ЗАВДАННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ
Варіант №1.

Завдання 1. Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ функцій:

а) $z = 4x^3y^2 - 12xy^3 - \sqrt{xy}$; б) $z = \sqrt{x^2 - xy^5}$.

Завдання 2. Для функції $z = x^2 + y^2 + xy$ обчислити наближене значення в точці *A (1,02; 1,95)* за допомогою диференціалу.

Завдання 3. Задано функцію $z = \ln x^3y^2$, точку *A (1; 1)* і вектор $\vec{a}(2;\ -1)$. Знайти градієнт функції в точці *A* та похідну в точці *A* в напрямі вектора $\vec{a}$.

Завдання 4. Для функції $y = \frac{1}{4}x^8 - x^2 + \sqrt{x}$ знайти первісну, графік якої проходить через точку *A (0; 3)*.

Завдання 5. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int(10x^2 + 2x + \frac{3}{x})dx$; б) $\int(\sqrt{x} + 4x^7 + \frac{4}{x^2})dx$; в) $\int\frac{x^4}{x^5+1}dx$; г) $\int xe^x dx$.

Завдання 6. За допомогою визначеного інтеграла знайти площу фігури обмежену лініями: $y = x^3$, $y = 1$; $y = 2$.

Завдання 7. Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь:

а) $\sqrt{xy}\,y' = y^2$; б) $xy' = y\ln\left(\frac{y}{x}\right)$.

Варіант №2.

Завдання 1. Знайти частинні похідні $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функцій:

а) $z = x^3 y + 2x^2 y^2 - \sqrt{x + y}$; б) $z = \dfrac{x}{y}$.

Завдання 2. Для функції $z = 2x^2 + y^2 + 3xy$ обчислити наближене значення в точці *А (1,96; -1,03)* за допомогою диференціалу.

Завдання 3. Задано функцію $z = \ln(x^3 + y^2)$, точку *А (1; 1)* і вектор $\vec{a}$ *(-2; 1)*. Знайти градієнт функції в точці *А* та похідну в точці *А* в напрямі вектора $\vec{a}$.

Завдання 4. Для функції $y = \dfrac{1}{2}x^7 - 3x^2 + \sqrt{x}$ знайти первісну, графік якої проходить через точку *А (0; -3)*.

Завдання 5. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int (10x + \dfrac{1}{7} + \cos x)dx$; б) $\int (\sqrt[4]{x} - \dfrac{1}{\sqrt[4]{x^{11}}})dx$; в) $\int \dfrac{e^x}{e^{2x} + 1}dx$; г) $\int x^2 \ln x dx$.

Завдання 6. За допомогою визначеного інтеграла знайти площу фігури обмежену лініями: $y = \sqrt{x}$, $x = 1$; $x = 9$.

Завдання 7. Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь:

а) $\sqrt{x^3}\, y' = y^2 x$; б) $xy' + y - 3 = 0$.

Варіант №3.

Завдання 1. Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ функцій:

а) $z = 3x^2y^3 + 2x^3y^2 + \sqrt{2x}$; б) $z = \frac{xy}{x^2 + y}$.

Завдання 2. Для функції $z = x^2 - 5y + 3xy$ обчислити наближене значення в точці *A (3,95; 1,03)* за допомогою диференціалу.

Завдання 3. Задано функцію $z = \arccos\left(\frac{x}{y^2}\right)$, точку *A (1; 2)* і вектор $\vec{a}$ *(12; 5)*. Знайти градієнт функції в точці *A* та похідну в точці *A* в напрямі вектора $\vec{a}$.

Завдання 4. Для функції $y = \frac{1}{3x^2} - 3x^5 + \sqrt{x+1}$ знайти первісну, графік якої проходить через точку *A (1; -2)*.

Завдання 5. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int(\frac{1}{5}x + 5 + \cos x)dx$; б) $\int(7x^2 + \frac{1}{\sqrt[4]{x^5}} + 6)dx$; в) $\int x^2\sqrt{x^3 - 4}dx$; г) $\int x\cos x dx$.

