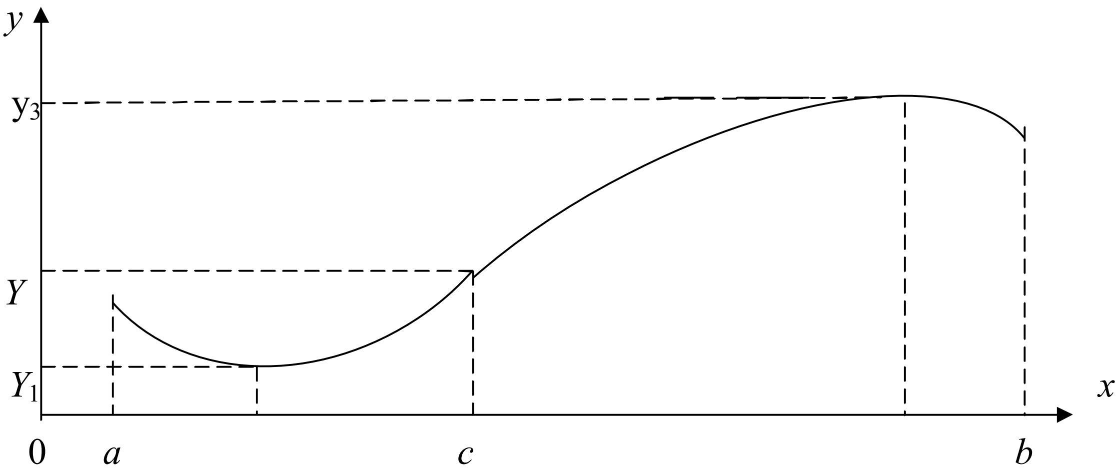
5. Якщо $y = f_1(x)$ неперервна при $x = x_0$ і $z = f_2(y)$ неперервна при $y_0 = f_1(x_0)$, то складена функція $z = f_2(f_1(x))$ буде неперервною в точці $x = x_0$.

Приклад: якщо $y = \sin x$ неперервна при $x = 0$ і $z = \cos y$ неперервна в $y = \sin 0 = 0$, то і $z = \cos\sin x$ неперервна при $x = 0$.

3. Основні теореми про неперервність

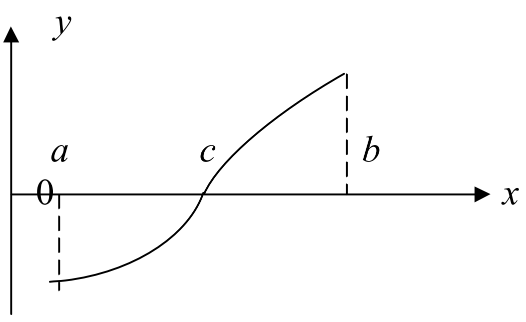
1. Теорема Коші про проміжні значення

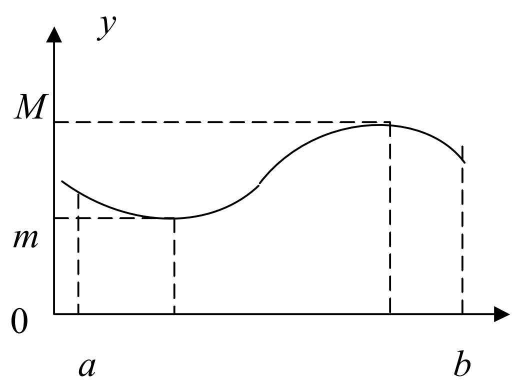
Якщо $y = f(x)$ задана на (a, b) і має на відрізку найбільше y_2 та найменше y_1 значення, то для будь-якого значення y_3 за умови $y_1 < y_3 < y_2$ завжди знайдеться точка c, для якої $y_3 = f(c)$.



2. Теорема Больцано

Якщо $y = f(x)$ задана на $[a;b]$ і на кінцях відрізка приймає різні по знаку значення, то на $[a;b]$ завжди знайдеться хоч одна точка c для якої $f(c) = 0$.





3. Теорема Вейерштрасса про обмеження функцій

Якщо $y = f(x)$ визначена на $[a;b]$, то вона обмежена на цьому відрізку. Це означає, що існують такі числа m і M,що $m \le f(x) \le M$ при $x \in [a;b]$. Більше того, для такої функції на $[a;b]$ завжди існують точні значення верхньої та нижньої границі.

Неперервна функція може бути рівномірно неперервною. Якщо $x_2 - x_1$ обмежене деяким числом a і при цьому $f(x_2) - f(x_1)$ також обмежене деяким числом b, то функція неперервна рівномірно.

4. Розриви функцій

Функція $f(x)$ буде неперервною в точці, якщо $\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0)$. Якщо ця умова порушена, то функція буде розривною в точці x_0.

Якщо $\lim_{x\to x_0-0} f(x) \neq \lim_{x\to x_0+0} f(x)$, тобто $\lim_{x\to x_0-0} f(x) = y_1$ і $\lim_{x\to x_0+0} f(x) = y_2$, то існує різниця $y_2 - y_1 = \Delta y \neq 0$. Маємо неусувний розрив першого роду.

Якщо $\lim_{x\to x_0-0} f(x) \neq f(x_0)$, або $\lim_{x\to x_0+0} f(x) \neq f(x_0)$, то маємо також неусувний розрив першого роду.

Якщо $\lim_{x\to x_0-0} f(x) \neq f(x_0)$ і $\lim_{x\to x_0+0} f(x) \neq f(x_0)$, але $\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x)$, то маємо усувний розрив першого роду. Для нього $\Delta y = y_2 - y_1 = 0$.

Якщо величина скачка функції не існує або безмежна, то розрив називається розривом II роду. Для таких розривів не існує хоч одна з границь:

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) \text{ або } \lim_{x\to x_0-0} f(x).$$