Лекція №6

Повторні незалежні випробування

1. Локальна формула Лапласа.

2. Інтегральна формула Лапласа.

3. Приклади.

1. Локальна формула Лапласа

Введемо позначення : $\sqrt{npq} = \sigma$, $x = \dfrac{m - np}{\sigma}$, $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-0,5x^2}$.

Запишемо локальну формулу Лапласа:

$$p_n(m) = \frac{\varphi(x)}{\sigma}, \qquad (1)$$

Її ще називають асимптотичною формулою Лапласа, диференціальною формулою Лапласа та формулою Муавра-Лапласа.

Критерій застосування формули Лапласа: великі значення n для нерідкісних подій. Чим ближче значення p і q до 0,5, тим точніший результат обчислення.

Функція $\varphi(x)$ називається функцією ймовірності.

Властивості функції Лапласа $\varphi(x)$:

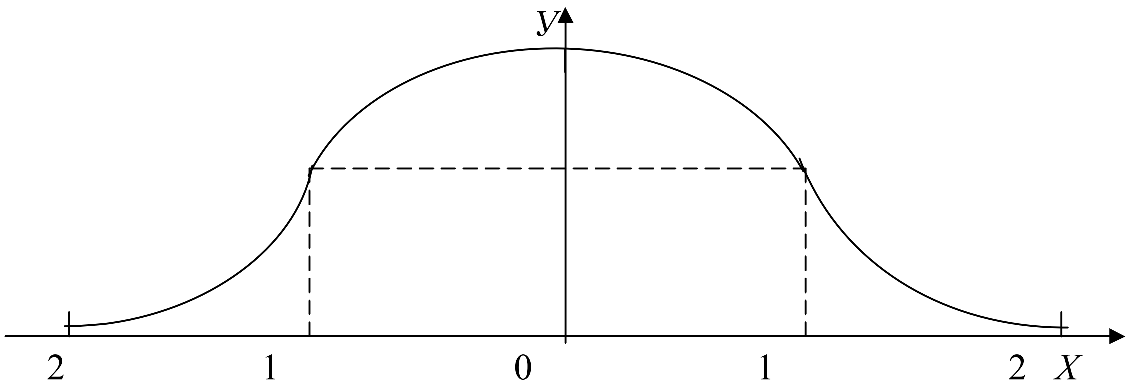
1. У функцію входить x^2, тому $\varphi(+x) = \varphi(-x)$, тобто функція парна і симетрична.

2. Для $x = 0$: $\varphi(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0,3989 \approx 0,4$. Це точка максимуму.

3. $\varphi(x)$ – показникова функція, завжди додатна і має горизонтальною асимптотою вісь абсцис.

Зобразимо графік функції $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2}$.

Значення функції Лапласа наведені в таблиці №2 (див. додаток).



Приклад 1. Ймовірність приживання саджанця p=0,9. Яка ймовірність того, що серед 600 саджанців приживеться рівно 530 саджанці.

Розв'язання:

а). Скористаємося локальною формулою Муавра-Лапласа:

$P_n(m) = \dfrac{\varphi(x)}{\sigma}$, де $\sigma = \sqrt{npq}$, $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x = \dfrac{m - np}{\sigma}$.

За умовою *n=600, m=530, p=0,9, q=1−p=1−0,9=0,1*.

Тоді, $x = \dfrac{530 - 600 \cdot 0{,}9}{\sqrt{600 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1}} = \dfrac{-10}{7{,}4} = -1{,}35$.

За таблицями знаходимо, $\varphi(-1{,}35) = \varphi(1{,}35) = 0{,}1604$.

Тоді, $P_{600}(530) = \dfrac{0{,}1604}{\sqrt{600 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1}} = 0{,}022$.

