Лекція №5

Повторні незалежні випробування

1. Поняття повторного незалежного випробування.

2. Формула Бернуллі.

3. Многокутник розподілу.

4. Найбільш імовірне число появи події.

5. Формула Пуассона.

1. Поняття повторного незалежного випробування.

При проведенні декількох випробувань (дослідів) на предмет появи події A, в кожному з яких імовірність появи події A залишається незмінною, ця подія може з'явитись певну кількість разів. Наприклад, 5 студентів прийшли на іспит, до якого кожен з них підготував 80% матеріалу. Імовірність скласти іспит кожним наступним студентом складає 0,8 і не залежить від здачі іспиту попереднім студентом. Таким чином, випробування незалежні. При складанні іспиту можуть трапитись різні події, в результаті число студентів, що склали іспит, буде коливатись від варіанту „не здав ніхто" до варіанту „здали всі". Отже, проводиться перевірка всіх можливих результатів здачі іспиту, тобто проводиться повторно один і той же дослід: скільки студентів здадуть іспит у цьому випробуванні. Тому вони називаються повторними незалежними випробуваннями.

2. Формула Бернуллі

Нехай проводяться випробування на виявлення можливості появи події A, в яких вона може трапитись, якщо ймовірність її появи в однократному досліді є p, тобто $p(A)=p$, а ймовірність непояви її буде $p(\overline{A})=1-p=q$. Необхідно знайти ймовірність того, що подія A трапиться m разів при проведенні n випробувань. Позначимо цю ймовірність через $p_n(m)$. Тоді:

$$p_n(m)=\frac{n!}{m!\cdot(n-m)!}\cdot p^m\cdot q^{n-m} \qquad (1)$$

Ця формула називається формулою Бернуллі.

Аналіз формули показує, що нею досить важко користуватись при великих значеннях n та досить малих значеннях p і q, оскільки величина $n!$ досягає досить великих значень, тоді як p^m чи q^{n-m} − дуже малих значень.

Критерій застосування формули Бернуллі: малі значення n та нерідкісні події.

<u>Приклад 1.</u> Кожен студент до заліку підготовив 90% матеріалу. Знайти ймовірність того, що з 10-и студентів залік здадуть:

а) 8 студентів; б) не менше 8-и студентів; в) хоч би один із них.

<u>Розв'язання:</u> а) Повторно проводиться один і той же дослід про здачу заліку студентом при незмінній імовірності для кожного з них. Тому маємо повторне незалежне випробування, в якому $p = 0{,}9$, $q = 0{,}1$, тому:

$$p_{10}(8) = \frac{10!}{8!\cdot(10-8)!}\cdot 0{,}9^8 \cdot 0{,}1^2 = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot1\cdot2}0{,}9^8\cdot0{,}01 = 9\cdot5\cdot0{,}81^4\cdot0{,}01 =$$

$$= 0{,}45\cdot0{,}6561^2 = 0{,}45\cdot0{,}43046721 \approx 0{,}1937\,.$$

б) „Не менше восьми" означає, що залік можуть здати або 8, або 9, або 10 студентів, тому за теоремою додавання для несумісних подій (якщо здасть тільки 8 студентів, то не може водночас здати 9 чи 10) маємо:

$$p_{10}(m \ge 8) = p_{10}(8) + p_{10}(9) + p_{10}(10)\,.$$

Обчислимо $p_{10}(9)$ та $p_{10}(10)$:

$$p_{10}(9) = \frac{10!}{9!\cdot1!}\cdot0{,}9^9\cdot0{,}1^1 = 10\cdot0{,}1\cdot0{,}9\cdot0{,}9^8 = 0{,}9\cdot0{,}43046721 \approx 0{,}3874.$$

$$p_{10}(10) = \frac{10!}{10!\cdot0!}\cdot0{,}9^{10}\cdot0{,}1^0 = 0{,}9^{10} = 0{,}81\cdot0{,}43046721 \approx 0{,}348687\,.$$

