Лекція №4

Формула повної ймовірності.

1. Формула повної ймовірності.

2. Формула Байєса.

1. Формула повної ймовірності

Розглянемо повну групу попарно несумісних подій $H_1, H_2, ..., H_n$ і деяку подію A, що може з'явитись тільки разом з однією із подій групи.

Теорема 1. Ймовірність події A, яка може настати лише за умови появи однієї із попарно не сумісних подій повної групи *H*, визначається за формулою:

$$p(A) = p(H_1)p_{H_1}(A) + p(H_2)p_{H_2}(A) + ... + p(H_i)p_{H_i}(A) + ... + p(H_n)p_{H_n}(A) =$$

$$= \sum p(H_i)p_{H_i}(A).$$

Приклад 1. Маємо три урни. В першій знаходиться 6 стандартних та 4 бракованих деталей, в другій − 8 стандартних і 2 бракованих деталей, в третій − 6 стандартних і 4 бракованих. Яка імовірність того, що навмання взята деталь виявиться стандартною?

Розв'язання: Позначимо через B_1, B_2, B_3 відповідно події, що навмання витягнута деталь буде з першої, другої, третьої урни: $P(B) = \frac{1}{3}$.

Подія А полягає у тому, що витягнута деталь стандартна. Тоді $P(A_1) = \frac{6}{10} = 0{,}6$, $P(A_2) = \frac{8}{10} = 0{,}8$, $P(A_3) = \frac{6}{10} = 0{,}6$.

Імовірність Р(С) того, що витягнута деталь буде стандартною, обчислимо за формулою повної імовірності:

$$P(C) = P(B_1)P(A_1) + P(B_2)P(A_2) + P(B_3)P(A_3);$$

$$P(C) = \frac{1}{3}(0{,}6 + 0{,}8 + 0{,}6) = \frac{2}{3}.$$

Приклад 2. Електролампи виготовляють на трьох заводах. Перший завод виготовляє 45% загальної кількості електроламп, другий 40%, третій 15%. Продукція першого заводу становить 70% стандартних ламп, другого 80%, третього 81%. В магазин надходять лампи від усіх трьох заводів. Яка імовірність того, що куплена лампа буде стандартною?

Розв'язання: Позначимо через B_1, B_2, B_3 відповідно події, що навмання куплена лампа буде виготовлена на першому, другому, третьому заводі. Подія A полягає у тому, що куплена лампа стандартна. Тоді $P(A_1)=0{,}7$, $P(A_2)=0{,}8$, $P(A_3)=0{,}81$.

Імовірність P(C) того, що куплена лампа буде стандартною, обчислимо за формулою повної імовірності:

$$P(C)=P(B_1)P(A_1)+P(B_2)P(A_2)+P(B_3)P(A_3);$$

$$P(C)=0{,}45\cdot 0{,}7+0{,}4\cdot 0{,}8+0{,}15\cdot 0{,}81=0{,}7565\,.$$

2. Формула Байєса.

Формула повної ймовірності дає можливість встановити ймовірність появи події A, не виясняючи, яка з подій групи H викликала подію A. Але якщо подія A відбулася, то є цікавим питання, яка група H_i визвала появу події A.

Нехай проведено випробування, внаслідок якого відбулася подія A. Як змінились ймовірності гіпотез при цьому? Відповідь на це дає теорема Байєса.

Теорема 2. Для будь-якої випадкової події A, для якої $p(A)\neq 0$, і яка може з'явитись лише за умови появи однієї з попарно несумісних випадкових подій $H_1, H_2, ..., H_n$, що складають повну групу подій, виконуються рівності:

$$p_A(H_i)=\frac{p(H_i)p_{H_i}(A)}{\sum_{i=1}^{n}p(H_i)p_{H_i}(A)}=\frac{p(H_i)p_{H_i}(A)}{p(A)}.$$

Приклад 3. Маємо три урни. В першій знаходиться 6 стандартних та 4 бракованих деталей, в другій − 9 стандартних і 1 бракованих деталей, в третій − 7 стандартних і 3 бракованих. Яка імовірність того, що навмання взята деталь виявиться стандартною і взята з третьої урни?

