Лекція 2.

Тема: Елементи теорії визначників.

1. Визначники.
2. Мінори. Алгебраїчні доповнення.
3. Ранг матриці.

1. Визначники.

Визначником (детермінантом) порядку n називається число, одержане в результаті певних обчислень квадратної матриці $A = \left(a_{ij}\right)_{nn}$ того ж порядку. Позначається Δ або $\det A$. Поняття визначника ввів В. Лейбніц.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (2).$$

Щоб обчислити визначник другого порядку, скористуємося схемою:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{vmatrix}.$$

<u>Приклад:</u> $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 22 \end{vmatrix} = 3 \cdot 22 - 1(-4) = 70.$

Щоб обчислити визначник другого порядку, скористуємося схемою:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}.$$

<u>Приклад</u>: $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 6 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 4 \cdot 5 \cdot 5 + 2 \cdot (-3) \cdot (-2) + (-3) \cdot 3 \cdot 6 -$

$-(-2) \cdot 5 \cdot 6 - (-3) \cdot 3 \cdot 4 - 2 \cdot (-3) \cdot 5 = 100 + 12 - 54 + 60 + 36 + 30 = 184.$

Властивості визначників:

1. Значення визначника не змінюється, якщо всі його рядки замінити відповідними стовбцями.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Для доведення цієї властивості досить застосувати правило трикутників і порівняти одержані результати. Доведемо цю властивість для визначника третього порядку:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11};$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}.$$

Отже, $\Delta_1 = \Delta_2$, тобто властивість справджується.

2. Перестановка двох рядків визначника рівносильна множенню його на –1.

Тобто, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{1} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Перевіримо дану властивість на прикладі:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 3 + 20 - 12 - 5 - 8 = 6; \; \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 5 + 12 - 20 - 8 - 3 = -6.$$

3. Якщо визначник має два однакових рядки, або стовпці, то він дорівнює нулю. Тобто, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$.

Перевіримо дану властивість на прикладі:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&1&2\\2&2&1\\5&5&4\end{vmatrix}=8+5+20-20-5-8=0;\ \Delta=\begin{vmatrix}1&1&2\\2&3&5\\1&1&2\end{vmatrix}=6+5+4-6-5-4=0.$$

4. Якщо всі елементи якого-небудь рядка, або стовпця визначника містять спільний множник, то його можна винести за знак визначника. Тобто,

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\ka_{21}&ka_{22}&ka_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&ka_{13}\\a_{21}&a_{22}&ka_{23}\\a_{31}&a_{32}&ka_{33}\end{vmatrix}=k\cdot\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}.$$

Перевіримо дану властивість на прикладі:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&1&2\\2&8&4\\5&5&4\end{vmatrix}=32+20+20-80-20-8=2\cdot\begin{vmatrix}1&1&2\\1&4&2\\5&5&4\end{vmatrix}=16+10+10-40-10-4=$$

$$=-36.$$

5. Якщо всі елементи деякого рядка, або стовпця визначника дорівнюють нулю, то сам визначник дорівнює нулю.

Тобто, $\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\0&0&0\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{21}&0\\a_{21}&a_{22}&0\\a_{31}&a_{32}&0\end{vmatrix}=0$.

6. Якщо відповідні елементи двох рядків визначника пропорційні, то визначник дорівнює нулю. Тобто, $\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\ka_{11}&ka_{12}&ka_{13}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=0$.

Перевіримо дану властивість на прикладі:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&1&2\\2&2&4\\5&5&4\end{vmatrix}=8+20+20-20-20-8=0.$$

7. Якщо кожен елемент деякого рядка визначника є сумою двох доданків, то визначник може бути зображений у вигляді суми двох визначників, у яких один у згаданому рядку має перші з заданих доданків, а інший другі; елементи, що знаходяться на решті місць у всіх трьох визначниках одні й ті самі. Тобто,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & b_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

8. Якщо до елементів деякого рядка визначника додати відповідні елементи іншого рядка, помножені на довільний спільний множник, то значення визначника при цьому не зміниться. Тобто, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+ka_{13} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+ka_{23} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}+ka_{33} & a_{33} \end{vmatrix}$.

2. Мінори. Алгебраїчні доповнення.

Озн. 8. Мінором M_{ik}, що відповідає елементу a_{ik} матриці (1), називається визначник, який відповідає матриці, утвореній з матриці (1) викреслюванням *i*-го рядка та *k*-го стовбця.

Озн. 9. Алгебраїчним доповненням A_{ik}, що відповідає елементу a_{ik} матриці (1), називається відповідний мінор, взятий зі знаком «плюс», якщо сума його індексів парна, і зі знаком «мінус», якщо сума його індексів непарна: $A_{ik} = (-1)^{i+k} \cdot M_{ik}$.

Приклад: Дано матрицю $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 6 & -3 & 5 \end{pmatrix}$.

Обчислити мінори M_{12} і M_{22} та алгебраїчні доповнення A_{12} і A_{22}.

