Лекція 16.

Тема: **Визначений інтеграл. Геометричне застосування визначеного інтегралу.**

1. Визначений інтеграл. Формула Ньютона-Лейбніца.
2. Застосування визначеного інтегралу до знаходження площ плоских фігур.
3. Обчислення дуги кривої.
4. Обчислення об'єму тіл обертання.

1. Визначений інтеграл. Формула Ньютона-Лейбніца.

Розглянемо деяку неперервну функцію $y = f(x)$, що задана і обмежена на інтервалі $[a;b]$. Функція разом з прямими $x = a$, $x = b$ та віссю OX утворює плоску фігуру, яка називається криволінійною трапецією. І якщо:

1) розбити цей відрізок довільним чином на n частин довжиною Δx_1, Δx_2, …, Δx_n;

2) вибрати на кожному частинному відрізку по одній довільній точці ε_1, ε_2, ε_n;

3) обчислити значення функції $y = f(x)$ у вибраних точках;

4) скласти суму $\sum f(\varepsilon_i)\Delta x_i$,

То дана сума називається інтегральною сумою $f(x)$ на відрізку $[a;b]$.

Якщо по різному ділити відрізок $[a;b]$ на n частин і по різному вибирати на них по одній точці ε_i, то можна для будь-якої неперервної заданої функції $f(x)$ і будь-якого заданого відрізка $[a;b]$ скласти нескінченну множину різних інтегральних сум. При цьому виявляється, що всі різні інтегральні суми при необмеженому зростанні n при прямуванні до нуля найбільшої із довжини частинного відрізка, мають одну і ту ж границю.

Озн. 1: Границя інтегральних сум функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ називається визначеним інтегралом від $f(x)$ в межах від a до b та позначається $\int f(x)dx$

Щоб обчислити визначений інтеграл, треба, не звертаючи уваги на межі інтегрування, обчислити невизначений інтеграл $\int f(x)dx = F(x) + C,$ після чого обчислити значення первісної в точках $x = b$ та $x = a$ і знайти різницю між ними $F(b) - F(a).$ Виходячи з цього, можемо записати Ньютона-Лейбніца:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \tag{1}$$

П р и к л а д: Знайти інтеграли:

а) $\int_{-1}^{7} \frac{dx}{\sqrt{3x-4}};$ б) $\int_{2}^{5} \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}};$

в) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+cosx};$ г) $\int_{0}^{1} arcsinxdx.$

Розв'язання:

а) $$\int_{-1}^{7} \frac{dx}{\sqrt{3x-4}} = \int_{-1}^{7} (3x+4)dx = \frac{1}{3} \frac{(3x+4)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\Bigg|_{-1}^{7} = \frac{2}{3}\sqrt{3x+4}\Bigg|_{-1}^{7} = \frac{2}{3}\left(\sqrt{25}-\sqrt{1}\right) = 2\frac{2}{3};$$

б) $$\int_{2}^{5} \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}} = \int_{2}^{5} \frac{dx}{9-(x-2)^2} = arcsin\frac{x-2}{3}\Bigg|_{2}^{5} = arcsin1 - arcsin0 = \frac{\pi}{2};$$

в) Скористаємося універсальною тригонометричною підстановкою $t = tgx$. Знайдемо $cosx = \frac{1-t^2}{1+t^2}$; $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ і нові межі інтегрування $t_1 = 0$ при $x_1 = 0$, та $t_2 = 1$ при $x_2 = \frac{\pi}{2}$. Тоді:

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+cosx} = \int_{0}^{1} \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = 2\int_{0}^{1} \frac{dt}{t^2+3} = \frac{2}{\sqrt{3}} arctg\frac{t}{\sqrt{3}}\Bigg|_{0}^{1} = \frac{2}{\sqrt{3}} arctg\frac{1}{\sqrt{3}} -$$

$$-\frac{2}{\sqrt{3}} arctg\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{6} - \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 0 = \frac{\pi}{3\sqrt{3}};$$

г) Виконаємо інтегрування частинами:

$$\int_{0}^{1} arcsinxdx = \begin{vmatrix} u = arcsinx, & dv = dx \\ du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, & v = x \end{vmatrix} = xarcsinx\Big|_{0}^{1} - \int_{0}^{1} \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = 1 \cdot arcsin1 -$$

$$0 \cdot arcsin0 + \sqrt{1-x^2}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Властивості визначеного інтегралу:

1. Якщо точка b наближається до точки a, то площа криволінійної трапеції зменшується, наближаючись до нуля. Тому:

$$\int_a^a f(x)dx = 0,$$

тобто визначений інтеграл з однаковими верхньою та нижньою границями завжди дорівнює нулю.

2. Якщо по осі абсцис замість змінної x ввести змінну t і мати вісь Ot та функцію $y = f(t)$, то величина площі при цьому не зміниться, тобто:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt.$$

3. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$. Заміна місцями в інтегралі верхньої та нижньої границь (операція називається зміною порядку інтегрування) змінює знак інтеграла:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a); \int_b^a f(x)dx = F(a) - F(b).$$

4. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$. За формулою Ньютона − Лейбніца

$$F(b) - F(a) = F(c) - F(a) + F(b) - F(c) = F(b) - F(a).$$

5. $\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx$.

6. $\int_a^b k \cdot f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$.

2. Застосування визначеного інтегралу до знаходження площ плоских фігур.

Площа плоскої фігури, що обмежена неперервною кривою, рівняння якої в прямокутних координатах має вигляд $f(x)$, віссю OX та двома прямими $x = a$, $x = b$. Знаходиться за формулою:

$$S = \int_a^b f(x)dx \tag{2}$$

При знаходженні площі фігури, що обмежена неперервною кривою, необхідно дотримуватися такого правила знаків: площі фігур, що знаходяться над віссю *Ox*, беруться зі знаком «плюс», а площі фігур, що знаходяться під віссю *Ox* зі знаком «мінус».

