РОЗДІЛ 7. ДИФЕРЕНЦІЙНІ РІВНЯННЯ

Лекція 17.

Тема: Диференціальні рівняння.

1. Основні поняття.
2. Диференціальні рівняння I порядку. Рівняння з відокремлюваними змінними.
3. Однорідні диференційні рівняння.
4. Лінійні диференційні рівняння.
5. Рівняння в повних диференціалах.

1. Основні поняття

Озн. 1: Диференціальним рівняння називається рівняння, що зв'язує між собою незалежну змінну x, функцію y та її похідні або диференціали. Найвищий порядок похідної визначає порядок диференціального рівняння. Наприклад, рівняння

$$f(x, y, y', y'', y''', C) = 0 \tag{1}$$

є диференціальним рівнянням третього порядку. Наявність похідної чи диференціала в диференціальному рівнянні обов'язкова, тоді як змінні x чи y можуть бути відсутні. Наприклад, рівняння $y'' = 4$ являє собою диференціальне рівняння другого порядку, не дивлячись на відсутність у ньому змінних x та y.

Озн. 2: Розв'язком диференціального рівняння називається функція $y = f(x)$, яка, будучи підставленою разом зі своїми похідними у диференціальне рівняння, перетворює його у тотожність.

П р и к л а д: Розв'язати диференціальне рівняння $y' = 2x + 2$.

Тоді $dy = (2x+2)dx \Rightarrow y = \int (2x+2)dx = x^2 + 2x + C_1$.

П р и к л а д: Розв'язати диференціальне рівняння $y'' = 2x + 2$.

$$y'' = 2x + 2 \Rightarrow y' = x^2 + 2x + C_1 \Rightarrow y = \frac{x^3}{3} + x^2 + C_1 x + C_2 .$$

П р и к л а д: Розв’язати диференціальне рівняння $y''' = 2x + 2$.

$$y''' = 2x + 2 \Rightarrow y'' = x^2 + 2x + C_1 \Rightarrow y' = \frac{x^3}{3} + x^2 + C_1 x + C_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{3} + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

Розв’язки всіх трьох диференціальних рівнянь називаються загальними. У кожному з них число суттєво незалежних сталих співпадає з порядком рівняння. Суттєво незалежними сталими називаються такі сталі, які не виражаються одна через одну. Наприклад, якщо розв’язок третього рівняння записати у вигляді:

$$y = \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{3} + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3 + C_4 + C_5,$$

то сталі C_3, C_4, C_5 не належать до суттєво незалежних, бо $C_3 + C_4 + C_5 = C$, в той час як C_1 і C_2 одна через одну не виражаються.

Озн. 3: Якщо для диференціального рівняння відомі деякі додаткові умови, за яких можемо визначити конкретні значення сталих, що задовольняють задані умови, то такі додаткові умови називаються початковими умовами.

П р и к л а д: Розв’язати диференціальне рівняння $y' = 2x + 2; y(1) = 2$.

Початкова умова $y(1) = 2$ означає, що функція $y = f(x)$ проходить через точку (1;2). Тоді $y = x^2 + 2x + C$. Накладемо початкову умову $x = 1; y = 2 \Rightarrow$ $2 = 1 + 2 + C \Rightarrow C = -1$. Із загального розв’язку знаходимо частинний розв’язок $y = x^2 + 2x - 1$. При зміні початкових умов змінюється вигляд частинного розв’язку, яких із загального розв’язку можна знайти безліч.

Як відомо з інтегрального числення, знаходження функції за відомою її похідною проводиться за дією інтегрування, тому розв’язок диференціального рівняння зводиться до цієї дії. Якщо диференціальне рівняння має вигляд $y' = f(x)$, то його загальний розв'язок буде $y = \int f(x)dx. + C$. При цьому не грає ролі, обчислюється цей інтеграл чи ні.

2. Диференціальні рівняння І порядку. Рівняння з відокремленими змінними.

