Лекція №2

Тема: Основні поняття теорії ймовірностей

1. Предмет теорії ймовірностей.

2. Поняття та класифікація подій.

3. Класичне визначення ймовірності.

4. Статистичне визначення ймовірності.

5. Геометричне визначення ймовірності.

1. Предмет теорії ймовірностей.

Досить часто в житті, в тому числі й в агрономічній діяльності, виникає потреба вирішувати задачі, в яких результат дії не визначається однозначно. Якщо, наприклад, підкинути один раз кубик з розмальованими в різні кольори гранями, то неможливо передбачити, який колір буде на верхній грані. Проте при багаторазовому підкиданні може встановитись певна закономірність.

Те ж саме стосується і процесу обробки якої-небудь деталі. Розміри різних деталей будуть відхилятися від вказаного на кресленні значення. Ці відхилення мають випадковий характер, адже розміри щойно виготовленої деталі не дають змоги точно встановити розміри наступної. Проте, якщо розглядати партії з великою кількістю виготовлених деталей, то середнє арифметичне розмірів виготовлених деталей у різних партіях буде приблизно однаковим.

Подібного роду закономірності і вивчає теорія ймовірностей.

Отже, ***предметом теорії ймовірностей є вивчення закономірностей масових випадкових подій***. Знання таких закономірностей дозволяють передбачити, як будуть відбуватися події.

Теорія ймовірностей як математична наука вивчає властивості випадкових подій, поява яких носить масовий характер, і які здатні багаторазово повторюватись при виконанні певних умов. Таким чином, теорія ймовірностей вивчає закономірності, притаманні масовим випадковим подіям.

Теорія ймовірностей − суто математична наука зі своєю аксіоматикою, з якої витікають всі її положення та теореми. Вперше повну систему аксіом цієї науки сформулював у 1936 р. видатний математик і всесвітньо відомий вчений академік Колмогоров Андрій Миколайович у книзі „Основные понятия теории вероятностей”.

Теорія ймовірностей є основою для вивчення статистичних даних, своєрідним містком між математичним і статистичним аналізами. Нарешті, теорія ймовірностей знаходить широке застосування у задачах прикладного характеру.

2. Поняття та класифікація подій.

Основним операційним матеріалом для теорії ймовірностей є події. В результаті проведеного дослідження, яке ми будемо називати випробуванням, настає подія.

Озн. 1. *Випробування* – це дослід, експеримент, дослідження, тобто процес. *Подія* – будь-який результат проведеного випробування.

Наприклад: підкидання монети – випробування, випав герб – подія; здача екзамену – випробування, отримана оцінка за екзамен – подія.

Озн. 2. *Випадковою* подією називають змінну величини, яка в результаті дослідження може з’явитися, а може не з’явитися, незалежно від бажання дослідника. Наприклад, випав герб; здав екзамен на відмінно.

Події позначають літерами A, B, C тощо. Ймовірність появи події A позначається $P(A)$. Поняття ймовірності є базовим поняттям у теорії ймовірностей і широко використовується в математичній статистиці.

Озн. 3. Події A, B, C і т.д. називаються *несумісними*, якщо поява однієї з них виключає появу будь-якої іншої в одному і тому ж випробуванні.

Наприклад: випадання герба (подія A) при підкиданні монети виключає випадання цифри (подія B). Отже, події A і B несумісні. Поява одного, двох і т.д. очок при підкиданні один раз грального кубика − приклад множини з шести несумісних подій.

Озн. 4. Події A, B, C і т.д. називаються *сумісними*, якщо поява однієї з них не виключає появи будь-якої іншої з них.

Наприклад: складання іспиту будь-яким студентом не виключає можливості скласти іспит іншими.

Озн. 5. Події *A, B* називаються *незалежними*, якщо можливість появи однієї з них не залежить від появи чи не появи іншої.

Наприклад: подія *A* − складання іспиту першим студентом, не залежить від появи чи не появи події *B* − складання іспиту другим студентом.

Озн. 6. Події *A, B* називаються *залежними*, якщо можливість появи події *A* залежить від появи чи не появи події *B*.

Наприклад: подія *A* − оцінка, одержана студентом при складанні іспиту, залежить від події *B* − кількості підготовлених тем.

