РОЗДІЛ 2. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Лекція 4.

Тема: Елементи аналітичної геометрії на площині.

1. Системи координат:

   а) декартова система координат;

   б) полярна система координат.

2. Відстань між двома точками.
3. Поділ відрізка пополам.
4. Площа трикутника.
5. Кутовий коефіцієнт прямої.
6. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом, яка проходить через задану точку.
7. Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки.
8. Рівняння прямої у загальному вигляді.
9. Координати точки перетину прямих.
10. Кут між двома прямими.
11. Умова паралельності прямих.
12. Умова перпендикулярності прямих.
13. Відстань від точки до прямої

Аналітична геометрія – це наука, яка вивчає методи розв'язування геометричних задач методами аналізу. Основи аналітичної геометрії заклав французький математик Р. Декарт.

1. Системи координат

Основою аналітичної геометрії є система координат. Систем координат існує багато, але найбільш розповсюджені прямокутна, або декартова система та полярна системи.

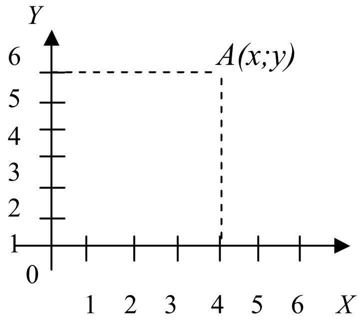
а) **Декартова система.** На площині розглядають два взаємно перпендикулярні вектори: горизонтально розташований вектор Ox (вісь Ox) та вертикально розташований вектор Oy (вісь Oy). Точка O є початком координат.

Обидві осі мають однаковий або різний масштаб, за допомогою якого для кожної точки на осях знаходиться відстань від початку координат.

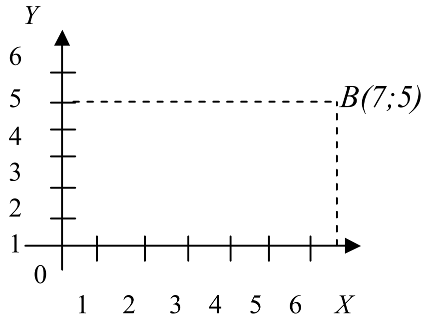
Декартова система дозволяє розв'язувати дві задачі:

а) знаходження координат невідомої точки шляхом проведення перпендикулярів на осі координат (рис. а);

б) знаходження місця відомої точки на площині як перетину перпендикулярів, побудованих на осях у точках, що відповідають координатам шуканої точки (рис. б).



а)

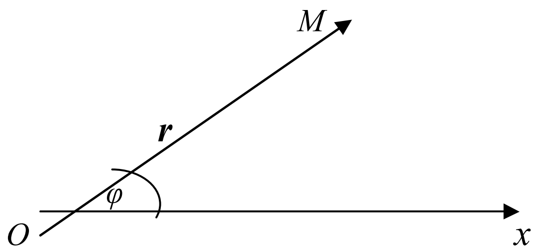


б)

Координатна система дає можливість кожній точці площини поставити у відповідність два числа – координати точки. Перше число є проекцією точки на вісь Ox, а друге – проекцією на вісь Oy. Ці координати можуть бути відомими або невідомими. Якщо координати точки M невідомі, то цю точку позначають $M(x;y)$. Якщо ж вони відомі, то позначають $M(x_1; y_1)$ або $M(x_M; y_M)$, тобто x та y мають при собі числові, або буквені індекси.

б) **Полярна система**: Ця система складається з деякої точки O, що називається полюсом, та горизонтальної осі Ox, що називається полярною віссю.

