РОЗДІЛ 5. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Лекція 12.

Тема: **Частинні похідні функції багатьох змінних та їх застосування.**

1. Поняття функції декількох змінних.
2. Частинні похідні функції багатьох змінних.
3. Градієнт функції та похідна функції у напрямку вектора.
4. Застосування функції двох змінних до знаходження наближеного значення функції.

1. Поняття функції декількох змінних.

У функції однієї змінної $y = f(x)$ змінна x відіграє роль незалежної змінної, а змінна $y-$ залежна змінна. В реальності існують функції, коли незалежних змінних існує декілька, причому вони незалежні між собою, але їх зміна призводить до зміни залежної від них величини. Швидкість випаровування води залежить від температури повітря, вологості повітря, напрямку та сили вітру, степеня освітленості Сонцем тощо. Об'єм паралелепіпеда залежить від довжини, ширини та висоти сторін, а конуса – тільки від радіуса основи та висоти.

Ми будемо називати функцією декількох змінних таку функцію, у якої число незалежних змінних не менше двох. Отже, функція двох змінних $z = f(x, y)$ є найпростішим випадком функції декількох змінних.

Для будь-якої функції двох змінних можливо зробити графічну ілюстрацію. Графіком функції $z = f(x, y)$ називається геометричне місце точок (x, y, z) простору, у яких x та y належать множині точок площини $x0y$, а всі точки z функціонально залежні від x та y за законом $z = f(x, y)$. Графік функції може мати вигляд деякої поверхні. Але вже функції з числа незалежних змінних, що перевищує число 2 (трьох чотирьох і т.д. змінних), геометричного образу не мають. Не дивлячись на це, всі основні поняття та висновки теорії функції декількох змінних практично однакові і не залежать від числа змінних, тому вивчення таких функцій доцільно проводити саме на функціях двох змінних як на самому простому представнику групи.

1. Частинні похідні функції багатьох змінних.

Проілюструємо основні поняття і формули для функцій двох змінних, оскільки перехід до більшого числа змінних не викликає ніяких труднощів. Якщо $z = f(x, y)$, то частинні прирости за змінними x, y та повний приріст функції визначається за формулами:

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y);$$

$$\Delta_y z = f(x; y + \Delta y) - f(x, y);$$

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Якщо існує $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$, то ця границя називається частинною похідною функції $z = f(x, y)$ за змінною x і позначається одним із символів: $\frac{\partial z}{\partial x}$, z'_x. Аналогічно визначається частинна похідна за змінною y. Частинна похідна за однією із змінних знаходиться за правилами диференціювання функцій однієї змінної, при чому друга змінна залишається сталою.

П р и к л а д: Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ функцій:

а) $z = 4xy^3 + 2\sqrt{x}y^2 + 7y$; б) $z = e^x \cdot \sqrt{y}$; в) $z = \frac{\sqrt{x^2 + 3y}}{sinxy}$.

Розв'язання:

а) $z = 4xy^3 + 2\sqrt{x}y^2 + 7y$;

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4 \cdot 1 \cdot y^3 + 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot y^2 + 0 = 4y^3 + \frac{y^2}{\sqrt{x}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 4 \cdot x \cdot 3y^2 + 2\sqrt{x} \cdot 2y + 7 = 12xy^2 + 4y\sqrt{x} + 7.$$

б) $z = e^x \cdot \sqrt{y}$;

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^x \cdot \sqrt{y}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = e^x \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

в) $z=\dfrac{\sqrt{x^2+3y}}{sinxy}$;

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+3y}}\cdot sinxy-\sqrt{x^2+3y}\cdot ycosxy}{sin^2xy}=\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+3y}}\cdot sinxy-\sqrt{x^2+3y}\cdot ycosxy}{sin^2xy};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\frac{3}{2\sqrt{x^2+3y}}\cdot sinxy-\sqrt{x^2+3y}\cdot xcosxy}{sin^2xy}.$$

Озн. 1: Повним диференціалом функції двох змінних dz називається головна лінійна відносно Δx та Δy частина повного приросту функції, який обчислюється за формулою: $dz=\dfrac{\partial z}{\partial x}dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}dy$.

Озн. 2: Частинними похідними другого порядку від функції $z=f(x,y)$ називають частинні похідні від її перших похідних:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),\ \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right).$$

Останні дві називають мішаними і вони рівні між собою за умови їх неперервності.

Повний диференціал обчислюється за формулою:

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(dx)^2+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(dy)^2 \qquad (1)$$

П р и к л а д: Знайти похідну другого порядку функції

$$z=4x^5y^3+2y^2+3xy.$$

Розв'язання: Обчислимо похідні першого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=20x^4y^3+3y;\ \frac{\partial z}{\partial y}=12x^5y^2+4y+3x.$$

Обчислимо похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=80x^3y^3;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=24x^5y+4;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 60x^4 y^3 + 3.$$

Тоді повна похідна другого порядку:

$$d^2 z = \left(80x^3 y^3\right)d^2 x + 2\left(60x^4 y^3 + 3\right)dxdy + \left(24x^5 y + 4\right)d^2 y$$

3. Градієнт функції та похідна функції у напрямку вектора.

Озн. 3: Похідна $\frac{\partial z}{\partial l}$ функції $z = f(x, y)$ за напрямком $l(\cos\alpha, \sin\alpha)$ обчислюється за формулою:

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_A \cdot \cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_A \cdot \cos\beta \qquad (2)$$

Обчислення в точці *М (x; y)* дає швидкість зміни функції в напрямку в точці *М*.