Розв’язання: Позначимо через B_1, B_2, B_3 відповідно події, що навмання витягнута деталь буде з першої, другої, третьої урни: $P(B)=\frac{1}{3}$.

Подія А полягає у тому, що витягнута деталь стандартна. Тоді $P(A_1)=\frac{6}{10}=0{,}6$, $P(A_2)=\frac{9}{10}=0{,}9$, $P(A_3)=\frac{7}{10}=0{,}7$.

Імовірність P(C) того, що витягнута деталь буде стандартною, обчислимо за формулою повної імовірності:

$$P(C)=P(B_1)P(A_1)+P(B_2)P(A_2)+P(B_3)P(A_3);$$

$$P(C)=\frac{1}{3}(0{,}6+0{,}9+0{,}7)=0{,}7.$$

Що деталь виявиться стандартною і з третьої урни обчислимо за формулою Байєса:

$$p_A(H_2)=\frac{p(H_3)\cdot p_{H_3}(A)}{p(A)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot 0{,}7}{0{,}7}=\frac{1}{3}.$$

Приклад 4. У трьох однакових контейнерах знаходяться пляшки з мінеральною водою „Луганська”. У першому контейнері − 2% пляшок з водою „Луганська”, у другому − 3%, у третьому − 1%. З навмання вибраного контейнера беруть одну пляшку. Обчислити:

1) ймовірність того, що взята пляшка буде з водою „Луганська”;

2) ймовірність того, що взята пляшка з водою „Луганська” була в другому контейнері.

Розв’язання. Подія $A-$ взята пляшка з водою „Луганська”. Гіпотези: H_1- пляшку взято з першого контейнера, H_2- з другого і H_3- з третього. Гіпотези утворюють повну групу подій. Контейнери вміщують однакову кількість пляшок, тому $p(H_1)=p(H_2)=p(H_3)=\frac{1}{3}$.

За умовою ймовірність вилучити пляшку з водою „Луганська” з кожного з ящиків складає відповідно $p_{H_1}(A)=0{,}02, p_{H_2}(A)=0{,}03, p_{H_3}(A)=0{,}01$.

1.За формулою повної ймовірності

$$p(A)=p(H_1)p_{H_1}(A)+p(H_2)p_{H_2}(A)+p(H_3)p_{H_3}(A)=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot 0{,}02+\frac{1}{3}\cdot 0{,}03+\frac{1}{3}\cdot 0{,}01=0{,}02\,.$$

2. За формулою Байєса знаходимо:

$$p_A(H_2)=\frac{p(H_2)\cdot p_{H_2}(A)}{p(A)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{0{,}03}{0{,}02}=0{,}5\,.$$

Приклад 5. У двох стопках зошити в лінійку та в клітинку. В першій – 5 в лінійку і 6 в клітинку, в другій – 6 в лінійку і 8 в клітинку. Навмання витягують один зошит. Яка ймовірність, що він у клітинку і з другої стопки?

Розв'язання. Подія $A-$ взятий зошит у клітинку. Гіпотези: H_1-зошит з першої стопки, H_2- з другої. Гіпотези утворюють повну групу подій. $p(H_1)=\frac{11}{11+14}=\frac{11}{25},\ p(H_2)=\frac{14}{11+14}=\frac{14}{25}$.

За умовою ймовірність вилучити зошит в клітинку з кожної з стопок складає відповідно $p_{H_1}(A)=\frac{6}{11}, p_{H_2}(A)=\frac{8}{14}=\frac{4}{7}$.

За формулою повної ймовірності

$$p(A)=p(H_1)p_{H_1}(A)+p(H_2)p_{H_2}(A)=\frac{11}{25}\cdot\frac{6}{11}+\frac{14}{25}\cdot\frac{4}{7}=0{,}24+0{,}32=0{,}56\,.$$

За формулою Байєса знаходимо:

$$p_A(H_2)=\frac{p(H_2)\cdot p_{H_2}(A)}{p(A)}=\frac{\frac{4}{7}\cdot\frac{14}{25}}{0{,}56}=0{,}57\,.$$

Д.з.: «Т. й.» Шевченко Р.Л., Ревицька У.С. Вступ. Розділ ІІ. § 8–9.