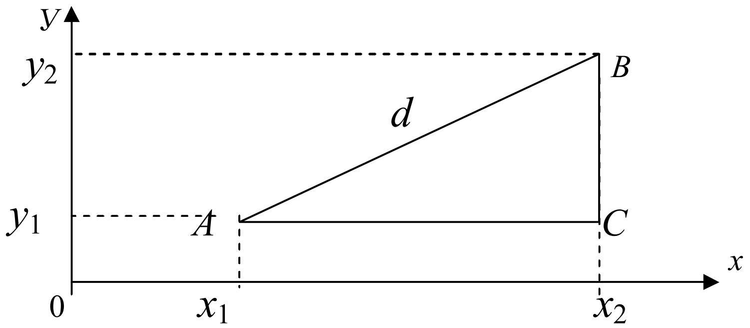
Будь-яка точка M лежить на прямій $OM=r$, яка називається радіус-вектором і утворює з полярною віссю кут φ, який в полярній системі є аргументом.



Величини r і φ називаються полярними координатами. Точка M в полярних координатах записується у вигляді $M(r;\ \varphi)$. Форми запису координат у декартовій і полярній системах співпадають, тому завжди вживають додаткові пояснення щодо системи координат.

2. Відстань між двома точками

Нехай задано відрізок AB з координатами кінців відрізка $A(x_1; y_1)$ та $B(x_2; y_2)$.



З трикутника ABC маємо: $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2}$. Звідси:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{1}$$

<u>Приклад:</u> Знайти довжину відрізка AB, якщо $A(3; 5)$ і $B(7; 8)$.

$$d = \sqrt{(7-3)^2 + (8-5)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5.$$

3. Поділ відрізка пополам

Нехай задано відрізок AB з координатами кінців відрізка $A(x_1; y_1)$ та $B(x_2; y_2)$. Точка C є серединою відрізка AB. Тоді координати точки C можна визначити за формулами:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2};\ y = \frac{y_1 + y_2}{2} \tag{2}$$

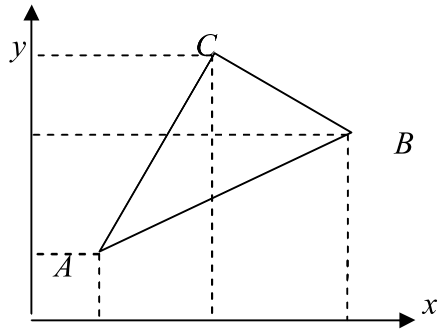
<u>Приклад:</u> Знайти середину відрізка AB, якщо $A(3; 5)$ і $B(7; 8)$.

$$x_c = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{3+7}{2} = 5;\ y_c = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{5+8}{2} = 6{,}5.$$

Отже, координати точки C (5; 6,5).

4. Площа трикутника

Нехай задано трикутник ABC з координатами вершин $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ та $C(x_3; y_3)$.



Тоді площа трикутника обчислюється за такою схемою:

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - y_1x_2 - y_2x_3 - y_3x_1) \qquad (3)$$

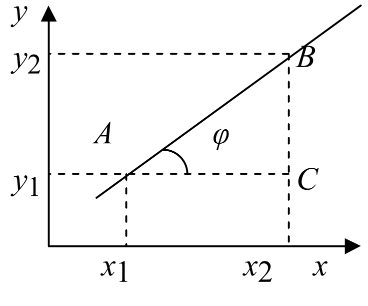
П р и к л а д: Обчислити площу трикутника $A(2;7)$, $B(12;1)$, $C(6;15)$.

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 12 & 1 \\ 6 & 15 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left(2 + 180 + 42 - 84 - 6 - 30\right) = 34\,кв.од.$$

За подібною схемою обчислюється площа будь-якого многокутника, але для правильного обходу точок необхідно мати рисунок.

5. Кутовий коефіцієнт прямої

Озн. 1: Рівнянням прямої називається такий математичний зв'язок між змінними x та y, взятими зі шкали дійсних чисел, при якому кожному значенню x відповідає одне і тільки одне значення y.



