Лекція 15.

Тема: **Особливі випадки інтегрування функцій.**

1. Інтегрування деяких тригонометричних виразів.
2. Інтегрування виразів, що містять в знаменнику квадратний тричлен.
3. Інтегрування раціональних дробів.

1. Інтегрування деяких тригонометричних виразів.

Інтеграли виду $\int \sin kx \cos lx dx$, $\int \sin kx \sin lx dx$, $\int \cos kx \cos lx dx$:

Інтеграли виду $\int \sin kx \cos lx dx$, $\int \sin kx \sin lx dx$, $\int \cos kx \cos lx dx$, де l та k дійсні числа, $l \neq k$, знаходяться за допомогою формул:

$$\int \sin kx \cos lx dx = \frac{1}{2}\left(\sin(k-l)x + \sin(k+l)x\right),$$

$$\int \sin kx \sin lx dx = \frac{1}{2}\left(\cos(k-l)x - \cos(k+l)x\right), \qquad (1)$$

$$\int \cos kx \cos lx dx = \frac{1}{2}\left(\cos(k-l)x + \cos(k+l)x\right)$$

П р и к л а д: Знайти невизначений інтеграл:

$$\int sin 3x cos 7x dx = \frac{1}{2}\int \left(sin(3-7)x + sin(3+7)x\right)dx = \frac{1}{2}\int \left(sin(-4)x + sin 10x\right)dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int sin 4x dx + \int sin 10x dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} cos 4x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10} cos 10x + C = \frac{1}{8} cos 4x - \frac{1}{20} cos 10x +$$
$$+ C.$$

Інтеграли виду $\int R(\sin x, \cos x)dx$:

Розглянемо інтеграли виду $\int R(\sin x, \cos x)dx$. Даний запис означає, що над синусом і косинусом проводяться тільки раціональні операції: додавання та віднімання, множення на сталі величини, піднесення до цілого степеня, ділення. Іншими словами, під символом $\int R(\sin x \cos x)dx$ розуміють інтеграл від раціональної функції синуса та косинуса.

Такі інтеграли приводяться до інтегралів від інтегральної функції нового аргументу t підстановкою, яку називають універсальною: $t = tg\frac{x}{2}$, тоді

$$sinx=\frac{2t}{1+t^2}\,,\ cosx=\frac{1-t^2}{1+t^2}\,;\ dx=\frac{2dt}{1+t^2} \qquad (2)$$

П р и к л а д: Знайти невизначений інтеграл: $\int\frac{dx}{2sinx-cosx}$

Використаємо універсальну тригонометричну підстановку $t=tg\frac{x}{2}$. Тоді:

$$\int\frac{dx}{2sinx-cosx}=\int\frac{\frac{2dx}{1+t}}{2\frac{2t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int\frac{\frac{2dx}{1+t}}{\frac{4t-1+t^2}{1+t^2}}=2\int\frac{dt}{t^2+4t-1}=2\int\frac{dt}{(t+2)^2-5}=$$

$$=2\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}+2-\sqrt{5}}{tg\frac{x}{2}+2+\sqrt{5}}\right|+C=\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}+2-\sqrt{5}}{tg\frac{x}{2}+2+\sqrt{5}}\right|+C.$$

Інтеграли виду $\int\sin^m x\cos^n xdx$:

Нехай хоча б один з показників степеня є непарне число. Нехай $n=2k+1$. В такому випадку підінтегральний вираз можна перетворити так:

$$\sin^m x\cos^n xdx=\sin^m x\cos^{2k+1}xdx=\sin^m x\cos^{2k}xdx=\sin^m x\left(1-\sin^2 x\right)^k\cos xdx$$

Застосовуємо підстановку $\sin x=u$, $\cos xdx=du$. Тоді питання зводиться до інтегрування суми степеневих функцій.

