Лекція №8

Неперервна випадкова величина.

1. Поняття неперервної випадкової величини.

2. Інтегральна функція розподілу.

3. Диференціальна функція розподілу.

4.Числові характеристики дискретної випадкової величини та їх властивості:

а) математичне сподівання;

б) дисперсія;

в) середнє квадратичне відхилення.

1. Поняття неперервної випадкової величини.

Нехай точковий промінь лазерної указки хаотично рухається вздовж лінійки довжини l, не виключаючись і не виходячи за її межі. Випадкова величина $X-$ відстань початку лінійки до місцезнаходження променя. Зрозуміло, що ця відстань може змінюватись у межах від нуля (початок лінійки) до l (кінець лінійки) неперервним чином, проходячи через усі точки лінійки, яких безліч.

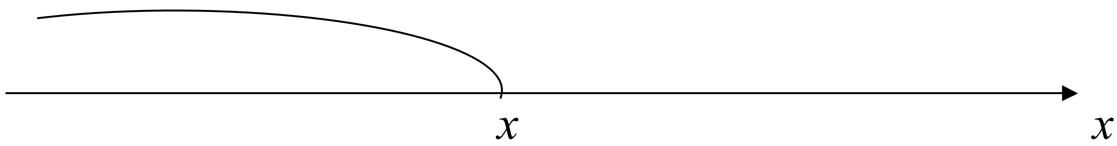
Оскільки промінь не виключається і не виходить за межі лінійки, то ймовірність знаходження променю на лінійці дорівнює одиниці (промінь на лінійці стовідсотково). За геометричним визначенням ймовірності ймовірність знаходження променю на половині лінійки дорівнює 0,5, на її четвертині 0,25, на десятині довжини 0,1. Отже, чим вужчий інтервал тим менша ймовірність знаходження променю на ньому. Якщо розмір інтервалу зменшити до розміру однієї точки (тобто до нуля, адже математична точка не має довжини), то ймовірність знаходження променю в цій точці дорівнює нулю. Цього ж результату можемо досягнути за класичним визначенням імовірності, згідно з яким необхідно поділити одну точку на всю безліч точок лінійки. Таким чином, приходимо до висновку: ймовірність появи будь-якого значення неперервної випадкової величини завжди дорівнює нулю. Тому задати функцію розподілу неперервної випадкової величини у вигляді таблиці всіх її значень (їх безмежна кількість) та їх імовірностей (всі їх значення нулі) просто неможливо.

Табличний спосіб є частковим способом завдання, який застосовується для дискретних випадкових величин.

2. Інтегральна функція розподілу.

Для створення загального способу завдання вводиться поняття інтегральної функції розподілу, яку ще просто називають функцією розподілу. Розглянемо деяку неперервну випадкову величину X, що змінюється по всій числовій осі (наприклад, всі дійсні числа). Виберемо деяке її значення x. Під інтегральною функцією розподілу $F(x)$ будемо розуміти ймовірність того, що випадкова величина в результаті досліду набуде значення, яке буде меншим від вибраного значення x.

Отже, $$F(x) = p(X < x). \quad (1)$$



З геометричної точки зору (рис.5.1) $F(x)$ − це ймовірність того, що випадкова величина матиме значення, яке зображується точкою, що лежить зліва від точки x. Імовірність, як відомо, змінюється в межах від 0 до 1, приймаючи в цьому інтервалі будь-які значення, тобто є величиною неперервною. Тому інтегральна $F(x)$ функція також є неперервною функцією. Таким чином, неперервна величина задається неперервною функцією розподілу.

Властивості функції розподілу:

1. Функція розподілу набуває значення в межах від 0 до 1 як імовірність.

2. Функція розподілу − не спадна функція:

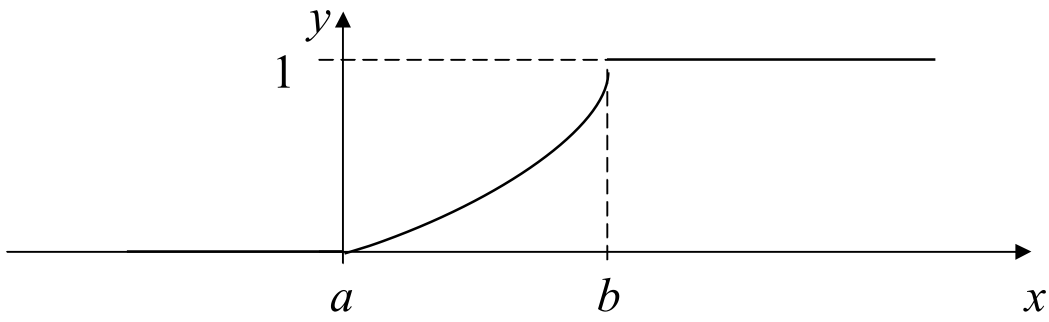
3. Імовірність набути визначене значення, як було встановлено раніше, завжди дорівнює нулю: $p(X = a) = 0$.

4. Якщо X задана на інтервалі (a, b), то $p(a \le X < b) = F(b) - F(a) = 1$.

