РОЗДІЛ 8. РЯДИ

Лекція 18.

Ряди. Ознаки збіжності рядів.

1. Основні поняття і теореми.
2. Необхідна ознака збіжності рядів.
3. Достатні умови збіжності.
4. Знакозмінні ряди.

1. Основні поняття і теореми.

Озн. 1: Якщо задана нескінченна послідовність чисел $u_1, u_2, u_3, \ldots u_n, \ldots$, то сума членів цієї послідовності $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$ (1) називається числовим рядом, а самі числа $u_1, u_2, u_3, \ldots u_n, \ldots$ називаються членами ряду.

Якщо члени ряду − додатні числа, то ряд називається знакопозитивним. Якщо серед членів ряду зустрічаються додатні та від'ємні числа, то ряд називається знакозмінним. Якщо у знакозмінному ряді спостерігається почергова зміна знаку, то він називається знакопочерговим.

Наприклад, ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$ є знакопозитивним, ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$ − знакозмінним, а ряд $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \ldots - \frac{1}{n} + \ldots$ − знакопочерговим.

Розглянемо основні поняття на прикладі знакопозитивного ряду. Частковою сумою членів ряду називається сума перших k членів, яка позначається S_k. Тоді:

$$S_1 = u_1; S_2 = u_1 + u_2; S_3 = u_1 + u_2 + u_3; S_k = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_k; S_n =$$
$$= u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_k + \ldots + u_n .$$

Озн. 2: Якщо $\lim\limits_{n \to \infty} S_n$ існує у вигляді скінченного числа, тобто $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = S$, то ряд буде збіжним, а число S — сумою ряду.

Наприклад, відома зі школи спадна геометрична прогресія, знаменник якої дорівнює $\frac{1}{2}$ є числовим рядом: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...-\frac{1}{2^{n-1}}+...$ сума якого дорівнює $\frac{1}{1-0,5}=2$.

Озн. 3: Якщо границя $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ необмежена або не існує, то ряд буде розбіжним і суми не має. Наприклад, ряд $2+2+\dots\ +2+...$ буде розбіжним, бо його часткова сума $S_n=\underbrace{2+2+2+...+2=}_{n}2n$.

Основні теореми

1. Якщо з ряду $u_1+u_2+u_3+...+u_n+...$вилучити декілька членів і при цьому отриманий ряд збіжний, то ряд також буде збіжним, тобто якщо збігається ряд $u_4+u_5+u_6+u_7+...+u_n+...$, то ряд $u_1+u_2+u_3+u_4+u_5+u_6+u_7+...+u_n+...$ також збігається.

2. Якщо ряд $u_1+u_2+u_3+...+u_n+...$ збіжний, то ряд, отриманий з даного вилученням декількох членів, також збіжний, тобто із збіжності ряду $u_1+u_2+u_3+u_4+u_5...+u_n+...$ випливає збіжність ряду $u_3+u_4+u_5+...+u_n+....$

3. Множення членів ряду $u_1+u_2+u_3+...+u_n+...$ на сталу не впливає на його збіжність: якщо даний ряд збіжний, то ряд $cu_1+cu_2+cu_3+...+cu_n+...$ також збіжний.

4. Якщо ряд $u_1+u_2+u_3+...+u_n+...$ (1) збіжний і має суму S_1 і ряд $v_1+v_2+v_3+...+v_n+...$ (2) також збіжний і має суму S_2, то ряди, утворені додаванням та відніманням членів з однаковими номерами, будуть збіжними і мати відповідно суми S_1+S_2 та S_1-S_2, тобто:

$$(u_1+v_1)+(u_2+v_2)+(u_3+v_3)+...=S_1+S_2$$

$$(u_1-v_1)+(u_2-v_2)+(u_3-v_3)+...=S_1-S_2.$$

5. Якщо ряди (1) і (2) такі, що $u_1\le v_1;u_2\le v_2;..u_n\le v_n...$, а ряд (1) розбіжний, то ряд (2) також буде розбіжним.

6. Якщо ряди (1) і (2) такі, що $u_1 \geq v_1; u_2 \geq v_2; \ldots u_3 \geq v_3$, а ряд (1) збіжний, то ряд (2) також збіжний.

Останні дві теореми називаються порівняльними і мають широке практичне застосування при дослідженні збіжності рядів.

2. Необхідна ознака збіжності рядів

У теорії рядів вияснення питання про збіжність ряду має більше значення, ніж питання про знаходження його суми.

Розглянемо ряд $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$. Якщо даний ряд такий, що $u_1 \leq u_2 \leq u_3 \leq \ldots \leq u_n \leq \ldots$,то ряд буде розбіжним. Наприклад, ряд з натуральних чисел $1+2+3+\ldots+n+\ldots$ є розбіжним. Частинна сума ряду при додаванні наступного числа зростає на ціле число. Розбіжним буде також ряд, складений з однакових чисел. Так, ряд $2+2+2+2+\ldots$ буде розбіжним (кожен наступний член збільшує суму на дві одиниці). Тому можемо говорити тільки про збіжність спадного ряду, у якого кожен наступний член менший попереднього (додавання наступних членів збільшує суму на все менше число). Можемо стверджувати: у збіжному ряді (1) завжди

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0 . \qquad (3)$$

Розглянемо ряд

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} + \ldots, \qquad (4)$$

у якого $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{\infty} = 0$. Звернемо увагу на те, що $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ (див. розкладання правильного дробу на доданки). Тоді ряд можемо записати у вигляді:

$$\left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) + \ldots = 1 - \frac{1}{n-1}$$

Частинна сума перших n членів ряду буде $S_n. = 1 - \frac{1}{n-1}$.