Завдання 6. За допомогою визначеного інтеграла знайти площу фігури обмежену лініями: $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$.

Завдання 7. Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь:

а) $\sqrt[3]{x}y' = y^2$; б) $x^2y' + y^2 - 2xy = 0$.

Варіант №4.

Завдання 1. Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ функцій:

а) $z = 4x^4y^3 + \frac{1}{2}x^3y^2 + \sqrt{3+y}$; б) $z = \frac{\ln y}{x+y}$.

Завдання 2. Для функції $z = 4x^3 - 5y\sqrt{x} + 3xy^3$ обчислити наближене значення в точці *A (-2,97; 1,01)* за допомогою диференціалу.

Завдання 3. Задано функцію $z = arctg\left(\frac{x^2}{y}\right)$, точку *A (1; 2)* і вектор $\vec{a}$ *(12; 5)*. Знайти градієнт функції в точці *A* та похідну в точці *A* в напрямі вектора $\vec{a}$.

Завдання 4. Для функції $y = \frac{1}{3x^4} - 2x^4 + \sqrt{x-1}$ знайти первісну, графік якої проходить через точку *A (2; -2)*.

Завдання 5. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int(10x^5 - x + \frac{3}{x})dx$; б) $\int(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^5}})dx$; в) $\int\frac{1}{x\ln x}dx$; г) $\int xsinxdx$.

Завдання 6. За допомогою визначеного інтеграла знайти площу фігури обмежену лініями: $y = x^4$, $y = x$.

Завдання 7. Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь:

а) $\sqrt[3]{x}y' = \sqrt[4]{y}x$; б) $xy' = y\left(1 + \ln\frac{y}{x}\right)$.

Варіант №5.

Завдання 1. Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ функцій:

а) $z = x^4 y^3 + xy^2 + \cos x$; б) $z = \frac{\ln y}{xy}$.

Завдання 2. Для функції $z = 4x - 5\sqrt{xy} + 2x^2 y^3$ обчислити наближене значення в точці *A (-2,97; 1,01)* за допомогою диференціалу.

Завдання 3. Задано функцію $z = \ln(3x^2 + 4y^2)$, точку *A (1; 3)* і вектор $\vec{a}$ *(3; 4)*. Знайти градієнт функції в точці *A* та похідну в точці *A* в напрямі вектора $\vec{a}$.

Завдання 4. Для функції $y = \frac{2}{\sqrt{x}} - 3x^2 + \sqrt{x+1}$ знайти первісну, графік якої проходить через точку *A (0; 5)*.

Завдання 5. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int (3x^2 + 4x + \frac{5}{x})dx$; б) $\int (\sqrt[7]{x} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^8}})dx$; в) $\int \frac{e^x}{e^x + 1}dx$; г) . $\int x^2 sinxdx$.

Завдання 6. За допомогою визначеного інтеграла знайти площу фігури обмежену лініями: $y = x^2$, $y = x$.

Завдання 7. Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь:

а) $y' = y\sqrt[3]{xy^2}$; б) $y' - y = 2x - 3$.

Варіант №6.

Завдання 1. Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ функцій:

а) $z = xy^3 + x^{10}y^2 + sinx$; б) $z = \frac{\ln y}{\sqrt{x}}$.

Завдання 2. Для функції $z = 4xy - 2\sqrt{x+y} + 2xy^3$ обчислити наближене значення в точці *A (2,94; 1,02)* за допомогою диференціалу.

Завдання 3. Задано функцію $z = \ln(3x + y^2)$, точку *A (2; 3)* і вектор $\vec{a}$ *(3; -4)*. Знайти градієнт функції в точці *A* та похідну в точці *A* в напрямі вектора $\vec{a}$.

Завдання 4. Для функції $y = \frac{2}{\sqrt{x}} - 3x^2 + \sqrt{x+1}$ знайти первісну, графік якої проходить через точку *A (0; 5)*.