З $_{\Delta}ABC$ видно, що $tg\varphi = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Озн. 2: В аналітичній геометрії тангенс кута нахилу прямої до осі *Ox* називається кутовим коефіцієнтом прямої і позначається через *k*. Отже:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{4}$$

<u>Приклад:</u> Знайти кутовий коефіцієнт прямої *AB*, якщо *A*(6; 8); *B*(−10; 12).

$k = \dfrac{-10 - 6}{12 - 8} = \dfrac{-16}{4} = -4$. Пряма нахилена до осі *Ox* під тупим кутом.

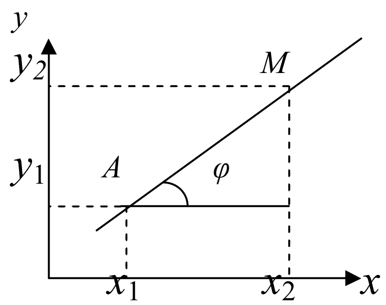
6. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом, яка проходить через задану точку

Виберемо на прямій довільну точку *M* з невідомими координатами x та y. Тоді для кутового коефіцієнта можемо записати:

$k = \dfrac{y - y_1}{x - x_1} \Rightarrow y - y_1 = k(x - x_1)$.

Отже, рівняння прямої з відомим кутовим коефіцієнтом, яка проходить через одну задану точку, має канонічний вигляд:

$$y - y_1 = k(x - x_1) \tag{5}$$



<u>Приклад:</u> Записати рівняння прямої, що проходить через точку *A*(2; 4) з заданим кутовим коефіцієнтом $k = 3$.

Згідно формули (5) одержимо: $y - 4 = 3(x - 2)$.

7. Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки

Використаємо рівняння прямої через одну задану точку $y - y_1 = k(x - x_1)$. При відомих координатах точок *A* і *B* маємо:

$k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Тоді $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \Rightarrow \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$.

Отже, рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки, має вигляд:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \qquad (6)$$

Рівняння (6) завдяки відсутності кутового коефіцієнта і необхідності користуватись таблицею тангенсів відноситься до найбільш вживаних на практиці.

<u>Приклад:</u> Записати рівняння прямої, що проходить через точки *A* та *B* з координатами *A*(2; 3); *B*(6; 8).

$$\frac{y-3}{8-3} = \frac{x-2}{6-2} \qquad \Rightarrow \frac{y-3}{5} = \frac{x-2}{4}.$$

8. Рівняння прямої у загальному вигляді

Алгебраїчна форма рівняння першого порядку має вигляд:

$$Ax + By + C = 0. \qquad (7)$$

До цієї форми зводиться будь-яке з попередніх рівнянь.

З рівняння у загальному вигляді можемо отримати рівняння прямої, яка відтинає на осі ординат відомий відрізок, а також кутовий коефіцієнт прямої:

$$By = -Ax - C \Rightarrow y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}, \text{ звідки}$$

$$k = -\frac{A}{B} \qquad (8)$$

Висновок. Якщо рівняння задане в загальному вигляді, то тангенс кута нахилу прямої визначається відношенням коефіцієнта при *x* до коефіцієнта при *y*, взятому з оберненим знаком;

<u>Приклад:</u> Знайти кутовий коефіцієнт прямої, що задана рівнянням $3x - 4y - 12 = 0$.

З формули (8) маємо: $k = \frac{3}{-4} = \frac{3}{4}$.

9. Координати точки перетину прямих

Якщо рівняння прямих, що перетинаються в точці $A(x_0;y_0)$, задані в загальному вигляді, то точка перетину цих прямих є точкою, координати якої є такими, що задовольняють обидва рівняння і знаходяться з розв'язування системи рівнянь:

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 \end{cases} \tag{9}$$

<u>Приклад:</u> Знайти точку перетину прямих, що задаються рівняннями $3x + 5y - 8 = 0$ та $7x - 4y - 3 = 0$.