Приклад: Знайти невизначений інтеграл:

$$\int\sin^3 x\cos^2 xdx=\int\sin x\sin^2 x\cos^2 xdx=\int\sin x\left(1-\cos^2 x\right)\cos^2 xdx=\int\cos xd(\cos x)-$$
$$-\int\cos^4 xd(\cos x)=\frac{\cos^2 x}{2}-\frac{\cos^5 x}{5}+C.$$

Якщо ж обидва показника степеня парні числа, то користуються тригонометричними формулами пониження степеня:

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x);\ \cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x) \qquad (3)$$

П р и к л а д: Знайти невизначений інтеграл:

$$\int\sin^4 xdx=\frac{1}{4}\int\left(1-\cos^2 2x\right)^2dx=\frac{1}{4}\int dx-\frac{1}{4}\int\cos 2xdx+\frac{1}{4}\int\cos^2 2xdx=$$

$$=\frac{1}{4}x-\frac{1}{4\cdot 2}\sin 2x+\frac{1}{4}\int\frac{1}{2}(1+\cos 4x)dx=\frac{1}{4}x-\frac{1}{8}\sin 2x+\frac{1}{8}x+\frac{1}{32}\sin 4x+C.$$

Інтеграли виду $\int R(\sin^2 x, \cos^2 x)dx$:

При розв'язуванні інтегралів виду $\int R(\sin^2 x, \cos^2 x)dx$ необхідно застосовувати підстановку:

$$z = tgx,\ sin^2 x = \frac{z^2}{1+z^2},\ cos^2 x = \frac{1}{1+z^2};\ dx = \frac{dz}{1+z^2} \tag{4}$$

П р и к л а д: Знайти невизначений інтеграл: $\int \frac{dx}{4+5sin^2 x-3cosx}$

Використаємо підстановку $z = tgx$. Тоді:

$$\int \frac{dx}{4+5sin^2 x-3cos^2 x} = \int \frac{\frac{dz}{1+z^2}}{4+5\frac{z^2}{1+z^2}-3\frac{1}{1+z^2}} = \int \frac{\frac{dz}{1+z^2}}{\frac{4+4z^2-3+5z^2}{1+z^2}} = \int \frac{dz}{9z^2+1} =$$

$$= \frac{1}{3}arctr3z + C = \frac{1}{3}arctg(3tgx) + C.$$

Інтеграли виду $\int R(tgx, ctgx)dx$:

Даний інтеграл розв'язується за допомогою підстановки:

$$z = tgx,\ \frac{1}{z} = ctgx,\ dx = \frac{dz}{1+z^2} \tag{5}$$

і зводиться до інтегралу від дробово-раціональної функції.

П р и к л а д: Знайти невизначений інтеграл:

$$\int tg^2 x = \int z^2 \frac{dz}{1+z^2} = \int \frac{1+z^2-1}{1+z^2}dz = \int dz - \int \frac{dz}{1+z^2} = z - arctgz + C = tgx - x + C.$$

2. Інтегрування виразів, що містять в знаменнику квадратний тричлен.

Для знаходження інтегралів від функції, що містять квадратний тричлен, для перетворення їх до формул інтегрування необхідно спочатку виділити повний квадрат із квадратного тричлена, в результаті чого він перетвориться на квадратний двочлен.

П р и к л а д: Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{dx}{x^2+4x+8}$.

Виділимо із квадратного тричлена повний квадрат:

$x^2 + 4x + 8 = x^2 + 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2 - 2^2 + 8 = (x+2)^2 + 4 = (x+2)^2 + 2^2$. Тоді:

$$\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 8} = \int \frac{dx}{(x+2)^2 + 2^2} = \frac{1}{2} arctg \frac{x+2}{2} + C.$$

б) $\int \frac{dx}{\sqrt{2 - 6x - 9x^2}}$.

Виділимо із квадратного тричлена повний квадрат:

$2 - 6x - 9x^2 = -(9x^2 + 6x - 2) = -((3x)^2 + 2 \cdot 3x + 1 - 1 - 2) = -(3x+1)^2 + 3 =$
$= \sqrt{3}^2 - (3x+1)^2$. Тоді:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2 - 6x - 9x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\sqrt{3}^2 - (3x+1)^2}} = \frac{1}{3} arcsin \frac{3x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

3. Інтегрування раціональних дробів.

Озн. 1: Алгебраїчний раціональний дріб − це дріб виду $\frac{R_n(x)}{S_m(x)}$, де $R_n(x)$ і $S_m(x)$ є многочленами виду:

$$R_n(x) = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \ldots + A_1 x + A_0 \text{ і } S_m(x) = B_m x^m + B_{m-1} x^{m-1} + \ldots + B_1 x + B_0.$$

В цих многочленах степені n та m − цілі числа. Якщо хоч одне з них буде дробовим, то дріб буде ірраціональним. Якщо $n < m$, то дріб буде правильним, а якщо $n \geq m$, то неправильним. Якщо дріб неправильний, то шляхом ділення чисельника на знаменник виділяємо цілу частину і отримуємо правильний дріб (наприклад, для числового дробу $\frac{17}{3} = \frac{15+2}{3} = 5 + \frac{2}{3}$). Для неправильного функціонального дробу після ділення одержимо:

$$\frac{R_n(x)}{S_m(x)} = P_{n-m}(x) + \frac{W_k(x)}{S_m(x)}, \tag{6}$$

де $P_{n-m}(x)$ та $W_k(x)$ − правильні многочлени.