Звідси $\lim\limits_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{n+1}) = 1$. Отже, ряд (4) збіжний, його сума дорівнює 1.

Розглянемо ряд

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots, \tag{5}$$

який називається гармонічним. В цьому ряді також $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=\frac{1}{\infty}=0.$ Щоб зрозуміти, збіжний ряд чи розбіжний, використаємо порівняльні теореми. Для цього запишемо більшу кількість членів:

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\ldots$ і створимо з її членів групи, починаючи з третього члена: перша група вміщує 2 члени, друга − 4, третя − 8 і т.д. Отримаємо:

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}\right)+\ldots$$

Складемо допоміжний ряд таким чином: в першій групі число $\frac{1}{3}$ замінимо меншим числом $\frac{1}{4}$, у другій групі три перших числа − меншим числом $\frac{1}{8}$ (останнім у групі), у всіх інших групах аналогічно всі попередні члени групи замінимо останнім членом групи. Отримаємо: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots$

Ряд розбіжний, тому що члени ряду не зменшуються. Але цей ряд складений з гармонічного ряду шляхом заміни більших членів меншими. Тому на підставі п'ятої теореми гармонічний ряд розбіжний.

На підставі цієї ж теореми ряд $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}$ буде розбіжним, тому що члени ряду більші відповідних членів розбіжного гармонічного ряду ($\sqrt{2}<2\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{2}}>\frac{1}{2}$ і т.д.).

Аналогічно ряд $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$ збіжний, тому що члени цього ряду менші відповідних членів ряду (5), який як спадна геометрична прогресія (будь-яка спадна геометрична прогресія зі знаменником q має суму $S=\frac{1}{1-q}$) належить до збіжних рядів.

3. Достатні умови збіжності.

Теорема 1: *Ознака Даламбера*

Якщо знакопозитивний ряд $u_1+u_2+u_3+u_4+...+u_n+...$ такий, що

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l, \tag{6}$$

то ряд буде збіжним при $l<1$ і розбіжним при $l>1$, а при $l=1$ ознака відповіді не дає (ряд може бути збіжним чи розбіжним).

<u>Приклад</u>: Дослідити на збіжність ряд

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+...+\frac{1}{n!}+...$$

Якщо $u_n=\frac{1}{n!}$, то $u_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}$. Тоді $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{n!(n+1)}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$, $l<1$ – ряд збіжний.

Теорема 2: *Ознака Коші*

Якщо для знакопозитивного ряду (1) існує границя

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l, \tag{7}$$

то при $l<1$ ряд збіжний, при $l>1$ – розбіжний, а при $l=1$ ознака відповіді не дає.

<u>Приклад:</u> Дослідити на збіжність ряд:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+...+\frac{1}{n^2}+....$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=\frac{1}{\infty}=0<1$, ряд збіжний.

Теорема 3: *Інтегральна ознака*

Якщо у знакопозитивному ряді (1) $u_1\geq u_2\geq u_3\geq...\geq u_n\geq...$ і існує така функція $f(x)$, для якої справедливо: $f(1)=u_1; f(2)=u_2, f(3)=u_3, ..., f(n)=u_n,...,$

то ряд (1)буде збіжним, якщо невласний інтеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ збіжний, і розбіжним, якщо інтеграл розбіжний.

<u>Приклад:</u> Дослідити на збіжність гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

Складемо функцію $f(x)=\frac{1}{x}$, яка задовольняє ознаку. Отримаємо:

$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to\infty}\ln x\Big|_1^b=\lim_{b\to\infty}(\ln b-\ln 1)=\ln\infty=\infty.$ Інтеграл розбіжний, отже, ряд також розбіжний (ознака Даламбера відповіді не дає).

4. Знакозмінні ряди

Теорема 3: *Ознака Лейбніца*

Якщо члени знакопочергового ряду $u_1-u_2+u_3-u_4+...$ такі, що $u_1>u_2>u_3>u_4...$ і $\lim_{n\to\infty}u_n=0$, то ряд буде збіжним.

Приклад: Довести, що ряд збіжний $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-...+\frac{1}{n}-...$

Ряд збіжний, тому що $1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\frac{1}{4}$ і $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=\frac{1}{\infty}=0.$

На відміну від знакопочергового у знакозмінного ряду знак ”–” може бути розташований довільним чином (не обов’язково за знаком ”+” буде знак ”–”), тому знакопочерговий ряд є частковим випадком знакозмінного ряду.

Озн. 4: Якщо знакозмінний ряд $u_1+u_2+u_3+u_4+...$, члени якого можуть бути як додатними, так і від’ємними, є таким, що ряд $|u_1|+|u_2|+|u_3|+|u_4|...$, складений з абсолютних величин його членів, буде збіжним, то цей знакозмінний ряд буде збіжним і називається абсолютно збіжним рядом.

Озн. 5: Якщо знакозмінний ряд збіжний, а ряд $|u_1|+|u_2|+|u_3|+|u_4|...$, складений з абсолютних величин його членів, буде розбіжним, то цей знакозмінний ряд називається умовно збіжним.

Наприклад, ряд $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-...$ умовно збіжний, тому що гармонічний ряд $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+...$ розбіжний, а ряд $1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}-...$ абсолютно збіжний, бо ряд, складений з абсолютних величин його членів, як було показано, збіжний.

Справедливі твердження:

1. Якщо знакозмінний ряд збігається абсолютно, то будь-яка перестановка членів ряду місцями не впливає на його збіжність та суму;
2. Якщо знакозмінний ряд збігається умовно, то перестановка місцями членів ряду може змінити суму ряду і навіть зробити його розбіжним.