Існує декілька видів диференціальних рівнянь першого порядку, які досить легко обчислюються і які розглядатимуться в цьому пункті. Тому при подальшому вивченні кожного виду для простоти запису слова ”диференціальні” та ”першого порядку” опускаються.

Розглянемо диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними. Загальний вигляд таких рівнянь:

$$f_1(x) + f_2(x) \cdot y' = 0. \tag{2}$$

Перейдемо до диференціального запису, помноживши рівняння на dx:

$$f_1(x)dx + f_2(x)y'dx = 0 \text{ або } \quad f_1(x)dx + f_2(y)dy = 0 \tag{3}$$

У цьому рівнянні біля диференціала dx відсутня функція, що залежить від y, а біля диференціала dy відсутня функція, що залежить від x. Кажуть, що змінні відокремлені. З властивостей невизначеного інтеграла відомо, що мають зміст тільки ті інтеграли, у яких функція і диференціал мають одну і ту ж змінну. У рівнянні з відокремленими змінними саме такий випадок, тому такі рівняння розв’язують методом інтегрування:

$$\int f_1(x)dx + \int f_2(y)dy = C.$$

П р и к л а д: Розв’язати рівняння $x^2dx + y^2dy = 0$.

$$x^2dx + y^2dy = 0 \Rightarrow \int x^2dx + \int y^2dy = C \Rightarrow \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} = C \Rightarrow \; x^3 + y^3 = C\,.$$

Отримали загальний розв’язок рівняння (замість 3С записали С, користуючись довільністю сталої).

Розглянемо випадок $f_1(x)f_2(y)dx + f_3(x)f_4(y)dy = 0$.

Відмітимо, як в цьому прикладі, так і в більшості ситуацій змінні біля dx крім функції $f_1(x)$, яка цей диференціал задовольняє, знаходиться функція $f_2(y)$, яка цей диференціал не задовольняє, але задовольняє dy. Аналогічно функція $f_3(x)$ не задовольняє dy, але задовольняє dx. Функції, що не задовольняють диференціали, необхідно відокремити, що досягається шляхом ділення на всі функції, що не задовольняють диференціали. До них належать $f_2(y)$ та $f_3(x)$. Таким чином, для відокремлення змінних рівняння необхідно поділити на добуток $f_2(y)\cdot f_3(x)$. Отримаємо:

$$\frac{f_1(x)\cdot f_2(y)dx + f_3(x)\cdot f_4(y)dy}{f_2(y)\cdot f_3(x)} = 0$$

$$\frac{f_1(x)\cdot f_2(y)dx}{f_2(y)\cdot f_3(x)} + \frac{f_3(x)\cdot f_4(y)dy}{f_2(y)\cdot f_3(x)} = 0$$

$$\frac{f_1(x)}{f_3(x)}dx + \frac{f_4(y)}{f_2(y)}dy = 0.$$

Змінні відокремлені, тому можемо рівняння інтегрувати:

$$\int\frac{f_1(x)}{f_3(x)}dx + \int\frac{f_4(y)}{f_2(y)}dy = C.$$

П р и к л а д: Розв’язати диференціальне рівняння $\sqrt{x}y' = y^2x^3$.

Так як $y' = \dfrac{dx}{dy}$, то рівняння набуватиме виду: $\sqrt{x}\,\dfrac{dx}{dy} = y^2x^3$.

Відокремимо змінні, помноживши ліву та праву частину виразу на $\dfrac{dy}{x^3}$, тобто:

$$\frac{\sqrt{x}}{x^3}dx = y^2dy,$$

Дане рівняння є рівнянням з відокремленими змінними: $x^{-\frac{5}{2}}dx = y^2dy$. Інтегруючи обидві частини рівняння одержимо:

$$\int x^{-\frac{5}{2}}dx = \int y^2dy,$$

$$\frac{x^{-\frac{3}{2}}}{-\frac{3}{2}} + C = \frac{y^3}{3} \Rightarrow y = \sqrt[3]{C - \frac{2}{x\sqrt{x}}}$$ – загальний розв’язок рівняння.

3. Однорідні диференційні рівняння.

