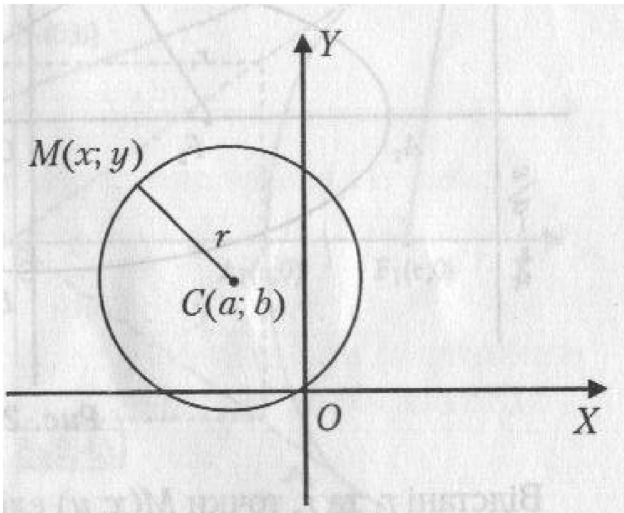
Лекція 6.

Тема: **Лінії другого порядку**

1. Коло.
2. Еліпс.
3. Гіпербола.
4. Парабола.

1. Коло.

Озн. 1. Колом називається геометричне місце точок, кожна з яких рівновіддалена від деякої точки, яку називають центром кола. Відстань від центру до кривої називають радіусом кола.



Радіус, як відстань між двома точками, задається формулою:

$$R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

Піднесемо ліву та праву частину виразу до квадрату і одержимо рівняння кола:

$$\left(x - x_0\right)^2 + \left(y - y_0\right)^2 = R^2 \qquad (1)$$

У випадку, коли центр кола знаходиться у початку координат, то рівняння кола матиме вигляд:

$$x^2 + y^2 = R^2 \qquad (2)$$

Рівняння кола – це рівняння другого порядку. Загальне рівняння кривої другого порядку:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Bx + Ey + P = 0,$$

являє собою коло, якщо коефіцієнти при квадратах координат рівні між собою $A = C$, і якщо відсутній член з добутком координат xy, тобто $B = 0$.

Приклад: Записати рівняння кола, що проходить через точку $B(6;\ 0)$ і має центром точку $A(2;\ 3)$.

З умови маємо, що AB – це радіус кола. Тоді:

$R=\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(6-2)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{16+9} = 5$.

А рівняння кола буде: $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$.

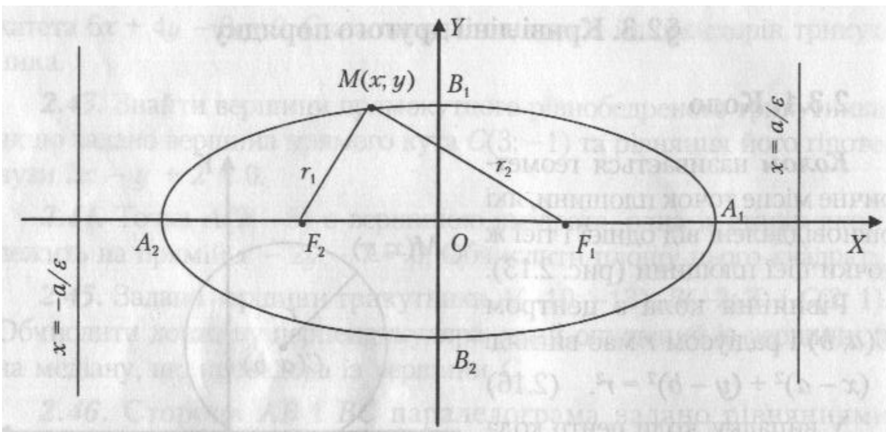
2. Еліпс

Озн. 2. Еліпсом називається геометричне місце точок, для кожної з яких сума відстаней до двох точок, які називаються фокусами, є сталою величиною.

Це визначення дає можливість легко намалювати еліпс. Якщо нитку довжиною L закріпити кнопками по краях до листка паперу (це фокуси), а вістрям олівця водити вздовж натягнутої цим вістрям нитки, то одержимо еліпс.

Канонічне рівняння еліпса з центром на початку координат.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (3)$$



Координати фокусів еліпса $F_1(c;\ 0)$ і $F_2\ (-c;\ 0)$. Відстань між фокусами дорівнює $2c$. Точки перетину еліпса з осями координат $A_1\ (a;\ 0)$, $A_2\ (-a;\ 0)$ і $B_2\ (0;\ b)$, $B_2\ (0;\ -b)$ – називаються вершинами еліпса.

