Лекція №3

Тема: Основні теореми теорії ймовірностей

1. Теорема множення для залежних подій.
2. Теорема множення для незалежних подій.
3. Теорема додавання для сумісних подій.
4. Теорема додавання для несумісних подій.

1. Теорема множення для залежних подій.

Озн 1. Умовною ймовірністю називається ймовірність появи події B за умови, що відбулася подія A. Умовна ймовірність позначається $p_A(B)$.

Приклад 1. У ящику знаходяться три білі і дві чорні кулі. Виймають одну кулю (перше випробування), а потім другу (друге випробування). Першою дістали білу кулю (подія A). Знайти ймовірність появи білої кулі (подія B) у другому випробуванні, якщо першу кулю перед другим випробуванням назад у ящик: а) повернули; б) не повернули.

Розв'язання:

а) при поверненні білої кулі у ящик їх знову буде три при загальній кількості п'ять куль. Умови в ящику не змінились, тому подія B не залежить від події $A: p(B)=\dfrac{3}{5}$;

б) вилучену білу кулю у ящик не повертають, тому в ньому буде чотири кулі, з яких дві білих. Умови в ящику змінились, поява події B залежить від появи події A. Маємо умовну ймовірність: $p_A(B)=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$.

Теорема 1. Ймовірність сумісної появи двох випадкових подій A і B дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовну ймовірність другої за умови, що перша подія відбулася: $p(AB)=p(A)\cdot p_A(B)=p(B)\cdot p_B(A)$.

Наслідок. Умовна ймовірність появи події B за умови, що подія A відбулася, визначається за формулою: $p_A(B)=\dfrac{p(AB)}{p(A)}$.

Приклад 3. Для деякої місцевості середнє число хмарних днів у липні дорівнює шести. Знайти ймовірність того, що першого та другого липня буде ясна погода.

Розв'язання: Подія $A-$ першого липня буде ясна погода. У липні 31 день, а ясних днів − 25. Тому: $p(A)=\frac{25}{31}$. Подія B − другого липня буде ясна погода за умови, що погода першого липня також була ясною, має умовний характер. Лишилося в липні (без першого числа) 30 днів, з яких шість хмарних, тому ясних днів буде 24. Отже, $p_A(B)=\frac{24}{30}=\frac{4}{5}$.

Імовірність сумісної появи подій A і B: $p(AB)=\frac{25}{31}\cdot\frac{4}{5}=\frac{20}{31}$.

2. Теорема множення для незалежних подій.

Теорема 2. Ймовірність добутку незалежних подій (одночасної появи) дорівнює добутку ймовірностей цих подій: $p(AB)=p(A)\cdot p(B)$.

Приклад 2. Ймовірність виходу з ладу верстата протягом зміни дорівнює $0{,}1$. Знайти ймовірність безвідмовної роботи двох верстатів протягом зміни.

Розв'язання: Якщо ймовірність поломки дорівнює $0{,}1$, то ймовірність безвідмовної роботи буде $1-0{,}1=0{,}9$. Станки виходять з ладу незалежно один від одного, тому $p(A)=p(B)=0{,}9$. За теоремою множення маємо: $p(AB)=p(A)\cdot p(B)=0{,}9\cdot 0{,}9=0{,}81$.

Озн. 2. Події $A_1, A_2, ..., A_n$ називаються незалежними у сукупності, якщо при будь-яких $i_k\in[1;n]$, де $i_{k-1}<i_k$, зберігається умова:

$$p(A_{i_1}A_{i_2}...A_{i_k})=p(A_{i_1})\cdot p(A_{i_2})\cdot ...\cdot p(A_{i_k}).$$

Теорема 3. Ймовірність сумісної появи незалежних у сукупності подій A_1, $A_2,...,A_n$, , дорівнює добутку ймовірностей цих подій:

$$p(A_1A_2...A_n)=p(A_1)\cdot p(A_2)\cdot ...\cdot p(A_n).$$

Приклад 4. У першій п'ятірці студентів, що прийшли на іспит, підготовлені до іспиту: перший студент − на 70%, другий − на 80%, третій − на 60%, четвертий і п'ятий − на 90%. Знайти ймовірність успішного складання іспиту цією п'ятіркою студентів.