2. Інтегральна формула Лапласа

Введемо позначення :

$$\sqrt{npq} = \sigma,\ \alpha = \frac{m_1 - np}{\sigma},\ \beta = \frac{m_2 - np}{\sigma},\ \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{-0,5t^2} \cdot dt$$

Запишемо локальну формулу Лапласа:

$$p(m_1 < m < m_2) = \int_\alpha^\beta \varphi(x)dx = \Phi(x)\Big|_\alpha^\beta = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) \qquad (2)$$

Значення функції інтегральної функції Лапласа знаходять з таблиці 3 (див. додаток). Отже, ймовірність потрапляння величини в заданий інтервал обчислюється за формулою:

$$p(m_1 < m < m_2) = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) \qquad (3)$$

Формула (3) називається інтегральною формулою Лапласа.

Властивості функції $\Phi(x)$:

1. Функція $\Phi(x)$ є функцією неспадною.
2. Функція $\Phi(x)$ за властивостями визначеного інтеграла є функцією непарною, тобто $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

3. Якщо $x = -\infty$, то $\Phi(-\infty) = -\Phi(\infty) = -0{,}5$. Якщо $\alpha = -\infty, \beta = \infty$, то $\Phi(\infty) - \Phi(-\infty) = \Phi(\infty) + \Phi(\infty) = 0{,}5 + 0{,}5 = 1$.

Приклад 2. Ймовірність приживання саджанця p=0,9. Яка ймовірність того, що серед 600 саджанців приживеться від 350 до 520 саджанців?

Розв'язання:

б) Знайдемо ймовірність того, що серед 600 саджанців прийметься від 350 до 520 саджанців. Скористаємося інтегральною формулою Муавра-Лапласа:

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_\alpha^\beta \varphi(x)dx = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha),$$

де $\sigma = \sqrt{npq}$, $\alpha = \dfrac{m_1 - np}{\sigma}$, $\beta = \dfrac{m_2 - np}{\sigma}$.

За умовою $n=600$, $m_1=350$, $m_2=520$, $p=0{,}9$, $q=1-p=1-0{,}9=0{,}1$.

Тоді,

$$\alpha = \frac{350 - 600\cdot 0{,}9}{\sqrt{600\cdot 0{,}9\cdot 0{,}1}} = -\frac{190}{7{,}4} = -25{,}6; \ \beta = \frac{520 - 600\cdot 0{,}9}{\sqrt{600\cdot 0{,}9\cdot 0{,}1}} = \frac{20}{7{,}4} \approx 2{,}7$$

За таблицями знаходимо, $\Phi(\alpha) = \Phi(-25{,}6) = -0{,}5$; $\Phi(\beta) = \Phi(2{,}7) = 0{,}4950$.

Тоді, $P_n(350 \le m \le 520) = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = 0{,}4950 + 0{,}5 = 0{,}9950$.

3. Приклади.

Приклад 3. Для екзамену викладач запропонував 100 запитань. Ймовірність того, що студент знає відповідь дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що студент знає відповідь на:

а) рівно 82 запитання;

б) від 60 до 85 запитання?

Розв'язання:

а) Знайдемо ймовірність того, що серед 100 задач студент знає відповідь на 82 запитання. Скористаємося локальною формулою Муавра-Лапласа:

$$P_n(m)=\frac{\varphi(x)}{\sigma}, \text{ де } \sigma=\sqrt{npq}, \ \varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, \ x=\frac{m-np}{\sigma}.$$

За умовою *n=100, m=82, p=0,7, q=1−p=1−0,7=0,3*.

Тоді, $x=\frac{82-100\cdot 0{,}7}{\sqrt{100\cdot 0{,}7\cdot 0{,}3}}=\frac{12}{4{,}6}=2{,}6$.

За таблицями знаходимо, $\varphi(2{,}6)=0{,}0136$.

Тоді, $P_{100}(82)=\frac{0{,}0136}{\sqrt{100\cdot 0{,}7\cdot 0{,}3}}=\frac{0{,}0136}{4{,}6}\approx 0{,}003$.