Відрізки $A_1A_2 = 2a$, $B_1B_2 = 2\ b$ – називаються осями еліпса.

Величина $e=\frac{c}{a}$ називається ексцентриситетом гіперболи, звідки $\frac{b}{a}=\sqrt{e^2-1}$. Ексцентриситет еліпса $e=\frac{c}{a}<1$.

Відстані r_1 та r_2 точки $M\ (x,\ y)$ еліпса до його фокусів називаються фокальними радіусами цієї точки і визначаються за формулами: $r_1=a-ex$, $r_1=a+ex$.

Дві прямі, які паралельні до малої осі еліпса і знаходяться від неї на відстані $\frac{a}{e}$, називаються директрисами еліпса. Їхні рівняння: $x=\frac{a}{e}$, $x=-\frac{a}{e}$.

Якщо центр еліпса буде в точці $A(x_0;\ y_0)$, то рівняння еліпса буде таким:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1. \tag{4}$$

Якщо c=0, то ε=0 і b=a (випадок кола).

<u>Приклад:</u> Записати рівняння еліпса та знайти його ексцентриситет, якщо a=5, b=3, а центр еліпса знаходиться в точці A(3; 4).

Для зміщеного центру маємо:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1\Rightarrow\frac{(x-3)^2}{25}+\frac{(y-4)^2}{9}=1.$$

З виразу $\frac{b}{a}=\sqrt{1-e^2}$ маємо: $\frac{b^2}{a^2}=1-e^2\Rightarrow$

$$\Rightarrow e^2=1-\frac{b^2}{a^2}=1-\frac{9}{25}=\frac{25-9}{25}=\frac{16}{25}\Rightarrow\varepsilon=\frac{4}{5}.$$

4. Гіпербола

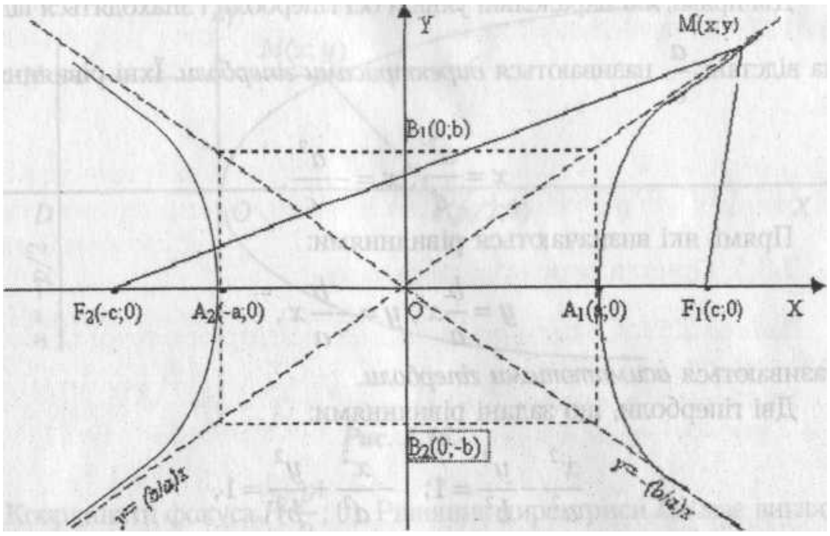
Озн. 3. Гіперболою називається геометричне місце точок, для кожної з яких різниця відстаней до двох деяких точок (фокусів) є величиною сталою.

Канонічне рівняння гіперболи з центром на початку координат:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{5}$$

Координати фокусів гіперболи $F_1(c;\ 0)$ і $F_2\ (-c;\ 0)$. Відстань між фокусами дорівнює $2c$. Точки перетину еліпса з віссю абсцис $A_1\ (a;\ 0)$, $A_2\ (-a;\ 0)$ називаються дійсними вершинами. Відстань $A_1A_2=2a$ називається дійсною віссю гіперболи.

Точки $B_2\ (0;\ b),\ B_2\ (0;\ -b)$ – називаються уявними вершинами гіперболи, а відрізок $B_1B_2 = 2b$ – уявною віссю гіперболи.



Ексцентриситет гіперболи $e = \dfrac{c}{a} > 1.$

Відстані r_1 та r_2 точки $M\ (x,\ y)$ гіперболи до його фокусів називаються фокальними радіусами цієї точки і визначаються за формулами: $r_1=a-ex,\ r_1=a+ex$, за умови, що точка M лежить на правій вітці гіперболи.