Для заданої на $[a; b]$ випадкової величини $F(b < c) = 1$.

5. Якщо $X \in R$, то $F(-\infty)=0$, бо $X<-\infty$ є подією неможливою, а $F(+\infty)=1$, бо $X<+\infty$ − подією достовірною.

Виходячи з розглянутих властивостей, побудуємо загальний графік інтегральної функції розподілу заданої на $[a;b]$ випадкової величини.



3. Диференціальна функція розподілу.

Інтегральна функція розподілу є неперервною функцією, тому вона підлягає диференціюванню.

Озн. 1: Похідна від інтегральної функції розподілу називається інтегральною функцією розподілу або щільністю розподілу $f(x)$.

$$p(a<X<b)=\int_a^b f(x)dx. \qquad (2)$$

Властивості щільності розподілу:

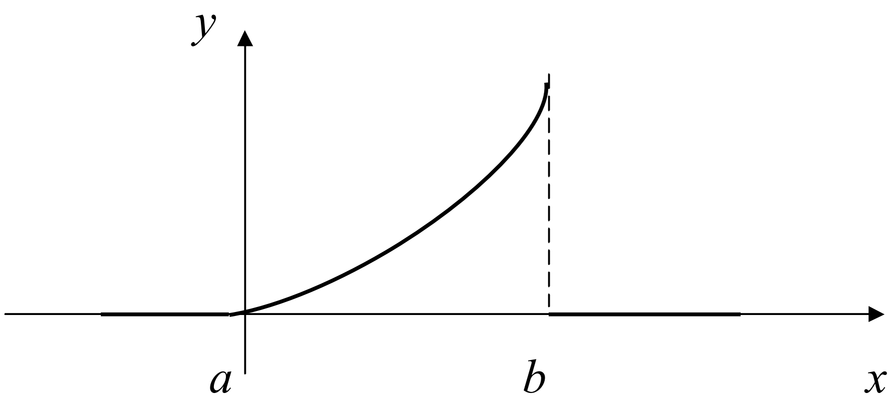
1. Щільність розподілу $f(x)$− функція невід'ємна як похідна від не спадної функції (див. геометричний зміст похідної), тобто $f(x)\geq 0$.

2. Інтегральна функція − це невласний інтеграл від щільності:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt \cdot \qquad (3)$$

3. Завжди справедливо: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$ за змістом імовірності достовірної події. Якщо межі завдання обмежені інтервалом $[a;b]$, то $\int_a^b f(x)dx=1$.

Використовуючи властивості, побудуємо загальний графік щільності розподілу заданої на $[a;b]$ випадкової величини.



Приклад 1. Задано диференціальний закон розподілу у вигляді:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x<0 \\ 2x & при \quad x\in[0;1]. \\ 0 & при \quad x>1 \end{cases}$$

Знайти інтегральну функцію розподілу та ймовірність попадання випадкової величини в інтервал $[0,5;1]$.

Розв'язання. Знаходимо інтегральну функцію: $F(x)=\int\limits_0^x 2tdt = t^2\Big|_0^x = x^2$.

Знаходимо ймовірність попадання випадкової величини в інтервал:

$$p(0,5<X<1)=\int\limits_{0,5}^{1} 2xdx = x^2\Big|_{0,5}^{1} = 1^2-0,5^2 = 0,75.$$

4. Числові характеристики неперервних випадкових величин.

Як і дискретна, так і неперервна випадкова величина має числові характеристики: математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$ та середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$.

Озн. 2: Математичним сподіванням неперервної випадкової величини, заданої на інтервалі $[a;b]$ називається визначений інтеграл:

$$M(X)=\int\limits_a^b xf(x)dx. \tag{4}$$

Озн. 3: Дисперсією неперервної випадкової величини називається математичне сподівання квадрата відхилення її значень від математичного сподівання:

$$D(X)=\int_a^b \left(x-M(X)\right)^2 dx=\int_a^b x^2 f(x)dx - M^2(X). \quad (5)$$

Озн. 4: Середнім квадратичним відхиленням називається величина, що знаходиться за формулою:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}. \quad (6)$$

<u>Приклад 2.</u> Закон розподілу неперервної випадкової величини має вигляд:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x<0 \\ Cx^3 & при \quad x\in[0;2]. \\ 0 & при \quad x>2 \end{cases}$$

Знайти:

а) при якому значенні C задана функція буде щільністю розподілу;

б) знайти інтегральну функцію розподілу;

в) знайти числові характеристики розподілу;

г) побудувати графіки диференціального та інтегрального розподілів.