Озн. 7. Події $A_1, A_2, ..., A_i$ називаються *рівноможливими*, якщо при виконанні певних умов у кожної з них існує однакова можливість відбутись чи не відбутись.

Озн. 8. Подія $\overline{A}$ називається *протилежною* до події A, якщо вона відбувається тільки тоді, коли подія A не відбувається.

Озн. 9. Сукупність подій утворює *повну групу* подій, якщо при проведенні випробування хоч одна з них відбудеться обов’язково.

Якщо повна група складається з двох подій, то події будуть протилежними.

Наприклад: при єдиному пострілі у ціль може бути: подія A (попадання в ціль); подія $\overline{A}$ (промах). Події утворюють повну групу подій (може бути попадання чи промах, іншого бути не може).

3. Класичне визначення ймовірностей:

Ймовірність *P* появи події *A* називається відношення числа *m* випробувань, що сприяють появі події *A*, до загального числа *n* всіх можливих випробувань:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Наприклад, свиноматка привела 10 поросят, з них 6 свинок. З цього опоросу можна по одному вилучити всі 10 поросят, тобто загальне число випробувань по вилученню поросят дорівнює десяти: *n*=10. Серед цих можливих випробувань сприяють появі свинки тільки шість випробувань, тобто *m*=6. Якщо подія *A* полягає у вилученні свинки, то $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{6}{10} = 0,6$.

Ймовірність змінюється від нуля до одиниці.

Тому події можна класифікувати й таким чином:

– випадкова ($0 \le P(A) \le 1$);
– неможлива ($P(A) = 0$);
– достовірна ($P(A) = 1$).

Отже визначити ймовірність появи будь-якої події не викликає ніяких труднощів, якщо відомі значення всіх можливих подій та значення їх сприяючої частини. Існують умови, за яких значення m та n невідомі і безпосередньо не можуть бути знайдені.

Приклад 1. З колоди карт (36 шт.) випадковим чином витягується одна карта. Яка ймовірність того, що ця карта: а) пікова дама; б) дама; в) пікова масть?

Розв'язання. Нехай дістати даму пік − подія A, даму − подія B, пікову масть − подія C. У колоді 36 карт, тому загальна кількість випробувань $n = 36$:

а) пікова дама у колоді одна $m = 1$, тому $p(A) = \frac{1}{36}$;

б) дам у колоді чотири $m = 4$, тому $p(B) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$;

в) пікової масті дев'ять $m = 9$, тому $p(C) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$.

Приклад 2. З корзини, в якій знаходиться 5 білих і 7 чорних кульок дістали одну. Яка ймовірність, що витягнута кулька біла?

Розв'язання. Нехай витягли білу кульку − подія A. Загальна кількість випробувань $n = 5 + 7 = 12$, білих кульок 5, тому число сприятливих випробувань $m = 5$, тому $p(A) = \frac{5}{12}$.

Приклад 3. При підкиданні двох кубиків, знайти ймовірність, що сумарна кількість очок буде не менша 10.

Розв'язання. Нехай сумарна кількість очок при підкиданні двох кубиків буде не менша 10 − подія A. З умови задачі $n = 6 \cdot 6 = 36$, $m = 4$ (можливі випадки: 6+6, 5+6, 6+5, 5+5, 6+4, 4+6). Тоді, $p(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

<u>Приклад 4.</u> Знайти ймовірність випадання одного герба при підкиданні двох монет.

<u>Розв'язання</u>. Нехай випав один герб при підкиданні двох монет − подія A. З умови задачі $n = 2 \cdot 2 = 4$, $m = 1$. Тоді, $p(A) = \frac{1}{4}$.