Дві прямі, які паралельні до уявної осі гіперболи і знаходяться від неї на відстані $\dfrac{a}{e}$, називаються директрисами еліпса. Їхні рівняння: $x = \dfrac{a}{e},\ x = -\dfrac{a}{e}$.

Прямі, що виражаються рівняннями $y = \pm\dfrac{b}{a}\cdot x$ називаються асимптотами гіперболи.

Дві прямі, що виражаються рівняннями:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \text{ і } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

називаються спряженими.

Якщо вісі гіперболи рівні, тобто $a = b$, то гіпербола називається рівнобічною або рівносторонньою. Її рівняння має вигляд: $x^2 - y^2 = a^2$

Якщо центр перетину асимптот не співпадає з початком координат і знаходиться в точці $A(x_0;\ y_0)$, то рівняння гіперболи відповідно будуть:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=\pm 1 \tag{6}$$

<u>Приклад</u>: записати рівняння гіперболи, яка проходить через точку $A(5;\ 5)$, якщо її асимптоти паралельні осям координат і перетинаються у точці $B(3;2)$.

З рівняння $(x-x_0)(y-y_0)=k$ маємо: $(x-3)(y-2)=k$. Підставляючи координати точки A в рівняння, знаходимо: $(5-2)(5-3)=k \Rightarrow k=6$. Отже,

$(x-3)(y-2)=6$ є рівнянням гіперболи.

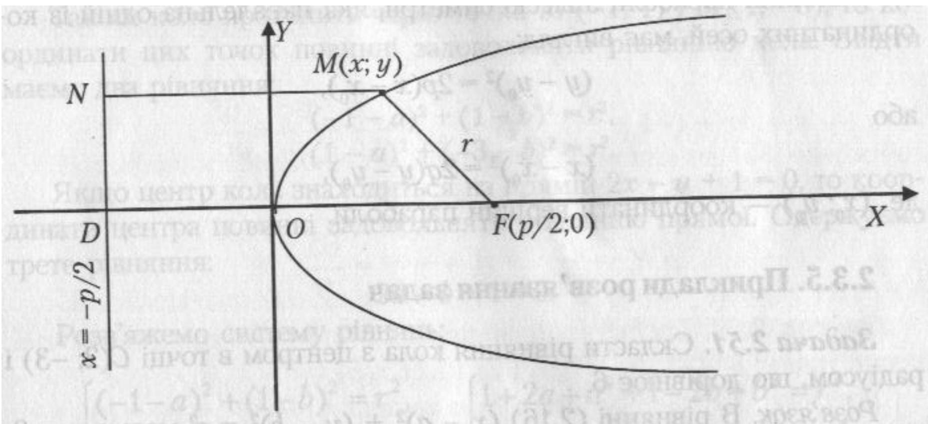
5. Парабола

Озн. 3. Параболою називається геометричне місце точок, кожна з яких рівновіддалена від деякої точки (фокуса) та деякої прямої (директриси).

Канонічне рівняння параболи з вершиною на початку координат.

$$y^2=2px \tag{7}$$

де p – відстань від фокуса до директриси. Вершина параболи знаходиться у початку координат, віссю симетрії є вісь абсцис.



Координати фокуса F $\left(\frac{p}{2};0\right)$. Рівняння директриси параболи: $x=-\frac{p}{2}$.

Фокальний радіус $M\ (x,y)$ параболи дорівнює $r=x+\frac{p}{2}$.

Ексцентриситет параболи вважається рівним одиниці.

Якщо віссю симетрії параболи служить вісь ординат, то рівняння параболи матиме вигляд:

$$x^2=2py, \qquad (8)$$

Якщо ж вершина параболи з точки $O(0;0)$ переміститься в точку $A(x_0;y_0)$, то рівняння параболи будуть:

$$(y-y_0)^2=\pm 2p(x-x_0) \text{ або } (x-x_0)^2=\pm 2p(y-y_0).$$

<u>Приклад:</u> Записати рівняння параболи, яка має вершину в точці $A(6;\ 3)$ і проходить через точку $B(0;-8)$.

Гілки параболи (рис.66) спрямовані вниз, отже, її рівняння буде таким: $(x-x_0)^2=-2p(y-y_0) \Rightarrow (x-6)^2=-2p(y-3)$. Точка B лежить на параболі, а значить задовольняє її рівняння. Підставивши в рівняння координати точки B, одержимо:

$$(0-6)=-2p(-8-3) \Rightarrow 36=22p \Rightarrow p=\frac{36}{22} \Rightarrow 2p=\frac{36}{11}.$$

Отже, рівняння параболи буде: $(x-6)^2=-\frac{36}{11}(y-3)$.