<u>Розв'язання.</u> Нехай A_i − імовірність успішного складання іспиту i-тим студентом. Події незалежні між собою. Тоді $p(A_1A_2A_3A_4A_5) = 0,7 \cdot 0,8 \cdot 0,6 \cdot$ $\cdot 0,9 \cdot 0,9 = 0,27216$.

<u>Приклад 5.</u> На іспит студент підготовив 25 з 30 питань. Знайти ймовірність того, що студент знає відповіді на всі три питання білету.

<u>Розв'язання.</u> Нехай подія A − студент знає відповідь на перше питання, $B-$ на друге і $C-$ на третє. Якщо імовірність того, що студент знає відповідь на перше питання, складає $\frac{25}{30}$, то залишилося 29 питань, з яких студент знає 24. Якщо студент знає відповідь на друге питання з імовірністю $\frac{24}{29}$, то залишилося 28 питань, з яких студент знає 23, тому ймовірність буде $\frac{23}{28}$. Отже, події між собою залежні.

Тоді $p(ABC) = p(A) \cdot p_A(B) \cdot p_{AB}(C) = \frac{25}{30} \cdot \frac{24}{29} \cdot \frac{23}{28} \approx 0,57$.

3. Теорема додавання для сумісних подій.

Теорема 4. Якщо випадкові події A і B сумісні, то:
$p(A+B) = p(A) + p(B) - p(AB)$.

<u>Приклад 6.</u> Перший студент підготував до заліку 80% матеріалу, а другий − 90%. Знайти ймовірність складання заліку одним із студентів.

<u>Розв'язання.</u> За умовою $p(A) = 0,8$, $p(B) = 0,9$. Події сумісні і незалежні. Тоді $p(A+B) = 0,8 + 0,9 - 0,8 \cdot 0,9 = 1,7 - 0,72 = 0,98$.

4. Теорема додавання для несумісних подій.

Якщо події несумісні, то разом вони трапитись не можуть, тобто для несумісних подій $p(AB) = 0$.

Теорема 5. Якщо випадкові події A і B сумісні, то:
$p(A+B)=p(A)+p(B)$.

Приклад 7. З колоди карт витягнуто одну. Яка ймовірність, що обрана карта туз або дама?

Розв'язання. Подія A – витягнуто туз. Подія B – витягнуто даму.

$P(A)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$; $P(B)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$.

Тоді: $p(A+B)=p(A)+p(B)=\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{2}{9}$.

Приклад 8. (Узагальнюючий приклад):

Два стрілка стріляють по мішені. Ймовірність влучання першим дорівнює 0,7, другим – 0,9. Яка ймовірність, що:

1) влучать обидва;

2) жоден не влучить;

3) влучить один;

4) влучить хоча б один.

Розв'язання. Розпишемо простір подій: $\{+,+\}$, $\{-,+\}$, $\{+,-\}$, $\{-,-\}$.

$P(A)=0{,}7$, $P(B)=0{,}9$.

1) $A\cdot B$ – влучать обидва; $P(A\cdot B)=0{,}7\cdot 0{,}9=0{,}63$.

2) $\overline{A}\cdot\overline{B}$ – жоден не влучить; $P(\overline{A}\cdot\overline{B})=(1-0{,}7)\cdot(1-0{,}9)=0{,}03$.

3) $A+B$ – влучить один; $P(A+B)=0{,}7+0{,}9-0{,}7\cdot 0{,}9=0{,}97$.

4) $(AB)+(A+B)$ влучить хоча б один;

$P((AB)+(A+B))=1-P(\overline{A}\cdot\overline{B})=1-0{,}03=0{,}97$

Д.з.: «Т. й.» Шевченко Р.Л., Ревицька У.С. Розділ II. § 5–7.