Тоді $p_{10}(m \ge 10) \approx 0{,}1937 + 0{,}3874 + 0{,}3487 = 0{,}9298\,.$

в) Поняття „хоч би один" означає, що кількість студентів, які здадуть залік, буде знаходитись в межах від одного до десяти. В повну групу подій, імовірність якої завжди дорівнює одиниці, входить також поняття „не здасть ні один", тому $p_{10}(m > 0) = 1 - p_{10}(0) = 1 - \dfrac{10!}{0!\cdot10!}\cdot0{,}9^0\cdot0{,}1^{10} =$

$= 0{,}9999.$

3. Многокутник розподілу.

Озн. 1: Графік розподілу ймовірностей повної групи подій називається многокутником розподілу.

<u>Приклад 2.</u> Урна вміщує 20 кульок, з яких 10 білих. Визначити ймовірності можливих результатів витягування білих кульок при проведенні 10 дослідів.

<u>Розв'язання:</u> Необхідно обчислити ймовірності витягування білих кульок від варіанту $m = 0$ (всі кульки чорні) до варіанту $m = 10$ (всі кульки білі). Імовірність дістати білу кульку $p = 0{,}5$, тому $q = 1 - p = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$.

1. Якщо $m = 0 \Rightarrow p_{10}(0) = \frac{10!}{0! \cdot 10!} \cdot 0{,}5^0 \cdot 0{,}5^{10} = 1 \cdot 0{,}5^{10} \approx 0{,}00098.$

2. Якщо $m = 1 \Rightarrow p_{10}(1) = \frac{10!}{1! \cdot 9!} \cdot 0{,}5^1 \cdot 0{,}5^9 = 10 \cdot 0{,}5^{10} \approx 0{,}00977.$

3. Якщо $m = 2 \Rightarrow p_{10}(2) = \frac{10!}{2! \cdot 8!} \cdot 0{,}5^2 \cdot 0{,}5^8 = 45 \cdot 0{,}5^{10} \approx 0{,}04394.$

4. Якщо $m = 3 \Rightarrow p_{10}(3) = \frac{10!}{3! \cdot 7!} \cdot 0{,}5^3 \cdot 0{,}5^7 = 120 \cdot 0{,}5^{10} \approx 0{,}11719.$

5. Якщо $m = 4 \Rightarrow p_{10}(4) = \frac{10!}{4! \cdot 6!} \cdot 0{,}5^4 \cdot 0{,}5^6 = 210 \cdot 0{,}5^{10} \approx 0{,}20508.$

6. Якщо $m = 5 \Rightarrow p_{10}(5) = \frac{10!}{5! \cdot 5!} \cdot 0{,}5^5 \cdot 0{,}5^5 = 252 \cdot 0{,}5^{10} \approx 0{,}24609.$

7. Якщо $m = 6 \Rightarrow p_{10}(6) - \frac{10!}{6! \cdot 4!} \cdot 0{,}5^6 \cdot 0{,}5^4 = 210 \cdot 0{,}5^{10} \approx 0{,}20508.$

8. Якщо $m = 7 \Rightarrow p_{10}(7) = \frac{10!}{7! \cdot 3!} \cdot 0.5^7 \cdot 0.5^3 = 120 \cdot 0{,}5^{10} \approx 0{,}11719.$