Завдання 5. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int (10x^4 + 12x + \sin x)dx$; б) $\int (\sqrt[9]{x} - \frac{1}{\sqrt[5]{x^{12}}})dx$; в) $\int \frac{\ln^2 x}{x}dx$; г) $\int x^2 cosxdx$.

Завдання 6. За допомогою визначеного інтеграла знайти площу фігури обмежену лініями: $y = x^2 - 4$, $y = 1$.

Завдання 7. Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь:

а) $y' = y\sqrt[4]{xy}$; б) $y' - 7y = 8e^{3x}$.

Варіант №7.

Завдання 1. Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ функцій:

а) $z = \ln y^3 + xy^2 + sinx$; б) $z = \frac{cosx}{\sqrt{y}}$.

Завдання 2. Для функції $z = 4x^6 y - 2\sqrt{y} + 2xy^3$ обчислити наближене значення в точці *A (0,94; 1,02)* за допомогою диференціалу.

Завдання 3. Задано функцію $z = \frac{3x}{y^2}$, точку *A (3; 4)* і вектор $\vec{a}$ *(6; 8)*. Знайти градієнт функції в точці *A* та похідну в точці *A* в напрямі вектора $\vec{a}$.

Завдання 4. Для функції $y = \frac{2}{\sqrt{x+1}} - 3x^2 + x + 2$ знайти первісну, графік якої проходить через точку *A (3; 5)*.

Завдання 5. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int (4x^3 + 2x^2 + \frac{1}{x})dx$; б) $\int (\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt[5]{x^6}})dx$; в) $\int \frac{1}{x\ln^2 x}dx$; г) $\int \frac{x}{\sin^2 x}dx$.

Завдання 6. За допомогою визначеного інтеграла знайти площу фігури обмежену лініями: $y = x^2 - 4x$, $y = 0$.

Завдання 7. Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь: а) $y' = \sqrt[3]{x^5 y^2}$; б) $xy' + y = x^3$.

Варіант №8.

Завдання 1. Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ функцій:

а) $z = \ln^2 y + x^4 y^2 + siny$; б) $z = \frac{arccosx}{\sqrt{y}}$.

Завдання 2. Для функції $z = 4x^6 y^3 - 2\sqrt{x} + 2xy$ обчислити наближене значення в точці *A (0,94; 1,02)* за допомогою диференціалу.

Завдання 3. Задано функцію $z = \frac{2x^3}{y^2}$, точку *A (1; 4)* і вектор $\vec{a}$ *(-6; 8)*. Знайти градієнт функції в точці *A* та похідну в точці *A* в напрямі вектора $\vec{a}$.

Завдання 4. Для функції $y = cosx - 3x^2 + x + 2$ знайти первісну, графік якої проходить через точку *A (0; 5)*.

Завдання 5. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int(\frac{1}{3}x^2 + 3x + \frac{4}{x})dx$; б) $\int(\sqrt[11]{x} - \frac{1}{\sqrt[5]{x^4}})dx$; в) $\int\frac{x^3}{x^4+1}dx$; г) $\int\frac{\ln x}{x^2}dx$.

Завдання 6. За допомогою визначеного інтеграла знайти площу фігури обмежену лініями: $y = \sqrt{x}$, $x = 0$; $x = 4$.

Завдання 7. Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь:

а) $y' = \sqrt[3]{x^8 y}$; б) $xyy' = y^2 + 2x^2$.

Варіант №9.

Завдання 1. Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ функцій:

а) $z = \log_3 y + 3xy^2 + 10x$; б) $z = \sqrt{x} \cdot \cos y$.

Завдання 2. Для функції $z = 2x^2y^3 - 3\sqrt{x+3} + 2y$ обчислити наближене значення в точці *A (0,94; -1,05)* за допомогою диференціалу.

Завдання 3. Задано функцію $z = \frac{\ln x}{y^2}$, точку *A (1; -2)* і вектор $\vec{a}(6;\ -8)$. Знайти градієнт функції в точці *A* та похідну в точці *A* в напрямі вектора $\vec{a}$.