<u>Розв'язання.</u>

а) Якщо $f(x)$ − функція розподілу, то $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$. За умовою функція задана на трьох інтервалах по-різному, тому за властивостями визначеного інтеграла маємо: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{0} f_1(x)dx+\int_0^2 f_2(x)dx+\int_2^{+\infty} f_3(x)dx=1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{0} 0\cdot dx+\int_0^2 Cx^3dx+\int_2^{\infty} 0\cdot dx=1 \Rightarrow 0+C\int_0^2 x^3dx+0=1 \Rightarrow \left.\frac{Cx^4}{4}\right|_0^2=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C(4-0)=1 \Rightarrow 4C=1 \Rightarrow C=0{,}25.$$

Отже, щільність розподілу буде:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x<0 \\ 0{,}25x^3 & при \quad x\in[0;2]. \\ 0 & при \quad x>2 \end{cases}$$

б) Знайдемо інтегральний закон розподілу:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{0} f_1(t)dt+\int_0^x f_2(t)dt=\int_{-\infty}^{0} 0\cdot dt+\int_0^x 0{,}25t^3dt=0+0{,}25\cdot\left.\frac{t^4}{4}\right|_0^x=\frac{x^4}{16}.$$

На краях інтервалу: $F(0)=\dfrac{0}{16}=0,\ F(2)=\dfrac{2^4}{16}=1$.

Інтегральна функція буде:

$$F(x)=\begin{cases}0 & при \quad x<0\\ \dfrac{x^4}{16} & при \quad x\in[0;2].\\ 1 & при \quad x>2\end{cases}$$

в) Знаходимо числові характеристики.

Математичне сподівання: $M(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{0}x\cdot 0\cdot dx+$

$$+\int\limits_{0}^{2}x\cdot 0{,}25x^3dx+\int\limits_{2}^{\infty}0\cdot dx=0{,}25\int\limits_{0}^{2}x^4dx=0{,}25\cdot\left.\frac{x^5}{5}\right|_0^2=\frac{1}{4}\cdot\frac{2^5}{5}=\frac{32}{20}=\frac{8}{5}.$$

Обчислимо дисперсію. Для цього знайдемо квадрат математичного сподівання:

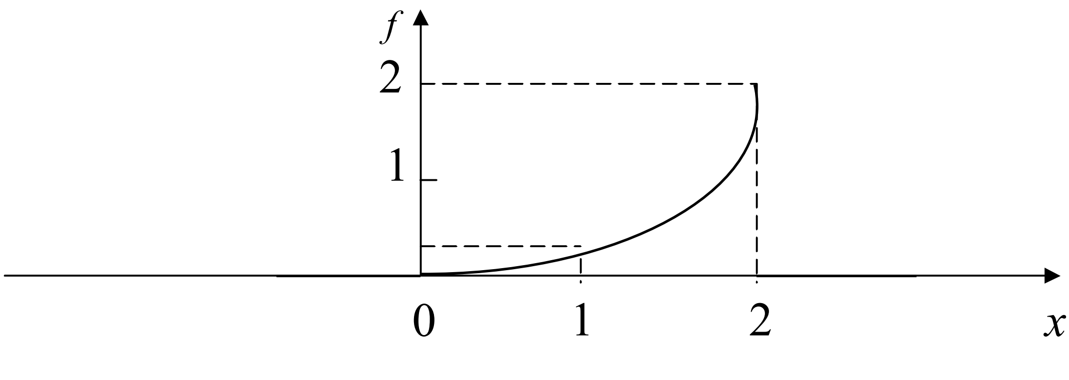
$$M(X^2)=\int\limits_{-\infty}^{0}x^2\cdot 0\cdot dx+\int\limits_{0}^{2}x^2\cdot 0{,}25x^3dx+\int\limits_{2}^{\infty}x^2\cdot 0\cdot dx=0{,}25\int\limits_{0}^{2}x^5dx=\frac{1}{4}\cdot\left.\frac{x^6}{6}\right|_0^2=\frac{2^6}{24}=\frac{8}{3}.$$

Дисперсія буде: $D(X)=M(X^2)-M^2(X)=\dfrac{8}{3}-\dfrac{8}{5}=\dfrac{16}{15}=1\dfrac{1}{15}$.

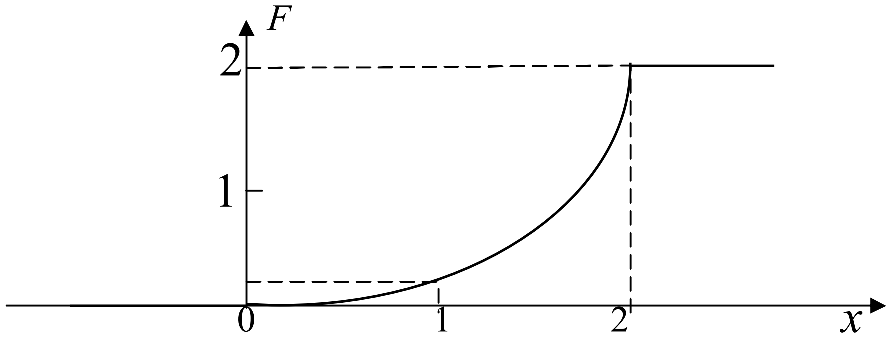
Середнє квадратичне відхилення: $\sigma(X)=\sqrt{\dfrac{16}{15}}=\dfrac{4\sqrt{15}}{15}\approx 1{,}033$.

г) Будуємо графіки розподілів:

Диференціальна функція розподілу:



Інтегральна функція розподілу:


F
2
1
0
1
2
x