Лекція №7

Дискретна випадкова величина.

1. Дискретні та неперервні величини.

2. Розподіл ймовірностей дискретних величин.

3. Числові характеристики дискретної випадкової величини та їх властивості:

а) математичне сподівання;

б) дисперсія;

в) середнє квадратичне відхилення.

**1. Дискретні та неперервні величини.**

Будь-яка змінна величина, незалежно від того, детермінована чи випадкова, може змінюватись лише двома способами: неперервно чи дискретно.

***Озн. 1***. Якщо між деякими двома значеннями змінної величини існує скінчена кількість значень, то вона називається дискретною. Наприклад, між двома натуральними числами 5 і 1 знаходиться лише три натуральних числа: 2, 3, 4. Тому множина натуральних чисел утворена дискретними величинами.

***Озн. 2***. Якщо між двома будь-якими значеннями змінної величини існує нескінчена кількість значень, то така змінна величина називається неперервною. Наприклад, між двома дійсними числами 1 і 5 існує безліч значень, цілих та дробових, раціональних та ірраціональних (наприклад, відоме число $\pi = 3{,}1415926...$). Отже, множина дійсних чисел утворена неперервними числами.

Випадкова величина позначається заголовними літерами $X, Y, Z$ тощо, а їх можливі значення відповідними прописними. Наприклад, випадкова величина $X$ приймає значення $x_1, x_2, x_3 ...$ .

Така випадкова величина, як кількість поросят, що народжуються при опоросі свиноматки, є натуральним числом, тобто дискретною величиною, а така випадкова величина, як врожайність пшениці (в центнерах з гектара), є величиною неперервною.

Будь-яка випадкова величина (дискретна чи неперервна) може мати як скінчену, так і нескінчену кількість членів.

**2. Розподіл ймовірностей дискретних величин.**

Дискретна величина вважається заданою, якщо відомі всі її значення та ймовірності появи кожного з них. Законом розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини називається відповідність між можливими її значеннями та їх ймовірностями. Цей закон досить часто називають розподілом і, як правило, задають у вигляді таблиці чи графіка. Закон розподілу ймовірності повністю характеризує випадкову величину.

Таблична форма завдання має вигляд:

| $X$ | $X_1$ | $X_2$ | … | $X_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | $P_1$ | $P_2$ | … | $P_n$ |

При чому $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Якщо сума ймовірностей менше одиниці, то це означає, що розглянуті не всі значення випадкової величини.

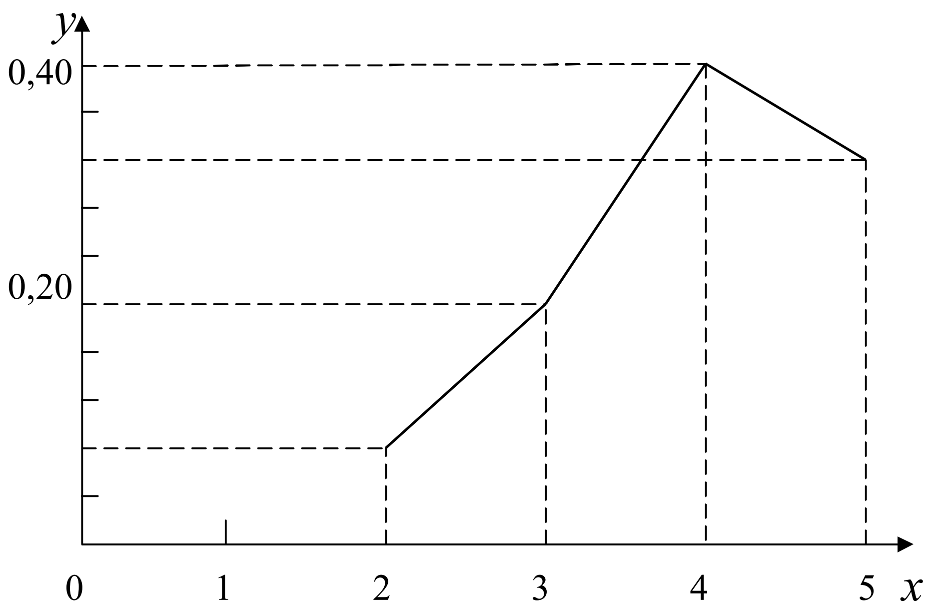
Графічна форма завдання називається многокутником розподілу.