Завдання 4. Для функції $y = \sin 2x - 3x^3 + x + 2$ знайти первісну, графік якої проходить через точку *A (0; 7)*.

Завдання 5. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int (2x^7 - \frac{1}{6}x^6 - 2)dx$; б) $\int (4\sqrt[7]{x^8} + \frac{1}{3x^3} + 2)dx$; в) $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x + 1}}dx$; г) $\int \sqrt{x}\ln x dx$.

Завдання 6. За допомогою визначеного інтеграла знайти площу фігури обмежену лініями: $y = x^3$ і $y = x$.

Завдання 7. Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь:

а) $y' = y\sqrt[4]{x^3 y}$; б) $y' = 4xy + x$.

Варіант №10.

Завдання 1. Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ функцій:

а) $z = 2\log_2 x + 3\sqrt{x}y^2 + 6y$; б) $z = \sqrt{x} \cdot \sin y$.

Завдання 2. Для функції $z = x^4 y^2 - 3\sqrt{y} + 2xy$ обчислити наближене значення в точці *A (-0,94; 1,05)* за допомогою диференціалу.

Завдання 3. Задано функцію $z = \frac{\ln x}{2y}$, точку *A (1; 2)* і вектор $\vec{a}$ *(6; 8)*. Знайти градієнт функції в точці *A* та похідну в точці *A* в напрямі вектора $\vec{a}$.

Завдання 4. Для функції $y = 4\sqrt{x} - 3x^2 + 2x + 1$ знайти первісну, графік якої проходить через точку *A (1; 4)*.

Завдання 5. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int(4x^2 - 7x + 2)dx$; б) $\int(3\sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{x^4} + 1)dx$; в) $\int\frac{\ln x}{x}dx$; г) $\int xe^x dx$.

Завдання 6. За допомогою визначеного інтеграла знайти площу фігури обмежену лініями: $y = x^2 - 4x + 4$, $y = 4$.

Завдання 7. Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь:

а) $y' = y\sqrt[5]{x^3 y^2}$; б) $2xyy' = y^2 + x^2$.

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

Завдання 1. Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ функцій:

а) $z = 4xy^3 + 2\sqrt{x}y^2 + 7y$; б) $z = e^x \cdot \sqrt{y}$.

Розв'язання:

а) $z = 4xy^3 + 2\sqrt{x}y^2 + 7y$;

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4 \cdot 1 \cdot y^3 + 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot y^2 + 0 = 4y^3 + \frac{y^2}{\sqrt{x}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 4 \cdot x \cdot 3y^2 + 2\sqrt{x} \cdot 2y + 7 = 12xy^2 + 4y\sqrt{x} + 7.$$

б) $z = e^x \cdot \sqrt{y}$;

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^x \cdot \sqrt{y};\ \frac{\partial z}{\partial y} = e^x \cdot \sqrt{y} + e^x \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Завдання 2. Для функції $z = 2x^2y^2 - 4\sqrt{x+y} + x^5y$ обчислити наближене значення в точці *A (-0,97; 2,09)* за допомогою диференціалу.

Розв'язання:

Наближене значення функції $z = 2x^2y^2 - 4\sqrt{x+y} + x^5y$ при $x = -0{,}97$, $y = 2{,}09$ обчислимо за формулою $z \approx z(x_0, y_0) + \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(x_0 y_0)} \cdot \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(x_0 y_0)} \cdot \Delta y$.

Нехай $x_0 = -1$, $y_0 = 2$.

Тоді:

$\Delta x = x - x_0 = -0{,}97 - (-1) = 0{,}03$;

$\Delta y = y - y_0 = 2{,}09 - 2 = 0{,}09$.

Обчислимо значення функції в точці A_0 з координатами $x_0 = -1$, $y_0 = 2$:

$z(x_0; y_0) = 2\cdot(-1)^2\cdot 2^2 - 4\sqrt{-1+2} + (-1)^5\cdot 2 = 8 - 4 - 2 = 2$.