Координати точки перетину прямих знаходимо із системи рівнянь:

$$\begin{cases} 3x + 5y = 8 \\ 7x - 4y = 3 \end{cases}.$$

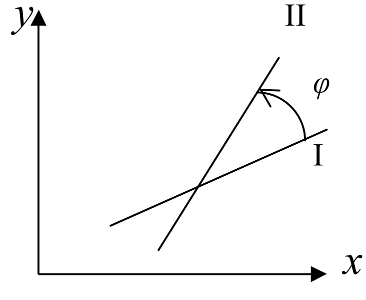
Систему обчислимо методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} = -12 - 35 = -47;$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -32 - 15 = -47; \ \Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 56 = -47.$$

З формул Крамера маємо: $x_0 = \frac{\Delta_x}{\Delta} = 1$; $y_0 = \frac{\Delta_y}{\Delta} = 1$. Отже, $A(1;\ 1)$.

10. Кут між двома прямими



Кут між прямими знаходимо за годинниковою стрілкою від прямої I до прямої II. Із тригонометричних формул відомо: $tg(\beta-\alpha)=\dfrac{tg\beta-tg\alpha}{1+tg\alpha\cdot tg\beta}$, де β і α – кути нахилу прямих I і II. Оскільки $tg\alpha=k_1$,а $tg\beta=k_2$, то:

$$tg\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}. \tag{10}$$

<u>Приклад</u>: Знайти кут між прямими $3x+5y-8=0$ та $7x-4y-3=0$.

З формули (8) маємо: $k_1=-\dfrac{3}{5}$ і $k_2=-\dfrac{7}{4}$.

Тоді $tg\varphi=\dfrac{-7/4-(-3/5)}{1+(-7/4)\cdot(-3/5)}=\dfrac{3/5-7/4}{1+21/20}=\dfrac{(12-35)/20}{41/20}=\dfrac{-23}{41}$.

З тригонометричних таблиць маємо $\varphi\approx151^\circ$

11. Умова паралельності прямих

Якщо прямі паралельні, то кут між ними φ=0. Тоді з умови $\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}=0$ маємо: $k_2-k_1=0$. Отже, якщо прямі паралельні, то

$$k_1=k_2. \tag{11}$$

<u>Приклад:</u> Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $A(1;\ 2)$ і паралельна прямій $2x+3y-8=0$.

Так, як прямі паралельні, то їх кутові коефіцієнти рівні $k_1=k_2=-\dfrac{2}{3}$, тоді за рівнянням (5): $y-y_1=k(x-x_1)$, тобто $y-2=-\dfrac{2}{3}(x-1)$.

12. Умова перпендикулярності прямих

Якщо для прямих, що перетинаються, $tg\varphi=\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}$,то $ctg\varphi=\dfrac{1+k_1k_2}{k_2-k_1}$. Для перпендикулярних прямих $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$, тобто $ctg\dfrac{\pi}{2}=0$, а значить,

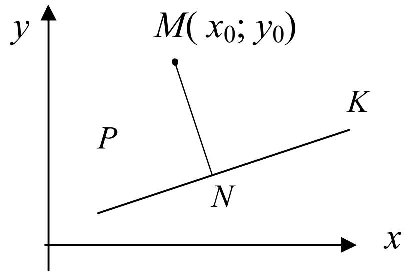
$1+k_1k_2=0\Rightarrow k_2=\dfrac{-1}{k_1}$. Отже, якщо прямі перпендикулярні, то: $k_2=-\dfrac{1}{k_1}$ (12)

<u>Приклад:</u> Знайти рівняння перпендикуляра до прямої $3x-4y+1=0$, який проходить через точку $A(2;\ 7)$.

З умови перпендикулярності $k_2 = -\frac{1}{k_1} = -\frac{1}{-\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$, тоді за рівнянням (5):

$y - y_1 = k(x - x_1)$, тобто $y - 7 = \frac{4}{3}(x - 2)$.