Озн. 4: Однорідним називається таке рівняння, в якому множення кожної невідомої на величину t призводить до множення всього рівняння на величину t^n. При цьому число n вказує на порядок однорідності цього рівняння.

Наприклад, рівняння $y^2 + 5xy - 6x^2 = 0$ буде однорідним, бо множення кожної невідомої на t дає:

$$(ty)^2 + 5(tx)(ty) - 6(tx)^2 = 0;$$

Звідси:

$$t^2y^2 + 5tx \cdot ty - 6t^2x^2 = 0 \Rightarrow t^2(y^2 + 5xy - 6x^2) = 0.$$

Рівняння помножене на t^2, тому воно має другий порядок однорідності. Розв'язується таке рівняння заміною $y = tx$ (тобто $t = \frac{y}{x}$, де $x \neq 0$).

Отже, маємо: $y^2 + 5xy - 6x^2 = 0 \Rightarrow t^2x^2 + 5xtx - 6x^2 = 0 \Rightarrow$

$t^2x^2 + 5tx^2 - 6x^2 = 0 \Rightarrow x^2(t^2 + 5t - 6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t^2 + 5t - 6 = 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow t^2 + 5t - 6 = 0 \Rightarrow$

$t_1 = -6 \cup t_2 = 1 \Rightarrow y = -6x \cup y = x$.

Озн. 5: Однорідним диференціальним рівнянням називають диференціальне рівняння, яку можна записати у вигляді:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right), \tag{4}$$

Диференціальне однорідне рівняння, як і звичайне однорідне, також розв'язується заміною $y = tx$.

П р и к л а д: Розв'язати диференціальне рівняння: $y' = \frac{y}{x} + tgx$.

Дане рівняння є однорідним, тому скористаємося заміною $y = xu$, тоді похідна $y' = u + xu'$. Підставимо покладену заміну у задане рівняння:

$u + xu' = \frac{xu}{x} + tg\frac{xu}{x}$, або $u + xu' = u + tgu$;

$ctgudu = \frac{dx}{x}$ – рівняння є диференційним з відокремлюваними змінними.

Інтегруючи обидві частини рівняння одержимо:

$\ln|sinu| = \ln|x| + \ln C$;

$\ln|sinu| = \ln|Cx|$;

$sinu = Cx \Rightarrow u = arcsin(Cx)$.

Так як $y = xu$, то $y = xarcsin(Cx)$ – загальний розв'язок рівняння.

4. Лінійні диференційні рівняння.

Озн. 6: Лінійним диференціальним рівнянням називається таке рівняння, в якому величини y та y' знаходяться в першому степені і не перемножуються між собою. Загальний вигляд таких рівнянь:

$$y' + p(x)y = q(x). \qquad (5)$$

Наявність правої частини позбавляє можливості відокремити змінні. У диференціальній формі рівняння буде:

$$dy + p(x)ydx = q(x)dx.$$

При діленні на $y,$ яке знаходиться біля $dx,$ отримаємо:

$$\frac{dy}{y} + p(x)dx = \frac{q(x)}{y}dx.$$

У правій частині відокремлення відсутнє. Це тому, що справа присутня функція $q(x),$ яка в попередніх типах рівнянь була відсутня (права частина рівняння дорівнювала нулю).

Існує декілька способів розв'язування лінійних рівнянь з правою частиною. За методом Бернуллі позначимо $y = uv$ і $y' = u'v + uv'$. Підставляємо вказану заміну у рівняння. Групуємо певні доданки, склавши систему $\begin{cases} v' + pv = 0 \\ u'v = 0 \end{cases}$.

Розв'язуємо перше рівняння і знаходимо значення $v,$ яке підставляємо в друге рівняння і знаходимо $u'.$ Завдяки праву вибору функції v виберемо з них ту, у якої стала, що з'являється при обчисленні невизначеного інтеграла, дорівнює нулю. Шляхом інтегрування знаходимо функцію $u,$ після чого знаходимо $y = uv.$

П р и к л а д: Розв'язати диференціальне рівняння: $y' = 2y + x$.

