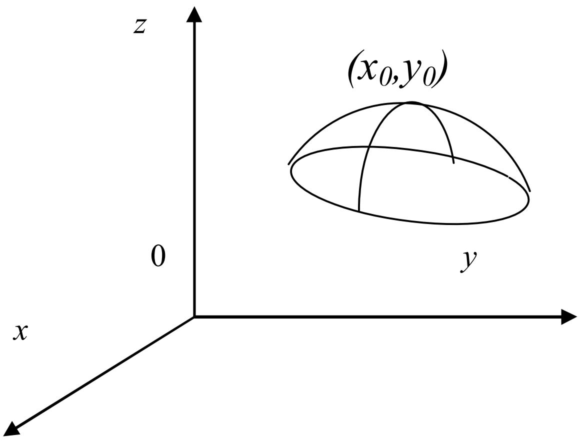
Лекція 13.

Тема: Аналіз функції двох змінних.

1. Дослідження функції двох змінних на екстремум.
2. Дослідження функції двох змінних на умовний екстремум.

1. Дослідження функції двох змінних на екстремум.

Неперервна функція $z = f(x, y)$ може мати в області завдання $\begin{pmatrix} x \in [a; b] \\ y \in [c; d] \end{pmatrix}$ максимум і мінімум.



Якщо існує деякий окіл точки $(x_0; y_0)$, в якому функція буде мати найбільше значення тільки в точці $(x_0; y_0)$, а у всіх інших точках її значення менші, то в точці $(x_0; y_0)$ функція має максимум. Якщо ж значення функції в цій точці будуть меншими, ніж у всіх інших точках околу, то будемо мати мінімум. Точки максимума та мінімума – це точки екстремуму.

В точках максимуму та мінімуму дотичні, паралельні осям ox та oy, будуть паралельні площині xOy, тому $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ і $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$. Точки, в яких частинні похідні дорівнюють нулю, називаються стаціонарними. Отже, якщо є максимум чи мінімум, то обов’язково частинні похідні дорівнюють нулю. Але обернене ствердження може бути неправильним. Наприклад, якщо проекція поверхні на площину xOz дає максимум ($\frac{\partial z}{\partial x} = 0$), а проекція на площину yOz дає мінімум ($\frac{\partial z}{\partial y} = 0$), то в точці $(x_0; y_0)$ немає ні максимуму, ні мінімуму, хоч обидві похідні дорівнюють нулю (в цьому випадку “стала” точка $(x_0; y_0)$ носить назву мінімакс). Тому умова $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ і $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ є тільки необхідною умовою.

Якщо $z = f(x,y)$ має неперервні похідні першого та другого порядків, то можемо знайти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ і ввести позначення: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = A$ в точці $(x_0; y_0)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = B$ в точці $(x_0; y_0)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = C$ в точці $(x_0; y_0)$.

Обчислимо визначник $\Delta = AC - B^2$. Якщо

1). $\Delta < 0$, то функція в точці $(x_0; y_0)$ екстремуму не має.

2). $\Delta > 0$, то екстремум існує, причому це максимум, якщо $A < 0$, і мінімум, якщо $A > 0$.

3). $\Delta = 0$, то функція може мати екстремуми, а може їх не мати. В цьому випадку потрібні додаткові дослідження.

Вказані ствердження про знак та величину Δ називаються достатньою умовою.

<u>Приклад:</u> Дослідити на екстремум функцію

$$z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20.$$

Розв'язання:

Знаходимо частинні похідні функції:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y + 9;\ \frac{\partial z}{\partial y} = -x + 2y - 6.$$

Розглянемо систему двох рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} 2x - y + 9 = 0 \\ 2y - x - 6 = 0 \end{cases}.$$

Розв'язком цієї системи будуть числа $x = -4$, $y = 1$. Тобто критична точка має координати $M_0(-4;1)$.

Обчислимо частинні похідні другого порядку в точці M_0:

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{M_0(-1;4)} = 2;\ C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big|_{M_0(-1;4)} = 2;\ B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\Big|_{M_0(-1;4)} = -1.$$

Тоді: $\Delta = A \cdot C - B^2 = 4 - 1 = 3$>0. Так як A>0, то існує мінімум функції в точці $M_0(-4;1)$, $z_{\min} = z(-4;1) = -1$.

Якщо для функції $z = f(x;y)$ в точці $(x_0;y_0)$ виконується умова:

$$\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$$, то точка $(x_0;y_0)$ називається особливою точкою.

Якщо ця точка перетворює функцію в нуль, але на кривій не лежить, то вона називається ізольованою точкою.

Умова $f(x,y) = 0$ фактично перетворює функцію двох змінних в функцію однієї змінної в неявному вигляді, а особливі точки знаходимо з наслідків теорії функцій двох змінних (неявна функція $f(x,y) = 0$ є частковим випадком функції двох змінних $z = f(x,y)$, коли $z = 0$).

<u>Приклад:</u> дослідити функцію $y^2 - x(x-2)^2 = 0$.

Функція має неявний вигляд, тобто $z = 0$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -1 \cdot (x-2)^2 - x \cdot 2(x-2) \cdot 1 = -(x-2)(3x-2). \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y.$$

Розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} y^2 - x(x-2)^2 = 0 \\ (x-2)(3x-2) = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{2}{3} \\ x = 2 \end{array}\right. \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Отримали особливу точку $(2;0)$.

2. Дослідження функції двох змінних на умовний екстремум.

Важливими є задачі на умовний екстремум, коли шукається екстремум функції $z = f(x;y)$ при умові, що змінні x та y зв'язані рівнянням зв'язку $\varphi(x;y) = 0$. Така задача зводиться на дослідження на безумовний екстремум функції Лагранжа $L = (x, y, \lambda)$.

$L = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$, де число λ називається множником Лагранжа.

Після виключення λ досліджуємо на екстремум функцію Лагранжа, як функцію двох змінних $L = (x, y)$

<u>Приклад:</u> Дослідити на умовний екстремум функцію $z = x^2 + y^2$, при $x + y = 1$.

Розв'язання:

Функція Лагранжа буде мати вигляд
$L = (x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 1)$.
Запишемо необхідні умови екстремуму:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x + \lambda = 0\,;\ \frac{\partial L}{\partial y} = 2y + \lambda = 0\,;\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x + y - 1 = 0\,.$$

Звідки отримуємо $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$. Тобто критична точка має координати $M_0\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $\lambda = -1$.

$L = (x, y) = x^2 + y^2 - (x + y - 1)$.

Тоді частинні похідні першого та другого порядку дорівнюють: $L'_x = 2x - 1$, $L'_y = 2y - 1$, $L''_{xx} = 2 = A$, $L''_{yy} = 2 = C$, $L''_{xy} = 0 = B$.

$\Delta = A \cdot C - B^2 = 4>0$. Так як A>0, то існує мінімум функції: $z_{\min} = z\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.