Обчислимо частинні похідні функції в точці A_0:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4xy^2 - \frac{4}{2\sqrt{x+y}} + 5x^4y = 4xy^2 - \frac{2}{\sqrt{x+y}} + 5x^4y;$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{A(-1;1)} = 4\cdot(-1)\cdot 2^2 - \frac{2}{\sqrt{-1+2}} + 5\cdot(-1)^4\cdot 2 = -16 - 2 + 10 =$$
$$= -8;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 4x^2y - \frac{4}{2\sqrt{x+y}} + x^5 = 4x^2y - \frac{2}{\sqrt{x+y}} + x^5;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{A(-1;1)} = 4\cdot(-1)^2\cdot 2 - \frac{2}{\sqrt{-1+2}} + (-1)^5 = 8 - 2 - 1 = 5.$$

Тоді наближене значення функції:

$$z \approx z(x_0, y_0) + \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(x_0 y_0)}\cdot\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(x_0 y_0)}\cdot\Delta y =$$
$$= 2 + (-8)\cdot 0{,}03 + 5\cdot 0{,}09 = 2{,}21.$$

Відповідь: $z \approx 2{,}21$

Завдання 3. Задано функцію $z=\dfrac{2x^2-3}{4y^3}$, точку *A (-1; 1)* і вектор $\vec{a}$*(-12; -5)*. Знайти градієнт функції в точці *A* та похідну в точці *A* в напрямі вектора $\vec{a}$.

Розв'язання:

Обчислимо частинні похідні функції в точці A_0:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2\cdot 2x-0}{4y^3}=\frac{4x}{4y^3}=\frac{x}{y^3};\ \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{A(-1;1)}=\frac{-1}{1^3}=-1;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-3\cdot\frac{2x^2-0}{4y^4}=\frac{6x^2}{4y^4}=\frac{3x^2}{2y^4};\ \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{A(-1;1)}=\frac{3\cdot(-1)^2}{2\cdot 1^4}=\frac{3}{4}.$$

Тоді градієнт функції можна записати у вигляді: $\overline{gradz}=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_A\cdot\vec{i}+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_A\cdot\vec{j}$. Тобто: $\overline{gradz}=-1\cdot\vec{i}+\frac{3}{4}\cdot\vec{j}$.

Для запису похідної в точці *A* в напрямі вектора $\vec{a}$ використаємо формулу: $dz=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_A\cdot\cos\alpha+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_A\cdot\cos\beta$.

Для цього зайдемо напрямлені косинуси:

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^{\ 2}+a_y^{\ 2}}}=\frac{-12}{\sqrt{144+25}}=\frac{-12}{13};$$

$$\cos\beta=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^{\ 2}+a_y^{\ 2}}}=\frac{-5}{\sqrt{144+25}}=-\frac{5}{13}.$$

Тоді,

$$dz=-1\cdot\left(-\frac{12}{13}\right)+\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{5}{13}\right)=\frac{12}{13}-\frac{15}{52}=\frac{48-15}{52}=\frac{33}{52}.$$

Відповідь: $\overline{gradz} = -1 \cdot \vec{i} + \frac{3}{4} \cdot \vec{j}$; $dz = \frac{33}{52}$.

Завдання 4. Для функції $y = 2\sqrt{x} + \frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{x} - 5$ знайти первісну, графік якої проходить через точку *A (1; 13)*.

Розв'язання:

Для функції $y = 2\sqrt{x} + \frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{x} - 5$ знайдемо сім'ю первісних:

$$У = 2 \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{x^{3+1}}{3+1} + \ln x - 5x + C = \frac{4\sqrt{x^3}}{3} + \frac{x^4}{12} + \ln x - 5x + C.$$

Підставимо в отриману рівність координати точки *A*:

$$13 = \frac{4\sqrt{1^3}}{3} + \frac{1^4}{12} + \ln 1 - 5 \cdot 1 + C \Rightarrow 13 = \frac{4}{3} + \frac{1}{12} - 5 + C \Rightarrow$$

$$13 = \frac{16 + 1 - 60}{12} + C \Rightarrow 13 = -\frac{43}{12} + C \Rightarrow 13 + \frac{43}{12} = C \Rightarrow C = 16\frac{7}{12}.$$

Отже, шукана первісна матиме вигляд:

$$У = \frac{4\sqrt{x^3}}{3} + \frac{x^4}{12} + \ln x - 5x + 16\frac{7}{12}.$$

Відповідь: $У = \frac{4\sqrt{x^3}}{3} + \frac{x^4}{12} + \ln x - 5x + 16\frac{7}{12}$.