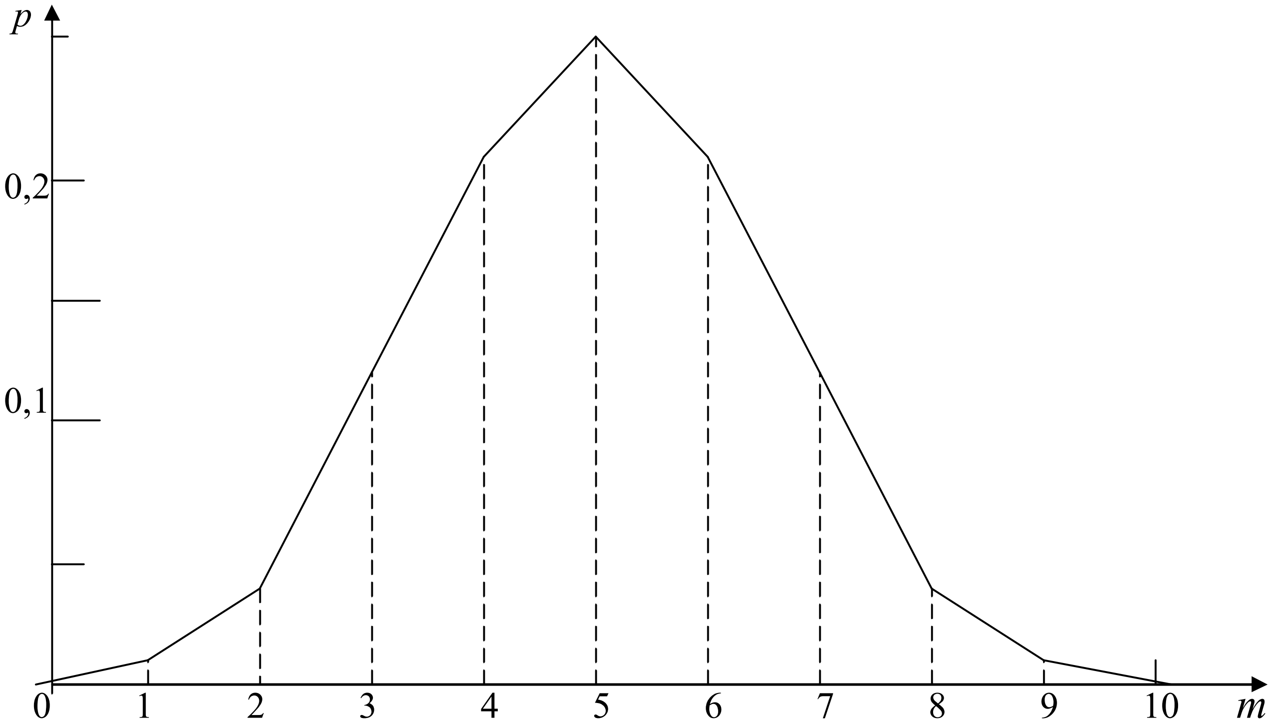
9. Якщо $m = 8 \Rightarrow p_{10}(8) = \frac{10!}{8! \cdot 2!} \cdot 0{,}5^8 \cdot 0{,}5^2 = 45 \cdot 0{,}5^{10} \approx 0{,}04394.$

10. Якщо $m = 9 \Rightarrow p_{10}(9) = \frac{10!}{9! \cdot 1!} \cdot 0{,}5^9 \cdot 0{,}5^1 = 10 \cdot 0{,}5^{10} \approx 0{,}00977.$

11. Якщо $m = 10 \Rightarrow p_{10}(10) = \frac{10!}{10! \cdot 0!} \cdot 0{,}5^{10} \cdot 0{,}5^0 = 1 \cdot 0{,}5^{10} \approx 0{,}00098.$

Побудуємо графік розподілу ймовірностей, який називається многокутником розподілу.

Величина m як число випробувань є цілочисловою, тому обчислена величина p приймає точкові значення. Тому на графіку точки з'єднують відрізками прямої лінії.