б) Знайдемо ймовірність того, що серед 100 запитань студент знає відповідь від 60 до 85 запитань. Скористаємося інтегральною формулою Муавра-Лапласа:

$$P_n(m_1\le m\le m_2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha}^{\beta}\varphi(x)dx=\Phi(\beta)-\Phi(\alpha),$$

де $\sigma=\sqrt{npq}$, $\alpha=\frac{m_1-np}{\sigma}$, $\beta=\frac{m_2-np}{\sigma}$.

За умовою *n=100,* m_1*=60,* m_2*=85, p=0,7, q=1−p=1−0,7=0,3*.

Тоді,

$$\alpha=\frac{60-100\cdot 0{,}7}{\sqrt{100\cdot 0{,}7\cdot 0{,}3}}=-\frac{10}{4{,}6}=-2{,}17; \ \beta=\frac{85-100\cdot 0{,}7}{\sqrt{100\cdot 0{,}7\cdot 0{,}3}}=\frac{15}{4{,}6}\approx 3{,}26$$

За таблицями знаходимо,

$\Phi(\alpha)=\Phi(-2{,}17)=-0{,}4854$; $\Phi(\beta)=\Phi(3{,}26)=0{,}49931$.

Тоді, $P_n(60\le m\le 85)=\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)=0{,}49931+0{,}4854=0{,}98471$.

Відповідь: а) $P_{100}(82)\approx 0{,}003$; $P_{100}(60\le m\le 85)=0{,}98471$.

Приклад 4. Ймовірність браку при виготовленні деяких деталей *p=0,02*. Знайти ймовірність того, що серед 1200 взятих деталей:

а) рівно 975 стандартних?

б) від 750 до 880 стандартних?

Розв'язання: а) За локальною формулою Муавра-Лапласа:

$$P_n(m) = \frac{\varphi(x)}{\sigma}, \text{ де } \sigma = \sqrt{npq}, \ \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \ x = \frac{m - np}{\sigma}.$$

За умовою *n=1200, m=975, p=0,98, q=1−p=1−0,98=0,02*.

Тоді, $x = \dfrac{975 - 1200 \cdot 0{,}98}{\sqrt{1200 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}98}} = -\dfrac{201}{4{,}9} \approx -41$.

За таблицями знаходимо, $\varphi(-41) = 0$.

Тоді, $P_{1200}(975) = \dfrac{0}{\sqrt{1200 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}98}} = 0$.

б) Знайдемо ймовірність того, що з 1200 деталей буде від 750 до 880 не бракованих. Скористаємося інтегральною формулою Муавра-Лапласа:

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x) dx = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha),$$

де $\sigma = \sqrt{npq}$, $\alpha = \dfrac{m_1 - np}{\sigma}$, $\beta = \dfrac{m_2 - np}{\sigma}$.

За умовою *n=1200*, m_1*=750*, m_2*=880*, *p=0,98, q=1−p=1−0,98=0,02*.

Тоді, $\alpha = \dfrac{750 - 1200 \cdot 0{,}98}{\sqrt{1200 \cdot 0{,}98 \cdot 0{,}02}} = -\dfrac{426}{4{,}9} \approx -85{,}2$;

$$\beta = \frac{880 - 1200 \cdot 0{,}98}{\sqrt{1200 \cdot 0{,}98 \cdot 0{,}02}} = \frac{256}{4{,}9} = 59{,}2$$

За таблицями знаходимо:

$\Phi(\alpha) = \Phi(-85{,}2) = -0{,}49999$; $\Phi(\beta) = \Phi(59{,}2) = 0{,}49999$.

Тоді, $P_n(750 \le m \le 380) = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = 0{,}49999 + 0{,}49999 = 0{,}98888$.

Відповідь: а) 0; б) 0,98888.

Д.з.: «Т. й.» Шевченко Р.Л., Ревицька У.С. Розділ III. § 5–6.