Дане рівняння є лінійним, так як y і y' у однаковому степені (першому). Тому скористаємося заміною $y = uv$ і $y' = u'v + uv'$. Тоді:

$u'v + uv' = 2uv + x$,

$v(u' + 2u) = x - uv'$,

$\begin{cases} u' + 2u + 0, \\ x - uv' = 0, \end{cases}$

Розв'яжемо окремо перше рівняння системи:

$u' + 2u = 0$,

$$\frac{du}{dx}+2u=0, \quad \Big| \cdot \frac{dx}{u},$$

$$\frac{du}{u}+2dx=0,$$

$$\int \frac{du}{u}+2\int dx=0,$$

$$\ln u+2x=0 \Rightarrow u=e^{-2x}.$$

Отриманий вираз підставимо в друге рівняння системи:

$$x-uv'=0 \Rightarrow x-e^{-2x}v'=0,$$

$$x-e^{-2x}\cdot\frac{dv}{dx}=0, \quad \Big| \cdot \frac{dx}{e^{-2x}},$$

$$xe^{2x}dx-dv=0,$$

$$\int xe^{2x}dx-\int dv=0.$$

Обчислимо частинами перший інтеграл:

$$\int xe^{2x}dx=\left|\begin{array}{ll} u=x & dv=e^{2x}dx \\ du=dx & \dfrac{e^{2x}}{2}=v \end{array}\right|=\frac{xe^{2x}}{2}-\int\frac{e^2x}{2}dx=\frac{xe^{2x}}{2}-\frac{e^{2x}}{4}+C.$$

Тоді, $\frac{xe^{2x}}{2}-\frac{e^{2x}}{4}+C=v$.

З поставленої умови: $y=uv=e^{-2x}(\frac{xe^{2x}}{2}-\frac{e^{2x}}{4}+C)=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}+\frac{C}{e^{2x}}$ – загальний розв'язок диференціального рівняння.

6. Рівняння в повних диференціалах

Відомо, що для функції двох змінних $z=f(x,y)$ повний диференціал є виразом $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$, де частинні похідні − деякі функції від змінних x та y, тобто $\frac{\partial z}{\partial x}=P(x,y)$ і $\frac{\partial z}{\partial y}=Q(x,y)$, а мішані похідні другого порядку $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ рівні між собою. Тому $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$.

Озн. *7:* Диференціальним рівнянням у повних диференціалах називається рівняння виду

$$f_1(x,y)dx+f_2(x,y)dy=0 \qquad (6)$$

якщо функції $f_1(x,y)$ і $f_2(x,y)$ такі, що $\frac{\partial f_1(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial x}$, тобто ці функції є частинними похідними.

П р и к л а д: Розв'язати рівняння $(x^2 + y)dx + (x^3 + 4y^2)dy + 0$.

Перевіряємо наявність повного диференціала:

$\frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y) = \frac{\partial}{\partial x}(x^3 + 4y^2) \Rightarrow 1 = 3x^2$. Але $3x^2 \neq 1$, тому це рівняння не буде рівнянням в повних диференціалах.

П р и к л а д: Розв'язати рівняння $2xy^3dx + (3x^2y^2 + 1)dy = 0$.

Перевіряємо умову $\frac{\partial}{\partial y}(2xy^3) = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2y^2 + 1) \Rightarrow 2x \cdot 3y^2 = 6xy^2$.

Отже, це є рівняння у повних диференціалах. Тому:

$$\int 2xy^3dx = y^3\int 2xdx = x^2y^3 + C(y).$$

Отримана функція така, що частинна похідна по y є $3x^2y^2 + 1$, тому:

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^2y^3 + C(y)) = x^2 \cdot 3y^2 + C'(y) = 3x^2y^2 + C'(y) \Rightarrow 3x^2y^2 + C'(y) = 3x^2y^2 + 1$$

$$\Rightarrow C'(y) = 1 \Rightarrow C(y) = y.$$

Отже, загальний розв'язок рівняння буде:

$$x^2y^3 + y = C.$$