Таким чином, інтегрування неправильного дробу зводиться до інтегрування многочлена $P_{n-m}(x)$ та правильного дробу $\frac{W_k(x)}{S_m(x)}$.

Розглянемо правильний дріб $\dfrac{f_i(x)}{x^2+px+q}$, чисельник якого – многочлен виду $Ax+B$ (степінь чисельника обов'язково менший степеня знаменника не менше, ніж на одиницю).

Враховуючи, що інтеграл від суми функцій дорівнює сумі інтегралів від кожної з них, розкладання правильного дробу на складові приводить до знаходження наступних інтегралів:

$$1)\ \int\frac{kdx}{x-a};\qquad 2)\int\frac{k\cdot dx}{(x-a)^n};\qquad 3)\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx.$$

Відомо, що $\int\frac{k\cdot dx}{x-a}=k\int\frac{dx}{x-a}=\left|\begin{matrix}x-a=t\\dx=dt\end{matrix}\right|=k\int\frac{dt}{t}=k\cdot\ln t+C=k\cdot\ln(x-a)+C$.

Також відомо, що

$$\int\frac{k\cdot dx}{(x-a)^n}=k\int\frac{dx}{(x-a)^n}=k\int(x-a)^{-n}dx=\left|\begin{matrix}x-a=t\\dx-dt\end{matrix}\right|=k\int t^{-n}dt=\ k\cdot\frac{t^{-n+1}}{-n+1}+C=$$

$$=k\cdot\frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1}+C=\frac{k}{-n+1}\cdot\frac{1}{(x-a)^{n-1}}+C.$$

Розглянемо інтеграл третього типу: $\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx.$

Відомо, що $\int\frac{dx}{x}=\ln x+C.$

Тоді: $\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\left|\begin{matrix}f(x)=t\\f'(x)dx=dt\end{matrix}\right|=\int\frac{dt}{t}=\ln t+C=\ln\ f(x)+C.$

З наведеного інтегралу робимо висновок: якщо підінтегральна функція є дробом, чисельник якого – похідна від знаменника, то такий інтеграл завжди буде дорівнювати натуральному логарифму знаменника.

Тому, якщо $Ax+B=(x^2+px+q)'$, то:

$$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=\int\frac{(x^2+px+q)'}{x^2+px+q}dx=\ln(x^2+px+q)+C.$$

П р и к л а д: Знайти невизначений інтеграл:

в) $\int \frac{2x-17}{(2x+5)(x-3)}dx$.

Нехай,

$$\frac{2x-17}{(2x+5)(x-3)} \equiv \frac{A}{2x+5}+\frac{B}{x-3}=\frac{A(x-3)+B(2x+5)}{(2x+5)(x-3)}=\frac{Ax-3A+2Bx+5B}{(2x+5)(x-3)}=$$

$$=\frac{(A+2B)x+(5B-3A)}{(2x+5)(x-3)} \Rightarrow \begin{cases} A+2B=2 \\ 5B-3A=-17 \end{cases}.$$

Розв'язавши отриману систему, маємо $A=4$, $B=-1$. Тобто дріб можна представити у вигляді суми дробів: $\frac{2x-17}{(2x+5)(x-3)}=\frac{4}{2x+5}+\frac{-1}{x-3}$. А заданий інтеграл у вигляді суми інтегралів:

$$\int \frac{2x-17}{(2x+5)(x-3)}dx=\int \frac{4dx}{2x+5}+\int \frac{-dx}{x-3}=4\int \frac{dx}{2x+5}-\int \frac{dx}{x-3}=\frac{4}{2}\ln|2x+5|-\ln|x-3|+\ln|C|=$$

$$=\ln|2x+5|^2-\ln|x-3|+\ln|C|=\ln\left|\frac{C(2x+5)^2}{x-3}\right|.$$