РОЗДІЛ 6. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

Лекція 14.

Тема: **Невизначений інтеграл.**

1. Невизначений інтеграл.

2. Основні методи інтегрування:

а) метод безпосереднього інтегрування;

б) метод заміни змінної;

в) інтегрування частинами.

1. Невизначений інтеграл.

Озн. 1: Знаходження функції $F(x)$ по відомому її диференціалу $dF(x)=f(x)dx$, тобто дія, обернена до диференціювання, називається інтегруванням, а шукана функція $F(x)$ – первісною функцією від заданої функції $f(x)$.

Будь-яка неперервна функція $f(x)$, має нескінченну множину різних первісних функцій, які відрізняються одна від другої сталим доданком: якщо $F(x)$ є первісна від $f(x)$, тобто якщо $F'(x)=f(x)$, то і $F(x)+C$, де C – довільна стала, є також первісна від функції $f(x)$, так як $(F(x)+C)'=F'(x)=f(x)$.

Озн. 2: Загальний вираз $F(x)+C$ сукупності всіх первісних від функцій $f(x)$ називається невизначеним інтегралом від цієї функції і позначається:

$$\int f(x)dx=F(x)+C \tag{1}$$

Властивості невизначеного інтеграла:

1. $\left(\int f(x)dx\right)'_x=f(x)$;

2. $\int F'(x)dx=F(x)+C$;

3. $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$, тобто сталий множник можна винести за знак інтеграла.

4. $\int (f_1(x)+f_2(x)-f_3(x))dx=\int f_1(x)dx+\int f_2(x)dx-\int f_3(x)dx$, тобто інтеграл від алгебраїчної суми дорівнює алгебраїчній сумі всіх доданків.

5. $\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k} \cdot F(kx+b)$.

Запишемо основні формули інтегрування:

1. $\int dx = x + C$

2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C;\ (n \neq -1)$

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$

4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

5. $\int e^x dx = e^x + C$

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

7. $\int \cos x dx = \sin x + C$

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$

9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$

10. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg\ \frac{x}{a} + C$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a - x^2}} = \arcsin\ \frac{x}{a} + C$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left| v + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$

13. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$

14. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$

П р и к л а д: Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \left(5x^3 - \frac{1}{4}x^4 + 2x - 1\right)dx$; б) $\int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^5} - \frac{7}{x^3})dx$; в) $\int \cos(9x-4)dx$;

г) $\int \frac{\ln x}{x} dx$; д) $\int \ln x \cdot dx$.

а) Метод безпосереднього інтегрування.

Даний метод полягає в тому, що для знаходження інтеграла ми безпосередньо користуємося формулами інтегрування.

Приклад: Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \left(5x^3 - \frac{1}{4}x^4 + 2x - 1\right)dx$; б) $\int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^5} - \frac{7}{x^3})dx$;

Розв'язання: Для знаходження невизначеного інтегралу користуємося таблицею інтегралів.

а) $\int\left(5x^3-\frac{1}{4}x^4+2x-1\right)dx=5\int x^3dx-\frac{1}{4}\int x^4dx+2\int xdx-\int dx=$

$$=\frac{5x^{3+1}}{3+1}-\frac{x^{4+1}}{4(4+1)}+\frac{2x^{1+1}}{1+1}-x+C=\frac{5x^4}{4}-\frac{x^5}{20}+x^2-x+C.$$

б) $\int(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^5}-\frac{7}{x^3})dx=\int\sqrt{x}dx+\int\sqrt[3]{x^5}dx-\int\frac{7}{x^3}dx=\int x^{\frac{1}{2}}dx+\int x^{\frac{5}{3}}dx-7\int x^{-3}dx=$

$$=\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+\frac{x^{\frac{5}{3}+1}}{\frac{5}{3}+1}-7\int x^{-3}dx=\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+\frac{x^{\frac{5}{3}+1}}{\frac{5}{3}+1}-7\cdot\frac{x^{-3+1}}{-3+1}+C=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+\frac{x^{\frac{8}{3}}}{\frac{8}{3}}-7\frac{x^{-2}}{-2}+C=$$

$$7\cdot\frac{x^{-2}}{-2}+C=\frac{2}{3}\cdot\sqrt{x^3}+\frac{3}{8}\cdot\sqrt[3]{x^8}+\frac{7}{2}\cdot\frac{1}{x^2}+C.$$

б) Метод заміни змінної (підстановки).

Якщо заданий інтеграл $\int f(x)dx$ не може бути знайдений безпосередньо за основними формулами, то введення нової незалежної змінної в багатьох випадках вдається перетворити підінтегральний вираз $\int f(x)dx$ в легко інтегрований. При цьому інтеграл зводиться до табличного або до такого, спосіб обчислення якого відомо. Заміна змінної інтегрування і складає суть методу, що називається методом підстановки.

П р и к л а д: Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int\cos(9x-4)dx$; б) $\int\frac{\ln x}{x}dx$;

Розв'язання:

а) $\int\cos(9x-4)dx=\begin{vmatrix}9x-4=t\\9dx=dt\\dx=\frac{1}{9}dt\end{vmatrix}=\int\cos t\cdot\frac{1}{9}dt=\frac{1}{9}\int\cos t\cdot dt=\frac{1}{9}\sin t+C=$

$$=\frac{1}{9}\sin(9x-4)+C.$$

б) $\int \frac{\ln x}{x} dx = \left| \ln x = t \Rightarrow \frac{dx}{x} = dt \right| \Rightarrow \int t \cdot dt = \frac{1}{2} t^2 + C = \frac{1}{2} \ln^2 x + C.$

в) Інтегрування частинами.

Із формули диференціала добутку $d(uv) = duv + udv$ інтегруванням обох частин рівності одержується формула інтегрування частинами:

$$\int udv = uv - \int vdu \qquad (1)$$

За цією формулою знаходження інтеграла $\int udv$ зводиться до знаходиться іншого інтеграла $\int vdu$. Застосовувати цю формулу зручно у тих випадках, коли $\int vdu$ буде легко знаходитися. Для застосування формули інтегрування частинами необхідно підінтегральний вираз представити у вигляді добутку двох співмножників u та dv. За dv завжди вибирають такий вираз, що містить dx, із якого інтегруванням можна знайти v. За u в більшості випадків приймається функція, яка при диференціюванні спрощується.

П р и к л а д: Знайти невизначений інтеграл:

$$\int \ln x dx = \left| \begin{matrix} \ln x = u; \frac{dx}{x} = du \\ dx = dv; x = v \end{matrix} \right| = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \cdot dx = x \ln x - \int dx + C = x \cdot \ln x - x + C.$$