Приклад 1. У групі з 25 чоловік 8 студентів підготовили по 100 % матеріалу, 10 студентів − по 80 %, 5 студентів − по 60 %, решта − по40 %. Скласти закон розподілу оцінок в групі.

Розв'язання: Підготовка 100 % матеріалу забезпечує студентові оцінку „відмінно”, 80 % „добре”, 60 % „задовільно”, 40 % „незадовільно”. Таким чином, така випадкова величина як оцінка , прийматиме значення: 5, 4, 3, 2. На відмінну оцінку підготувались 8 студентів з 25, тому $p = \frac{8}{25} = 0{,}32$; на оцінку „добре” підготувались 10 студентів, тому $p = \frac{10}{25} = 0{,}40$. Для оцінки „задовільно” $p = \frac{5}{25} = 0{,}20$, а для оцінки „незадовільно”: $p = \frac{2}{25} = 0{,}08$. Таблиця розподілу матиме вигляд:

| *X* | *2* | *3* | *4* | *5* |
|---|---|---|---|---|
| *P* | *0,08* | *0,20* | *0,40* | *0,32* |

Многокутник розподілу матиме вигляд:




**3. Числові характеристики дискретної випадкової величини:**

Будь-яка випадкова величина характеризується трьома числовими характеристиками: математичним сподіванням, дисперсією та середнім квадратичним відхиленням.

**а). Математичне сподівання**

Нехай випадкова величина задана у вигляді:

| $X$ | $X_1$ | $X_2$ | ... | $X_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | $P_1$ | $P_2$ | ... | $P_n$ |

***Озн. 3.*** Математичним сподіванням називається сума попарних добутків значень випадкової величини і ймовірностей їх появи.

До математичного сподівання прямують усі середні арифметичні значення.

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n . \qquad (1)$$

Приклад 2. З умови попереднього прикладу знайти математичне сподівання.

Розв’язання: Застосовуємо формулу (1) і знаходимо:

$M(X) = 2 \cdot 0{,}08 + 3 \cdot 0{,}20 + 4 \cdot 0{,}40 + 5 \cdot 0{,}32 = 0{,}16 + 0{,}60 + 1{,}60 + 1{,}60 = 3{,}96$.

Фактично знайдено середній бал успішності студентів.

**Властивості математичного сподівання**

1. Математичне сподівання сталої величини є величиною сталою:
2. Сталий множник можна винести за знак математичного сподівання:
3. Математичне сподівання суми та різниці взаємно незалежних випадкових величин дорівнює сумі математичних сподівань кожної з них.
4. Математичне сподівання добутку взаємно незалежних випадкових величин дорівнює добутку математичних сподівань цих величин.

**б). Дисперсія**

Знання тільки математичного сподівання не дає ніякої інформації про те, наскільки всі значення випадкової величини розкидані одне від другого. В ряді випадків інформація про розсіювання буває чи не важливішою від знання математичного сподівання. Наприклад, двоє спортсменів стріляють по мішені, роблячи кожен по 10 пострілів. Обидва набрали по 60 очок, але у першого з них кулі розкидані по всьому полю мішені, а у другого лежать купно біля шостого кола. Зрозуміло, що другий спортсмен стріляє краще, але у його рушниці зміщена мушка.

Випадкова величина $X$ приймає різноманітні значення, але математичне сподівання $M(X)$ є величиною сталою.

***Озн. 4:*** Величина, як $X - M(X)$ називається відхиленням.

Разом з тим, математичне сподівання відхилення кожного із значень від математичного сподівання завжди дорівнює нулю, тому що відхилення будуть як додатними, так і від'ємними. Отже, $M\left[X - M(X)\right] = 0$.

Піднесення розсіювання до квадрату дає можливість позбавитись від від'ємних значень і отримати ненульове значення математичного сподівання цієї величини.