$M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 18 = -8$; $M_{22} = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 20 - (-12) = 32$;

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot (2 \cdot 5 - 3 \cdot 6) = -(10 - 18) = 8;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^4 \cdot (4 \cdot 5 - 6 \cdot (-2)) = 20 - (-12) = 32.$$

Теорема 1. Значення визначника n-го порядку, що визначає матрицю (1), дорівнює сумі добутків елементів довільного рядка або довільного стовпця на відповідні алгебраїчні доповнення.

Доведення: Покажемо, що для визначника $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ виконуються такі рівності:

$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$ $\qquad$ $\Delta = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$

$\Delta = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$ $\qquad$ $\Delta = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$

$\Delta = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}$ $\qquad$ $\Delta = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}$

Доведемо, наприклад, першу з них:

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}\left(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}\right) -$$
$$- a_{12}\left(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}\right) + a_{13}\left(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}\right) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} -$$
$- a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11} = \Delta$. Аналогічно доводяться і інші рівності.

<u>Приклад</u>: Обчислити визначник розкладаючи його за елементами третього рядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -7 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & -11 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -7 & 5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (-11) \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 4 \cdot 1 \cdot \left(-7 \cdot 3 - 5 \cdot (-2)\right) + 2 \cdot (-1) \cdot (3 \cdot 3 - 5 \cdot 1) + (-11) \cdot 1 \cdot \left(3 \cdot (-2) - (-7) \cdot 1\right) = -44 -$$
$- 8 - 11 = 63$.

Теорема 2. Сума добутків елементів будь-якого рядка, або стовпця визначника на алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого рядка, чи стовпця дорівнює нулю.

Доведення: Нехай маємо визначник $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$. Розглянемо, наприклад, суму добутків елементів першого рядка визначника на алгебраїчні доповнення елементів другого рядка:

$$\Delta = a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = -a_{11}\left(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}\right) +$$
$$+ a_{12}\left(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}\right) - a_{13}\left(a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12}\right) = 0.$$

3. Ранг матриці.

Нехай задано матрицю $A = \left(a_{ij}\right)_{mn}$. Виділимо в матриці *A* будь-які *k* рядків і стільки ж стовпців, де *k* – число, не більше чисел *m* і *n*.

Озн. 10. Визначник *k* порядку, складений з елементів, що стоять на перетині виділених рядків і стовпців, називається мінором *k*-го порядку матриці $A = \left(a_{ij}\right)_{mn}$.

Озн. 11. Рангом $r(A)$ матриці *A* називається найбільший з порядків її мінорів, відмінних від нуля.

Безпосередньо з означення випливає, що:

1) ранг існує для будь-якої матриці;

2) $r(A) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $A = 0$;

3) для квадратної матриці *n*-го порядку ранг дорівнює *n* тоді і тільки тоді, коли матриця не вироджена.

Озн. 12. Квадратна матриця називається виродженою, якщо її визначник дорівнює нулю.

Ранг матриці можна знайти так. Якщо всі мінори першого порядку дорівнюють нулю, то $r = 0$. Якщо хоч один з мінорів першого порядку відмінний від нуля, а всі мінори другого порядку дорівнюють нулю, то $r = 1$. У випадку, коли є мінор другого порядку, відмінний від нуля, досліджуємо мінори третього порядку. Так продовжуємо доти, поки не станеться одне з двох: або всі мінори порядку *k* дорівнюють нулю або мінорів порядку *k* не існує, тоді $r = k - 1$.

<u>Приклад:</u> Знайти ранг матриці: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$.

Серед мінорів першого порядку є відмінні від нуля, тому $r \geq 1$. Оскільки один з мінорів другого порядку $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$, а всі мінори третього порядку дорівнюють нулю, то $r = 2$.

Вказаний метод знаходження рангу матриці не завжди зручний, тому що пов'язаний з обчисленням значного числа визначників. Простіший метод ґрунтується на тому, що ранг матриці не змінюється, якщо над матрицею виконати елементарні перетворення, а саме:

а) переставити місцями два рядки, або стовпці;

б) помножити кожен елемент рядка, або стовпця на один і той самий відмінний від нуля множник;

и) додати до елементів рядка, або стовпця відповідні елементи другого рядка, або стовпця, помножені на одне і те саме число.

<u>Приклад:</u> Знайти ранг матриці: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 4 & -2 & 4 \\ 5 & 3 & 10 & 8 & 2 \\ 1 & -5 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$.

Виконуючи елементарні перетворення, маємо:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 4 & -2 & 4 \\ 5 & 3 & 10 & 8 & 2 \\ 1 & -5 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -7 & -2 & -2 & 7 \\ 0 & -7 & 0 & 8 & 7 \\ 0 & -7 & -2 & -2 & 7 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -2 & -2 & 7 \\ 0 & -7 & 0 & 8 & 7 \\ 0 & -7 & -2 & -2 & 7 \end{pmatrix} \cong$$

$$\cong \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$