Лекція 3.

Тема: Системи лінійних рівнянь.

1. Обернена матриця. Матричні рівняння.
2. Системи лінійних рівнянь. Матричний метод.
3. Метод Крамера.
4. Метод Гауса.

1. Обернена матриця. Матричні рівняння.

Нехай задано матрицю $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$. Поставимо задачу знайти матрицю $\frac{1}{A} = A^{-1}$.

Озн. 13. Квадратна матриця виду $A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{n1} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$ називається оберненою до матриці А.

Теорема 3: Для існування оберненої матриці A^{-1} необхідно і достатньо, що матриця A була не виродженою.

<u>Приклад:</u> Знайти матрицю, обернену до заданої: $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Обчислимо визначник матриці А і алгебраїчні доповнення всіх елементів:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -68.$$

$A_{11} = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -17$; $\quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -5$; $\quad A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 9$;

$A_{21} = -\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -17$; $\quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7$; $\quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 32 \end{vmatrix} = 1$;

$A_{31} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 17$; $\quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -11$; $\quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -21$.

Обернена матриця має вигляд:

$$A^{-1} = -\frac{1}{68} \cdot \begin{pmatrix} -17 & -17 & 17 \\ -5 & 7 & -11 \\ 9 & 1 & -21 \end{pmatrix}.$$

Матриця A^{-1} знайдена правильно, тому що $A \cdot A^{-1} = E$, тобто:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{68}\right) \cdot \begin{pmatrix} -17 & -17 & 17 \\ -5 & 7 & -11 \\ 9 & 1 & -21 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{68} \begin{pmatrix} 2 \cdot (-17) + 5 \cdot (-5) - 1 \cdot 9 & 2 \cdot (-17) + 5 \cdot 7 - 1 \cdot 1 & 2 \cdot 17 + 5 \cdot (-11) - 1 \cdot (-21) \\ 3 \cdot (-17) - 3 \cdot (-5) + 4 \cdot 9 & 3 \cdot (-17) - 3 \cdot 7 + 4 \cdot 1 & 3 \cdot 17 - 3 \cdot (-11) + 4 \cdot (-21) \\ 1 \cdot (-17) + 2 \cdot (-5) + 3 \cdot 9 & 1 \cdot (-17) + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 17 + 2 \cdot (-11) + 3 \cdot (-21) \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{68} \cdot \begin{pmatrix} -68 & 0 & 0 \\ 0 & -68 & 0 \\ 0 & 0 & -68 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Безпоседнім обчисленням легко переконатися, що для оберненої матриці справджуються рівності: $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Квадратна матриця може мати обернену тоді і тільки тоді, якщо вона не вироджена. Крім того, для не виродженої квадратної матриці А існує єдина обернена матриця.

Вміння знаходити обернену матрицю дає можливість розв'язувати матричні рівняння. Наприклад: $A \cdot X = B \Rightarrow X = \dfrac{B}{A} = B \cdot A^{-1}$.

Приклад: Розв'язати матричне рівняння:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 7 \end{pmatrix};$$

$$X = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}^{-1};$$

Обчислимо обернену матрицю $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}^{-1}$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 10 = -13;$$

$A_{11} = -3$; $A_{12} = -5$ $A_{21} = -2$ $A_{22} = 1$

Тоді обернена матриця матиме вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-13} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$X = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{-13} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix};$$

$$X = -\frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} 5 \cdot (-3) + 9 \cdot (-5) & 5 \cdot (-2) + 9 \cdot 1 \\ 4 \cdot (-3) + 7 \cdot (-5) & 4 \cdot (-2) + 7 \cdot 1 \end{pmatrix};$$

$$X = -\frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} -60 & -1 \\ -47 & -1 \end{pmatrix}; \; X = \begin{pmatrix} \frac{60}{13} & \frac{1}{13} \\ \frac{47}{13} & \frac{1}{13} \end{pmatrix}.$$

2. Системи лінійних рівнянь. Матричний метод.

Системою n лінійних рівнянь з змінними $x_1, x_2, \ldots, x_n$ називається система:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (3)$$

Числа a_{ij} біля невідомих називають коефіцієнтами, числа b_i – вільними членами системи (3).

Озн. 14. Система називається однорідною, якщо всі її вільні члени дорівнюють нулю, і неоднорідною, якщо хоч один з них відмінний від нуля.

Множина чисел $(a_1, a_2, \ldots a_n)$ називається розв’язком системи, якщо при підстановці цих чисел в кожне рівняння системи отримаємо рівність.

Озн. 15. Система називається сумісною, якщо вона має розв’язок.

Озн. 16. Дві системи називаються рівносильними, якщо вони мають однакові множини розв'язків.

Теорема 4: Якщо визначник системи (3) відмінний від нуля, то система сумісна і має розв'язок, що визначається формулою: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} A^* \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$,

де Δ – головний визначник системи,

A^* – зведена матриця, $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ – стовбець вільних елементів.