4. Статистичне визначення ймовірностей:

Нехай маємо скриньку з 10 кульками, з яких 4 білих (отже імовірність дістати одну білу кульку буде 0,4). Скринька закрита і має невеликий люк, через який можна дістати одну кульку. Перед дослідженням ставимо задачу: знайти можливість дістати білу кульку, якщо дозволяється діставати необмежену кількість разів по одній кульці і після запису її кольору повертати у скриньку. Нехай дослідник проведе 10000 вилучень, серед яких біла кулька зустрінеться 4125 разів. У цьому випадку відношення $\frac{m}{n} = \frac{4125}{10000} = 0{,}4125$ буде відносною частотою появи білої кульки у сьогоднішньому досліді. Зрозуміло, що в наступному аналогічному досліді число білих кульок буде іншим (наприклад, 3997). Значення частоти появи кульки білого кольору буде 0,3997. Таких дослідів можна провести досить багато. Наприклад, якщо цей дослід проводити кожен день протягом, то будемо мати 365 значень відносних частот, деякі з них навіть можуть повторюватися. Аналіз отриманих значень показує, що є таке число, навколо якого групуються всі отримані значення відносних частот. У нашому випадку це число буде близьким до числа 0,4.

Число, навколо якого групуються значення відносних частот, називається *статистичною ймовірністю*.

5. Геометричне визначення ймовірностей:

Класичне означення ймовірностей придатне лише для експериментів з обмеженим числом рівномірних елементарних подій, тобто коли простір елементарних подій обмежений. Позначимо простір елементарних подій Ω

(омега). Якщо ж простір подій є неперервним, то для обчислення ймовірності використовується геометрична ймовірність: $P(A)=\dfrac{m(A)}{n(\Omega)}$.

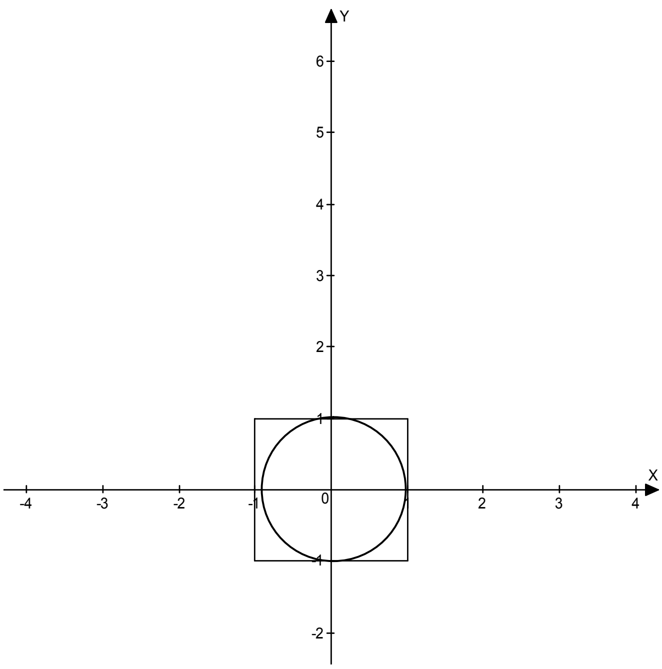
Якщо множина Ω вимірюється в лінійних одиницях, то $P(A)$ дорівнюватиме відношенню довжини, якщо Ω вимірюється в квадратних одиницях, то $P(A)$ дорівнюватиме відношенню площ, і т. ін.

<u>Приклад 1:</u> По трубопроводу між пунктами А і В довжиною 2 км перекачують нафту. Яка ймовірність того, що пошкодження через певний час роботи трубопроводу станеться на ділянці 100 м.

<u>Розв'язання:</u> Простір елементарних подій $\Omega=\{0\le l\le 2км\}$, тоді $A=\{0\le l\le 0{,}1км\}$. Тоді, $P(A)=\dfrac{m(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{0{,}1}{2}=\dfrac{1}{20}$.

<u>Приклад 2:</u> Задана множина $\Omega=\{-1\le x\le 1;-1\le y\le 1\}$. Яка ймовірність того, що навмання взяті два числа $(x;y)$ утворять координати точки, яка влучить в область $x^2+y^2=1$.

<u>Розв'язання:</u> Зобразимо вказані в умові множини на рисунку:



$$P(A)=\frac{m(A)}{n(\Omega)}=\frac{S_{круга}}{S_{квадрата}}=\frac{\pi R^2}{a^2}=\frac{3{,}14\cdot 1}{2^2}=\frac{3{,}14}{4}=0{,}785.$$

Д.з.: «Т. й.» Шевченко Р.Л., Ревицька У.С. Вступ. Розділ ІІ. § 1–4.