***Озн. 5:*** Дисперсією називається математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини від її математичного сподівання.

$$D(X = \sum_{i=1}^{n} \left[x_i - M(X)\right]^2 \cdot p_i \qquad (2)$$

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) \qquad (3)$$

Приклад 3. В умовах попереднього прикладу та знайденого для нього в §2 значення математичного сподівання обчислити дисперсію.

Розв'язання: Усі значення оцінок − цілі і досить малі числа, тоді як математичне сподівання дробове, тому відхилення також будуть дробовими. Тому використаємо формулу (3), згідно з якою необхідно обчислити математичне сподівання квадратів випадкової величини. Для обчислення подовжимо таблицю розподілу:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *X* | *2* | *3* | *4* | *5* |
| *P* | *0,08* | *0,20* | *0,40* | *0,32* |
| *X²* | *4* | *9* | *16* | *25* |

Знаходимо $M(X^2)$: $M(X^2) = 4 \cdot 0{,}08 + 9 \cdot 0{,}20 + 16 \cdot 0{,}40 + 25 \cdot 0{,}32 = 16{,}52$

Знаходимо $M^2(X)$: $M^2(X) = 3{,}96^2 =$ $15{,}6816$. Тоді $D(X) = 16{,}52 - 15{,}6816 = 0{,}8384$.

***Властивості дисперсії***

1. Дисперсія сталої дорівнює нулю.
2. Дисперсія є невід'ємною величиною за визначенням її як математичного сподівання квадрата відхилення.
3. Сталий множник можна винести за знак дисперсії як його квадрат.
4. Дисперсія суми та різниці двох взаємно незалежних випадкових величин дорівнює сумі дисперсій кожної з них:
5. Дисперсія суми випадкової і сталої величин дорівнює дисперсії випадкової величини.
6. Дисперсія суми декількох взаємно незалежних випадкових величин дорівнює сумі дисперсій кожної з них.

**в). Середнє квадратичне відхилення**

Знаходження дисперсії дає змогу обчислити математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини, в зв'язку з чим розмірності випадкової величини та дисперсії будуть різними (наприклад, якщо $X$

вимірюється в метрах, то її дисперсія буде вимірюватись в квадратних метрах). Якщо є необхідність оцінювати розсіювання та випадкову величину однаковими величинами, вводять ще одну характеристику, яка називається середнім квадратичним відхиленням, позначається символом $\sigma(X)$ і визначається за формулою:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}\,. \tag{4}$$

***Властивості середнього квадратичного відхилення***

1. Середнє квадратичне відхилення є величиною невід'ємною.
2. Середнє квадратичне відхилення суми взаємонезалежних випадкових величин знаходиться як корінь квадратний з суми дисперсій кожної з величин:

Приклад 4. Знайти числові характеристики випадкової величини, розподіл якої задано у вигляді таблиці:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *X* | *30* | *32* | *35* | *40* |
| *P* | *0,1* | *0,5* | *0,2* | *0,2* |

Розв'язання: Знаходимо математичне сподівання:

$$M(X) = 30 \cdot 0{,}1 + 32 \cdot 0{,}5 + 35 \cdot 0{,}2 + 40 \cdot 0{,}2 = 3 + 16 + 7 + 8 = 34\,.$$

Знаходимо дисперсію:

$$D(X) = M(X - M(X))^2 =$$
$$= (30-34)^2 \cdot 0{,}1 + (32-34)^2 \cdot 0{,}5 + (35-34)^2 \cdot 0{,}2 + (40-34)^2 \cdot 0{,}2 = 11.$$

Перевіряємо правильність обчислення дисперсії, використовуючи формулу:

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = 30^2 \cdot 0{,}1 + 32^2 \cdot 0{,}5 + 35^2 \cdot 0{,}2 + 40^2 \cdot 0{,}2 - 34^2 = 11\,.$$

Знаходимо середнє квадратичне відхилення: $\sigma(X) = \sqrt{11} = 3{,}317$.

Д.з.: «Т. й.» Шевченко Р.Л., Ревицька У.С. Розділ IV. § 1–2.