<u>Приклад:</u> Розв'язати систему лінійних рівнянь матричним методом:

$$\begin{cases} 2x + 7y + z = -17, \\ 7x + 3y + 5z = 8, \\ 3x + 2y + 6z = 9. \end{cases}$$

Обчислимо головний визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 7 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 6 + 1 \cdot 7 \cdot 2 + 7 \cdot 5 \cdot 3 - 1 \cdot 3 \cdot 3 - 2 \cdot 5 \cdot 2 - 7 \cdot 7 \cdot 6 =$$

$$= 36 + 14 + 105 - 9 - 20 - 294 = -168.$$

Так як $\Delta \neq 0$, то система має єдиний розв'язок.

Обчислимо алгебраїчні доповнення до кожного елемента матриці за формулою:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot 6 - 5 \cdot 2 = 18 - 10 = 8;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -(7 \cdot 6 - 5 \cdot 3) = -(42 - 15) = -27;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = 14 - 9 = 5;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -(7 \cdot 6 - 1 \cdot 2) = -(42 - 2) = -40;$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 1 \cdot 3 = 12 - 3 = 9;$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(2 \cdot 2 - 7 \cdot 3) = -(4 - 21) = 17;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 7 \cdot 5 - 1 \cdot 3 = 35 - 3 = 32;$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = -(2 \cdot 5 - 1 \cdot 7) = -(10 - 7) = -3;$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 7 \cdot 7 = 6 - 49 = -43.$$

Запишемо зведену матрицю: $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -40 & 32 \\ -27 & 9 & -3 \\ 5 & 17 & -43 \end{pmatrix}$.

Тоді стовбець невідомих елементів $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ дорівнює: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} A^* \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} =$

$$= \frac{1}{-168} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 40 & 32 \\ -27 & 9 & -3 \\ 5 & 17 & -43 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -17 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{-168} \cdot \begin{pmatrix} 8 \cdot (-17) - 40 \cdot 8 + 32 \cdot 9 \\ (-27) \cdot (-17) + 9 \cdot 8 + (-3) \cdot 9 \\ 5 \cdot (-17) + 17 \cdot 8 + (-43) \cdot 9 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{-168} \cdot \begin{pmatrix} -136 - 320 + 288 \\ 459 + 72 - 27 \\ -85 + 136 - 387 \end{pmatrix} = \frac{1}{-168} \cdot \begin{pmatrix} -168 \\ 504 \\ -336 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Отже, {1; –3; 2} – шуканий розв'язок системи лінійних рівнянь.

Відповідь: {1; –3; 2}.

3. Метод Крамера.

Теорема 5: Якщо визначник системи (3) відмінний від нуля, то система сумісна і має розв'язок, що визначається формулами: $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$; $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$; $z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$.

Приклад: Розв’язати систему лінійних рівнянь за правилом Крамера:

$$\begin{cases} 2x + 7y + z = -17, \\ 7x + 3y + 5z = 8, \\ 3x + 2y + 6z = 9. \end{cases}$$

Розв’язання:

З попередніх обчислень головний визначник системи дорівнює $\Delta = -168$. Обчислимо додаткові визначники, замінюючи по черзі перший, другий та третій стовбець головного визначника стовбцем вільних елементів:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -17 & 7 & 1 \\ 8 & 3 & 5 \\ 9 & 2 & 6 \end{vmatrix} = (-17)\cdot 3\cdot 6 + 8\cdot 2\cdot 1 + 7\cdot 5\cdot 9 - 1\cdot 3\cdot 9 - 2\cdot 5\cdot(-17) - 8\cdot 7\cdot 6 =$$

$= -306 + 16 + 315 - 27 + 170 - 336 = -168$;

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & -17 & 1 \\ 7 & 8 & 5 \\ 3 & 9 & 6 \end{vmatrix} = 2\cdot 8\cdot 6 + 7\cdot 9\cdot 1 + 3\cdot(-17)\cdot 5 - 1\cdot 8\cdot 3 - 2\cdot 5\cdot 9 - 7\cdot 6\cdot(-17) =$$

$= 96 + 63 - 255 - 24 - 90 + 714 = 504$;

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 7 & -17 \\ 7 & 3 & 8 \\ 3 & 2 & 9 \end{vmatrix} = 2\cdot 3\cdot 9 + 7\cdot 8\cdot 3 + 7\cdot 2\cdot(-17) - (-17)\cdot 3\cdot 3 - 2\cdot 2\cdot 8 - 7\cdot 7\cdot 9 =$$

$= 54 + 168 - 238 + 153 - 32 - 441 = -336$.

Визначимо корені системи рівнянь за формулами Крамера:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-168}{-168} = 1; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{504}{-168} = -3; \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-336}{-168} = 2.$$

Отже, $\{1; -3; 2\}$ – шуканий розв’язок системи лінійних рівнянь.

4. Метод Гауса.

Одним із найпоширеніших методів розв’язування систем лінійних рівнянь є метод послідовного виключення невідомих, або метод Гауса. Цей метод запропонований Гаусом і ґрунтується на елементарних перетвореннях системи рівнянь. Розглянемо даний метод на прикладі:

<u>Приклад:</u> Розв'язати систему рівнянь методом Гауса $\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x-y+z=3 \\ x+y-z=0 \end{cases}$.

Виконаємо елементарні перетворення над рядками розширеної матриці:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Тоді маємо нову систему: $\begin{cases} x+y+z=6 \\ 3y+z=9 \\ z=3 \end{cases}$, з якої отримуємо: $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases}$.