13. Відстань від точки до прямої



Відстань від точки до прямої знаходиться за перпендикуляром, тому спочатку треба знайти рівняння перпендикуляра *MN*, далі розв'язати систему рівнянь *MN* та *PK* і знайти координати точки *N*, після чого знайти довжину відрізка *MN*. Виконавши вказані дії, одержимо формулу для відстані від точки *M* до прямої *PK*:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{13}$$

Чисельник взято за модулем, тому що відстань є невід'ємним числом.

Приклад: Знайти відстань від точки $A(2;\,3)$ до прямої $3x+4y+7=0$.

Згідно формулі (13) знаходимо: $d = \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 7|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{25}{\sqrt{25}} = 5$.

Узагальнений приклад :

Дано координати вершин трикутника $\Delta A_1A_2A_3$: $A_1\ (0;\,6)$; $A_2\ (3;\,2)$; $A_3\ (5;\,3)$ і точку $A_4\ (2;\,1)$. Побудувати рисунок в системі координат.

Знайти: а) рівняння прямої A_1A_2;

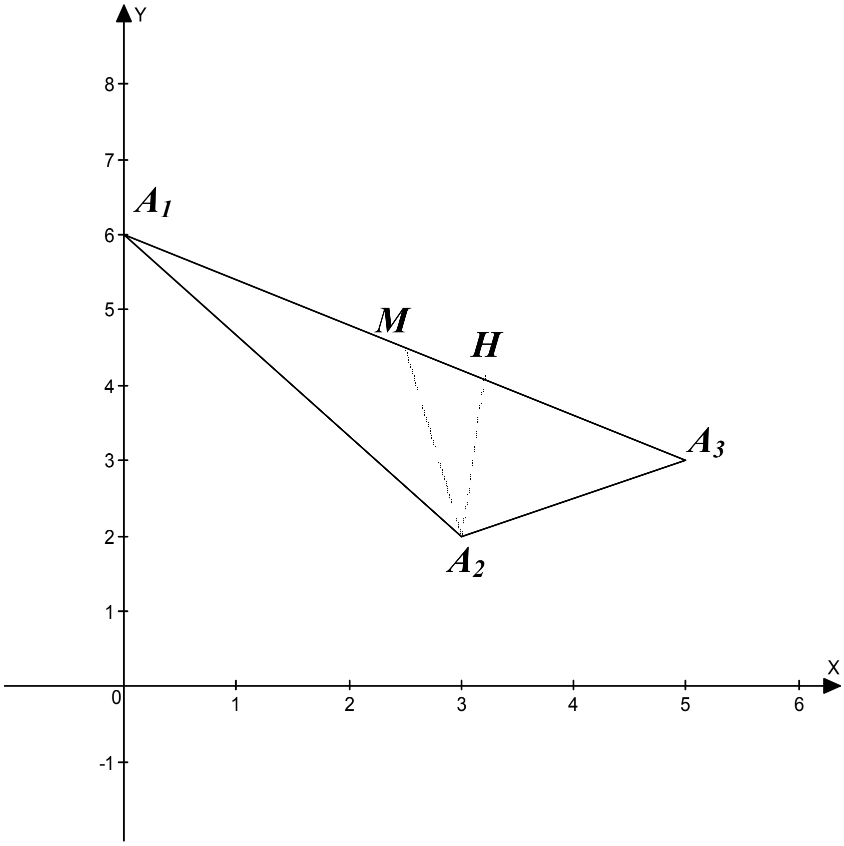
б) рівняння висоти та медіани $\Delta A_1A_2A_3$, опущених з вершини A_2;

в) тангенс кута A_2;

г) площу трикутника $\Delta A_1A_2A_3$;

д) відстань від точки A_4 до прямої A_1A_2.

Розв'язання: Побудуємо рисунок в системі координат:



а) Запишемо <u>рівняння прямої A_1A_2</u>:

Рівняння прямої, що проходить через дві точки, має вигляд: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$.