Якщо плоска фігура обмежена двома неперервними кривими, рівняння яких у прямокутних координатах $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$, при чому скрізь на відрізку $[a;b]$, $f_2(x) \geq f_1(x)$, то площа визначається за формулою:

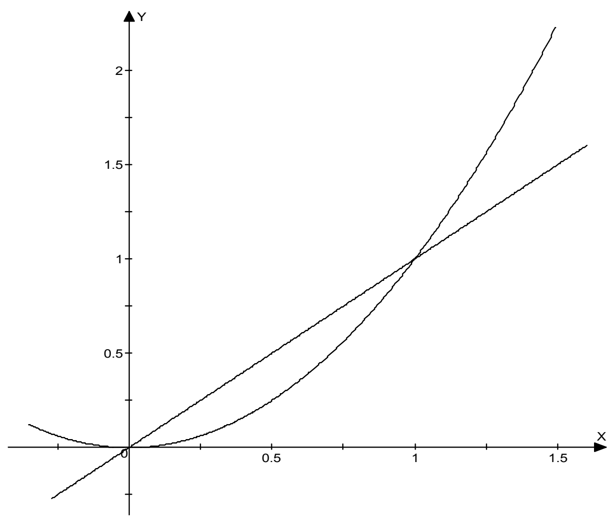
$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx \tag{3}$$

П р и к л а д: За допомогою визначеного інтеграла знайти площу фігури, обмежену лініями $y = x^2$, $y = x$. Зобразити фігуру в системі координат.

Розв'язання:

Побудуємо фігуру, площу якої необхідно знайти та визначимо площу обмеженої кривими фігури. Точки перетину кривих $x = 0$ та $x = 1$, тому межі інтегрування: від 0 до 1:

$$S = \int_0^1 x dx - \int_0^1 x^2 dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 - \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} (кв.од.)$$



3. Обчислення дуги кривої.

Довжина дуги плоскої кривої, що визначена в прямокутних координатах рівнянням $y = f(x)$, знаходиться за формулою:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx \tag{4}$$

Де a і b – відомі абсциси початку і кінця дуги.

Якщо крива задана параметрично: $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, при чому $\alpha \le x \le \beta$, а функція $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ мають неперервні похідні, то довжина дуги:

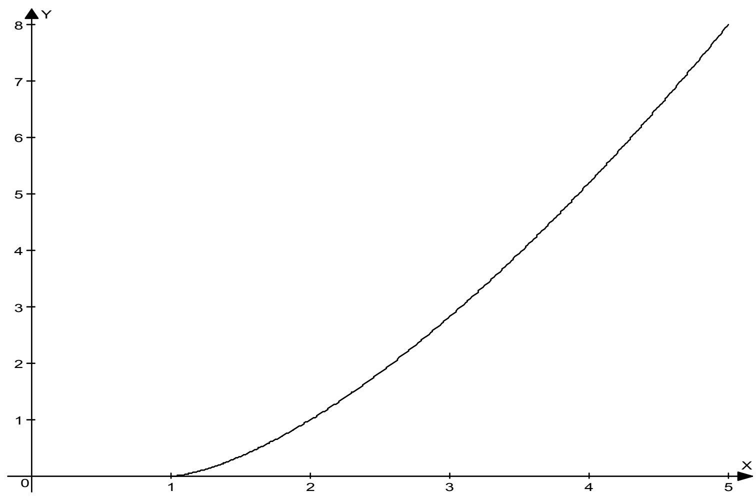
$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(x_t'\right)^2 + \left(y_t'\right)^2}\, dx \tag{5}$$

П р и к л а д: Обчислити довжину дуги параболи $y = (x-1)^{\frac{3}{2}}$ між точками A (2; 1) та B (5; 8).

Розв'язання: Знайдемо похідну $y' = \frac{3}{2}(x-1)^{\frac{1}{2}}$. Підставимо в формулу (4) і отримаємо:

$$l_{AB} = \int_2^5 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}(x-1)^{\frac{1}{2}}\right)^2}\, dx = \frac{1}{2}\int_2^5 \sqrt{9x-5}\, dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{(9x-5)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_2^5 = \frac{1}{27}\sqrt{(9x-5)^3}\Bigg|_2^5 =$$

$$\frac{1}{27}\left(\sqrt{40^3} - \sqrt{13^3}\right) \approx 7{,}63(\textit{лін.од.})$$



4. Обчислення об’єму тіл обертання.

Об’єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox криволінійної трапеції, що обмежена неперервною кривою, рівняння якої $y = f(x)$, віссю Ox та прямими $x = b$ та $x = a$, обчислюють за формулою:

$$V_{0x} = \pi \int_a^b f^2(x)dx \tag{6}$$

Об’єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Oy криволінійної трапеції, що обмежена неперервною кривою, рівняння якої $y = f(x)$, віссю Ox та прямими $x = b$ та $x = a$, обчислюють за формулою:

$$V_{0y} = 2\pi \int_a^b xydx \tag{7}$$

П р и к л а д: Обчислити об’єм тіла обертання, утвореного обертанням кривої $y = \sqrt{x}$ навколо осі OX в межах: $a = 0; b = 9$.

Об’єм $V = \pi \int_0^9 y^2 dx = \pi \int_0^9 xdx = \pi \cdot \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^9 = \frac{\pi}{2}(81 - 0) = \frac{81}{2}\pi$ (кв.од).