Озн. 4: Вектор з координатами $\frac{\partial z}{\partial x}$; $\frac{\partial z}{\partial y}$ називається градієнтом функції в точці *М*, він напрямлений в сторону най скорішої зміни функції і позначається так: $\overline{gradz} = \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_A \cdot \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_A \cdot \vec{j}$. (3)

Геометрично рівняння $z = f(x, y)$ задає деяку поверхню. Щоб уявити собі вигляд поверхні перетнемо її площиною $z = C$, де *С* стала величина. Таке рівняння $f(x, y) = C$ задає в площині *ХОУ* криву, яка називається ізоквантою. Якщо на ізокванті взяти деяку точку *М* $(x_0; y_0)$, то вектор-градієнт в цій точці буде перпендикулярним до ізокванти.

П р и к л а д: Задано функцію $z = \frac{2x^2 - 3}{4y^3}$, точку *А (–1; 1)* і вектор $\vec{a}$ *(–12; –5)*. Знайти градієнт функції в точці *А* та похідну в точці *А* в напрямі вектора $\vec{a}$.

Розв'язання: Обчислимо частинні похідні функції в точці A_0:

$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2 \cdot 2x - 0}{4y^3} = \frac{4x}{4y^3} = \frac{x}{y^3}$; $\qquad \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{A(-1;1)} = \frac{-1}{1^3} = -1$;

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -3 \cdot \frac{2x^2 - 0}{4y^4} = \frac{6x^2}{4y^4} = \frac{3x^2}{2y^4}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{A(-1;1)} = \frac{3 \cdot (-1)^2}{2 \cdot 1^4} = \frac{3}{4}.$$

Тоді градієнт функції можна записати у вигляді: $\overline{gradz} = \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_A \cdot \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_A \cdot \vec{j}$.

Тобто: $\overline{gradz} = -1 \cdot \vec{i} + \frac{3}{4} \cdot \vec{j}$.

Для запису похідної в точці *A* в напрямі вектора $\vec{a}$ використаємо формулу: $\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_A \cdot \cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_A \cdot \cos\beta$.

Для цього зайдемо напрямлені косинуси:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^{\ 2} + a_y^{\ 2}}} = \frac{-12}{\sqrt{144+25}} = \frac{-12}{13}; \ \cos\beta = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^{\ 2} + a_y^{\ 2}}} = \frac{-5}{\sqrt{144+25}} = -\frac{5}{13}.$$

Тоді, $dz = -1 \cdot \left(-\frac{12}{13}\right) + \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{5}{13}\right) = \frac{12}{13} - \frac{15}{52} = \frac{48-15}{52} = \frac{33}{52}$.

Відповідь: $\overline{gradz} = -1 \cdot \vec{i} + \frac{3}{4} \cdot \vec{j}$; $dz = \frac{33}{52}$.

4. Застосування функції двох змінних до знаходження наближеного значення функції.

Враховуючи знання диференціалу функції однієї змінної та поняття функції двох змінних, запишемо формулу знаходження наближеного значення функції двох змінних:

$$z \approx z(x_0, y_0) + \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(x_0 y_0)} \cdot \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(x_0 y_0)} \cdot \Delta y \tag{4}$$

П р и к л а д: Для функції $z = 2x^2y^2 - 4\sqrt{x+y} + x^5y$ обчислити наближене значення в точці *A (–0,97; 2,09)* за допомогою диференціалу.

Розв'язання: Наближене значення функції $z = 2x^2y^2 - 4\sqrt{x+y} + x^5y$ при $x = -0{,}97$, $y = 2{,}09$ обчислимо за формулою

$$z \approx z(x_0, y_0) + \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(x_0 y_0)} \cdot \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(x_0 y_0)} \cdot \Delta y.$$

Нехай $x_0 = -1$, $y_0 = 2$, тоді:

$\Delta x = x - x_0 = -0{,}97 - (-1) = 0{,}03$; $\Delta y = y - y_0 = 2{,}09 - 2 = 0{,}09$.

Обчислимо значення функції в точці *A₀* з координатами $x_0 = -1$, $y_0 = 2$:

$z(x_0; y_0) = 2 \cdot (-1)^2 \cdot 2^2 - 4\sqrt{-1+2} + (-1)^5 \cdot 2 = 8 - 4 - 2 = 2$.

Обчислимо частинні похідні функції в точці A_0:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4xy^2 - \frac{4}{2\sqrt{x+y}} + 5x^4 y = 4xy^2 - \frac{2}{\sqrt{x+y}} + 5x^4 y;$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{A(-1;1)} = 4 \cdot (-1) \cdot 2^2 - \frac{2}{\sqrt{-1+2}} + 5 \cdot (-1)^4 \cdot 2 = -16 - 2 + 10 = = -8;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 4x^2 y - \frac{4}{2\sqrt{x+y}} + x^5 = 4x^2 y - \frac{2}{\sqrt{x+y}} + x^5;$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{A(-1;1)} = 4 \cdot (-1)^2 \cdot 2 - \frac{2}{\sqrt{-1+2}} + (-1)^5 = 8 - 2 - 1 = 5.$$

Тоді наближене значення функції:

$$z \approx z(x_0, y_0) + \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0 y_0)} \cdot \Delta x + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0 y_0)} \cdot \Delta y = 2 + (-8) \cdot 0{,}03 + 5 \cdot 0{,}09 = 2{,}21.$$

Відповідь: $z \approx 2{,}21$