4. Найбільш імовірне число появи події

З многокутника розподілу ймовірностей видно, що різним значенням m відповідають різні значення ймовірностей. Найбільше значення отримали при $m = 5$, але для знаходження цього значення довелось обчислити ймовірності для всіх значень m. Необхідно знайти спосіб, за яким можна безпосередньо обчислити значення m, за якого досягається найбільша ймовірність. Це значення називається найбільш імовірним і позначається через m_0. Це означає, що значення ймовірності справа та зліва від m_0 (зліва від m_0 знаходиться $m_0 - 1$, так же, а справа знаходиться $m_0 + 1$) можуть бути меншими або такими ж, як і в точці m_0, але ніяк не більшими, тобто $p_n(m_0 - 1) \le p_n(m_0) \ge p_n(m_0 + 1)$

Тоді,

$$np + p - 1 \le m_0 \le np + p \tag{2}$$

Якщо np − ціле число, то числа $np+p$ та $np+p-1$ будуть дробовими і відрізняються між собою на одиницю. Між такими дробовими числами існує тільки одне ціле число, яке згідно з нерівністю (3) дорівнює m_0.

Отже, якщо np − ціле число, то $m_0 = np$ (пам'ятаємо, що m_0 − ціле число як кількість вдалих дослідів).

Якщо $np+p$ − ціле, то $np+p-1$ також буде цілим, меншим на одиницю. Між такими цілими числами не існує цілого числа, тому при $m_0 = np+p$ та при $m_0 = np+p-1$ значення ймовірності будуть однаковими і найбільшими.

Приклад 3.Знайти найбільш імовірне значення появи події, якщо $n=10$, $p=0{,}8$.

Розв'язання: Знаходимо добуток $np = 10 \cdot 0{,}8 = 8$ − ціле число. Отже, для $m=8$ буде найбільша ймовірність появи.

Приклад 4.Знайти найбільш імовірний результат здачі заліку дев'ятьма студентами, якщо кожен із них підготував до заліку 70% матеріалу.

Розв'язання: Імовірність здати залік студентом складає 0,7. Знаходимо величину $np = 9 \cdot 0{,}7 = 6{,}3$. Тоді $np + p = 6{,}3 + 0{,}7 = 7$ − ціле число. Отже, найбільш імовірно, що залік здасть 6 чи 7 студентів.

5. Формула Пуассона

Якщо ймовірність p появи події надзвичайно мала, то така подія буде рідкісною. При навіть невеликому значенні числа m величина p^m стає надзвичайно малою, що утруднює обчислення (наприклад, числа розрядів калькулятора може не хватити для висвітлення значущої цифри). Наявність добутку ймовірності появи p та ймовірності її непояви q створює ті ж труднощі при малому q, тому формулу Пуассона ще називають формулою рідкісних подій.

$$p_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}. \tag{3}$$

Ця формула називається формулою Пуассона. Критерій застосування формули Пуассона: рідкісні події, для яких p або q досить малі.

Приклад 5. Серед зерен пшениці трапляються зерна жита (в середньому одне на тисячу). Знайти ймовірність того, що серед навмання відібраних 2000 зерен зустрінеться 3 житніх.

Розв'язання: Взяти навмання зерно жита − рідкісна подія, тому використовуємо формулу Пуассона. За умовою $n = 2000, p = 0{,}001$, тому $\lambda = np = 2$. З таблиці 1 (див. додаток) знаходимо: $e^{-2} = 0{,}1353$. Тоді:

$$p_{2000}(3) = \frac{2^3}{3!} \cdot e^{-2} = \frac{4 \cdot 0{,}1353}{3} = 0{,}1804.$$

Приклад 6. У середньому на 3м^2 пшеничного поля зустрічається 2 житніх стебла. Знайти ймовірність того, що на вибраній навмання площі 2 м^2 не буде ні одного стебла жита.

Розв'язання: На 3м^2 пшеничного поля росте багато стебел пшениці і лише 2 стебла жита, тому вказати випадковим чином на стебло жита − рідкісна подія. За умовою $\lambda = \frac{3}{2} \cdot 2 = 3$, тому $p(0) = \frac{3^0}{0!} \cdot e^{-3} = \frac{1}{1} \cdot 0{,}0498 \approx 0{,}05$.

Д.з.: «Т. й.» Шевченко Р.Л., Ревицька У.С. Розділ ІІІ. § 1–3.