Завдання 5: Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int (5x^3 - \frac{1}{4}x^4 + 2x - 1)dx$; б) $\int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^5} - \frac{7}{x^3})dx$;

в) $\int \cos(9x-4)dx$; г) $\int \frac{\ln x}{x}dx$;

д) $\int \ln x \cdot dx$.

Розв'язання:

Для знаходження невизначеного інтегралу користуємося таблицею інтегралів (Табл. 1 додатку).

$$а)\ \int (5x^3 - \frac{1}{4}x^4 + 2x - 1)dx = 5\int x^3dx - \frac{1}{4}\int x^4dx + 2\int xdx - \int dx =$$

$$= \frac{5x^{3+1}}{3+1} - \frac{x^{4+1}}{4(4+1)} + \frac{2x^{1+1}}{1+1} - x + C = \frac{5x^4}{4} - \frac{x^5}{20} + x^2 - x + C.$$

$$б)\ \int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^5} - \frac{7}{x^3})dx = \int \sqrt{x}dx + \int \sqrt[3]{x^5}dx - \int \frac{7}{x^3}dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx$$

$$+ \int x^{\frac{5}{3}}dx - 7\int x^{-3}dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{x^{\frac{5}{3}+1}}{\frac{5}{3}+1} - 7\int x^{-3}dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} +$$

$$+ \frac{x^{\frac{5}{3}+1}}{\frac{5}{3}+1} - 7\int x^{-3}dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{x^{\frac{5}{3}+1}}{\frac{5}{3}+1} - 7\cdot\frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C =$$

$$\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{8}{3}}}{\frac{8}{3}} - 7\frac{x^{-2}}{-2} + C = 7\frac{x^{-2}}{-2} + C = \frac{2}{3}\cdot\sqrt{x^3} + \frac{3}{8}\cdot\sqrt[3]{x^8} + \frac{7}{2}\cdot\frac{1}{x^2} + C.$$

в) $\int \cos(9x-4)dx = \left| \begin{matrix} 9x-4=t \\ 9dx=dt \\ dx=\frac{1}{9}dt \end{matrix} \right| = \int \cos t \cdot \frac{1}{9} =$

$= \frac{1}{9}\int \cos t \cdot dt = \frac{1}{9}\sin t + C = \frac{1}{9}\sin(9x-4) + C.$

(В даному випадку користувалися заміною змінної).

г) $\int \frac{\ln x}{x}dx = \left| \ln x = t \Rightarrow \frac{dx}{x} = dt \right| \Rightarrow \int t \cdot dt =$

$= \frac{1}{2}t^2 + C = \frac{1}{2}\ln^2 x + C.$

(В даному випадку користувалися заміною змінної).

д) $\int \ln x \cdot dx = \left| \begin{matrix} \ln x = u; \frac{dx}{x} = du \\ dx = dv; x = v \end{matrix} \right| = x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \cdot dx$

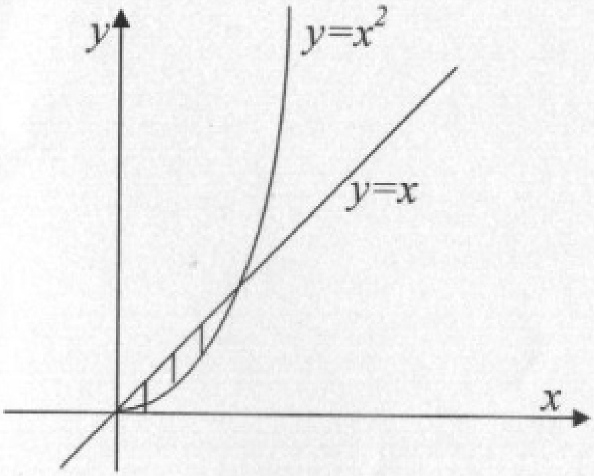
$x\ln x - \int dx + C = x \cdot \ln x - x + C.$