Координати точок *A_1 (0; 6) і A_2 (3; 2)* відомі, тому рівняння набуватиме вигляду: $\frac{x-0}{3-0}=\frac{y-6}{2-6}$, або після спрощення: $4x+3y+18=0$.

б) Запишемо <u>рівняння висоти та медіани</u> $\Delta A_1A_2A_3$, опущених з вершини A_2: Для запису рівняння висоти A_2H, що перпендикулярна стороні A_1A_3, запишемо рівняння сторони A_1A_3, користуючись попередньою формулою: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$. Координати точок *$A_1$ (0; 6)* і *A_3 (5; 3)* відомі, тому рівняння набуватиме вигляду: $\frac{x-0}{5-0}=\frac{y-6}{3-6}$, або після спрощення: $3x+5y-30=0$.

Кутовий коефіцієнт цієї прямої дорівнює: $k_{A_1A_3}=-\frac{A}{B}=-\frac{3}{5}$. Кутовий коефіцієнт перпендикулярної прямої: $k_{A_1A_3}=-\frac{1}{k_{A_1A_3}}=-\left(-\frac{5}{3}\right)=\frac{5}{3}$.

Рівняння прямої, що проходить через точку A_2 $(3;\ 2)$ з кутовим коефіцієнтом $k_{A_2H}=\frac{5}{3}$ має вигляд: $y-y_2=k(x-x_2)$, або $y-2=\frac{5}{3}\cdot(x-3)$. Після перетворення рівняння висоти набуває вигляду: $5x-3y-9=0$.

Для запису рівняння медіани A_2M знайдемо координати точки M, як середини сторони A_1A_3: $x_м=\frac{x_{A_1}+x_{A_3}}{2}=\frac{0+5}{2}=2{,}5$, $y_м=\frac{y_{A_1}+y_{A_3}}{2}=\frac{6+3}{2}=4{,}5$.

Запишемо рівняння медіани, як рівняння прямої, що проходить через дві точки: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$. Так як координати точок A_2 і M відомо, то: $\frac{x-3}{2{,}5-3}=\frac{y-2}{4{,}5-2}$. Після спрощення рівняння медіани: $5x+y-17=0$.

в) Знайдемо <u>тангенс кута A_2</u>, обчисливши кутові коефіцієнти прямих A_1A_2 і A_2A_3. Рівняння прямої A_1A_2, з попередніх обчислень: $4x+3y+18=0$, тоді $k_{A_1A_2}=-\frac{A}{B}=-\frac{4}{3}$. Кутовий коефіцієнт прямої A_2A_3 обчислимо за формулою: $k_{A_2A_3}=\frac{y_2-y_3}{x_2-x_3}=\frac{2-3}{3-5}=\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}$.

Кут між прямими знаходимо за годинниковою стрілкою, користуючись формулою: $tg\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}=\frac{\frac{1}{2}-\left(-\frac{4}{3}\right)}{1+\left(-\frac{4}{3}\right)\cdot\frac{1}{2}}=\frac{11}{6}:\frac{1}{3}=\frac{11}{2}=5{,}5$. Тоді, користуючись чотиризначними таблицями маємо: $\varphi=78^\circ42'$.

г) Визначимо <u>площу трикутника $A_1A_2A_3$:</u>

$$S=\pm\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\\ x_3 & y_3\\ x_1 & y_1\end{vmatrix}=\pm\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix}0 & 6\\ 3 & 2\\ 5 & 3\\ 0 & 6\end{vmatrix}=\pm\frac{1}{2}(0\cdot2+3\cdot3+5\cdot6-3\cdot6-5\cdot2-0\cdot6)=\frac{11}{2}=5{,}5\textit{кв.од.}$$

д) <u>Відстань від точки A_4 $(2;\ 1)$ до прямої A_1A_2, $4x+3y+18=0$:</u>

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|4\cdot2+3\cdot1+18|}{\sqrt{16+9}}=\frac{29}{5}=5{,}8\textit{од.}$$