(В даному випадку користувалися формулою інтегрування "частинами": $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du.$*)*

Завдання №6. За допомогою визначеного інтеграла знайти площу фігури обмежену лініями $y = x^2$, $y = x$.

Розв'язання:

Побудуємо фігуру, площу якої необхідно знайти:



$$S = \int_0^1 x dx - \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \text{ кв.од.}$$

Відповідь: $S = \frac{1}{6}$ *кв.од.*

Завдання 7. Розв'язати диференціальні рівняння:

а) $\sqrt{x}y' = y^2x^3$.

Розв'язання:

$$\text{а) } \sqrt{x}\frac{dx}{dy} = y^2x^3,$$

$$\frac{\sqrt{x}}{x^3}dx = y^2 dy,$$

Дане рівняння є рівнянням з відокремленими змінними:

$$x^{-\frac{5}{2}}dx = y^2 dy,$$

$$\int x^{-\frac{5}{2}}dx = \int y^2 dy,$$

$$\frac{x^{-\frac{3}{2}}}{-\frac{3}{2}} + C = \frac{y^3}{3} \Rightarrow y = \sqrt[3]{C - \frac{2}{x\sqrt{x}}}.$$

Відповідь: $y = \sqrt[3]{C - \frac{2}{x\sqrt{x}}}$.

б) $y' = 2y + x$,

Дане рівняння є лінійним, так як y і y' у однаковому степені (першому). Тому скористаємося заміною $y = uv$ і $y' = u'v + uv'$. Тоді:

$$u'v + uv' = 2uv + x,$$
$$v(u' + 2u) = x - uv',$$
$$\begin{cases} u' + 2u + 0, \\ x - uv' = 0, \end{cases}$$

Розв'яжемо окремо перше рівняння системи:

$$u' + 2u = 0,$$

$$\frac{du}{dx} + 2u = 0, \left| \cdot \frac{dx}{u}, \right.$$

$$\frac{du}{u} + 2dx = 0,$$

$$\int \frac{du}{u} + 2\int dx = 0,$$

$$\ln u + 2x = 0 \Rightarrow u = e^{-2x}.$$

Отриманий вираз підставимо в друге рівняння системи:

$$x - uv' = 0 \Rightarrow x - e^{-2x}v' = 0,$$

$$x - e^{-2x} \cdot \frac{dv}{dx} = 0, \left| \cdot \frac{dx}{e^{-2x}}, \right.$$

$$xe^{2x}dx - dv = 0,$$

$$\int xe^{2x}dx - \int dv = 0,$$

Обчислимо частинами перший інтеграл:

$$\int xe^{2x}dx = \left| \begin{matrix} u = x & dv = e^{2x}dx \\ du = dx & \frac{e^{2x}}{2} = v \end{matrix} \right| = \frac{xe^{2^x}}{2} - \int \frac{e^2 x}{2} dx =$$

$$\frac{xe^{2^x}}{2} - \frac{e^{2^x}}{4} + C.$$

Тоді, $\frac{xe^{2^x}}{2} - \frac{e^{2^x}}{4} + C = v$.

З поставленої умови:

$y = uv = e^{-2x}(\frac{xe^{2^x}}{2} - \frac{e^{2^x}}{4} + C) = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} + \frac{C}{e^{2x}}$ – розв'язок диференціального рівняння.

Відповідь: $y = e^{-2x}(\frac{xe^{2^x}}{2} - \frac{e^{2^x}}{4} + C) = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} + \frac{C}{e^{2x}}$.