Лекція №12

Оцінка достовірності різниць між групами

1. Визначення помилки репрезентативності.
2. Оцінка достовірності різниць між групами за критерієм Стьюдента.
3. Оцінка достовірності різниць між групами за критерієм Фішера

1. Визначення помилки репрезентативності

Вивчаючи певну ознаку, неможливо дослідити усі об'єкти генеральної сукупності тому, що вона, як правило, є дуже численною, можливо навіть складається з нескінченно великого числа членів.

Тому робиться вибірка об'єктів, які і досліджуються. При цьому постає таке питання: чи можливо за результатами, отриманими при вивченні вибірки, робити висновки про всю генеральну сукупність?

Характеризуючи цілу сукупність лише за її частиною, неможливо уникнути помилок, які називаються помилками репрезентативності. Навіть за ідеальної організації дослідницької роботи з'являються помилки такого типу.

Помилка репрезентативності середньої арифметичної залежить від двох величин: від різноманітності ознаки у генеральній сукупності і від чисельності вибірки. Чим менша степінь різноманітності (на її величину вказує середнє квадратичне відхилення) і чим більша кількість вибраних для дослідження об'єктів, тим меншою є величина помилки репрезентативності вибіркового середнього арифметичного.

Для розрахунку величини помилки використовується формула:

$$\Delta = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \tag{1}$$

де $\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{X}\right)^2}{n-1}}$, X_i – значення i-тої варіанти, $i=1,...,n$, $\overline{X}$ – середнє арифметичне вибірки, n – об'єм вибіркової сукупності.

Тепер будь-яку ознаку можна представити у формі:

$$x = \overline{X} \pm \Delta.$$

Приклад 1. Було зроблено 5 вимірів вмісту нітратів в томатах (в умовних одиницях): 13,27; 14,36; 14,19; 13,46; 13,47. Обчислити помилку середнього арифметичного.

Розв'язання: Обчислимо середнє арифметичне вмісту нітратів в томатах:

$$\overline{X} = \frac{13{,}27 + 14{,}36 + 14{,}19 + 13{,}46 + 13{,}47}{5} = 13{,}75.$$

Обчислимо середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(13{,}27 - 13{,}75)^2 + (14{,}36 - 13{,}75)^2 + (14{,}19 - 13{,}75)^2 + (13{,}46 - 13{,}75)^2 + (13{,}47 - 13{,}7}{5-1}}$$

$\approx 0{,}494$.

Тоді: $\Delta = \dfrac{0{,}494}{\sqrt{5}} \approx 0{,}221$.

Отже, вміст нітратів в томатах можна представити у вигляді: 13,75±0,221.

2. Оцінка достовірності різниць між групами за критерієм Стьюдента

Якщо аналізу піддаються дві (чи більше) групи тварин, виникає питання оцінки різниці між групами за аналізованим показником. Наприклад, у першому господарстві жива маса свиней перед забоєм склала 115,7±1,2 кг, а в другому господарстві 125,5 ± 2,5 кг. Порівняємо середні значення в групах, визначивши цю різницю у відсотках. Ми виявляємо, що у другому господарстві маса свиней на 8,5% більша, ніж у першому (якщо показник першого господарства взяти за 100%). Але залишається питання, чи є ця різниця статистично достовірною, тобто є не випадковою, а закономірною за виявлених характеристик груп.

Найбільш поширеною є оцінка достовірності різниць між групами за методом Стьюдента. Для цього визначається критерій достовірності різниці за формулою:

$$t = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2}}, \qquad (2)$$

де $\overline{X}_1$ і $\overline{X}_2$ – середні значення в групах, Δ_1 і Δ_2 – помилки репрезентативності.

Обчислений критерій t порівнюється зі стандартним (табличним) значенням критерія Стьюдента t_{st} для $n = n_1 + n_2 - 2$, де n_1 та n_2 – кількість вимірів у групах (див. у табл. 1 додатку).

Якщо вирахуваний критерій t більший стандартного значення критерію Стьюдента t_{st} для p<0,05, це означає, що різниця між групами є достовірною з надійністю 95% (тобто різницю можна очікувати у 95 випадках із 100). Якщо t < <t_{st} для p<0,01, різниця достовірна з надійністю 99 %, якщо t < t_{st} для p<0,001, різниця достовірна з максимальною надійністю 99,9 %.

У випадку, якщо $t > t_{st}$ – це означає, що за цією різницею між групами не можна зробити висновок про наявність чи відсутність достовірної різниці між групами (потрібні додаткові дослідження).

<u>Приклад 2.</u> У досліді перевіряли дію добрив на урожайність картоплі (ц/га):

Контрольна група	121	143	145	149	150
Дослідна група	170	180	188	196	187

Визначити оцінку достовірності за критерієм Стьюдента.

<u>Розв'язання:</u> Знайдемо середні арифметичні та середні квадратичні відхилення урожайності картоплі обох груп. Для першої групи:

$$\overline{X}_1 = \frac{121 + 143 + 145 + 149 + 150}{5} = 141{,}6.$$

Обчислимо середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{(121 - 141{,}6)^2 + (143 - 141{,}6)^2 + (145 - 141{,}6)^2 + (149 - 141{,}6)^2 + (150 - 141{,}6)^2}{5 - 1}} \approx$$
$$\approx 11{,}87.$$

Тоді: $\Delta_1 = \dfrac{11{,}87}{\sqrt{5}} \approx 5{,}31$.

Для другої групи:

$$\overline{X}_2 = \frac{170 + 180 + 188 + 196 + 187}{5} = 184{,}2.$$

Обчислимо середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma_2 = \sqrt{\frac{(170 - 184{,}2)^2 + (180 - 184{,}2)^2 + (188 - 184{,}2)^2 + (196 - 184{,}2)^2 + (196 - 184{,}2)^2}{5 - 1}} \approx$$
$$\approx 9{,}76.$$

Тоді: $\Delta_2 = \dfrac{9,76}{\sqrt{5}} \approx 4,36$.

Отже, критерій достовірності різниці дорівнює:

$$t = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2}} = \frac{141,6 - 184,2}{\sqrt{5,31^2 + 4,36^2}} = \frac{42,6}{\sqrt{47,2057}} \approx 6,2.$$

Обчислимо n: $n = n_1 + n_2 - 2 = 5 + 5 - 2 = 8$.

Знайдемо t_{st} за таблицею 1 додатку для n=8: $t_{st} = \{2,3 - 3,4 - 5,0\}$. Оскільки $t<t_{st}$ для p<0,001, різниця достовірна з максимальною надійністю 99,9 %.

3. Оцінка достовірності різниць між групами за критерієм Фішера

Визначити достовірність різниці між групами можна за критерієм Фішера за формулою:

$$F = \frac{\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right)^2}{\sigma_z^{\ 2}} \cdot \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} \geq F_{st} \begin{Bmatrix} \nu_1 = 1 \\ \nu_2 = n_1 + n_2 - 2 \end{Bmatrix}, \qquad (3)$$

де F – критерій Фішера; $\overline{X}_1$ і $\overline{X}_2$ – середні арифметичні;

σ_z – випадкова варіанса, яку обраховують за формулою:

$$\sigma_z^{\ 2} = \frac{n_1(n_1 - 1)\Delta_1^{\ 2} + n_2(n_2 - 1)\Delta_2^{\ 2}}{n_1 + n_2 - 2}; \qquad (4)$$

n_1, n_2 – кількість вимірів у групах.

Вирахуваний критерій F порівнюється зі стандартним критерієм Фішера F_{st} (табл. 2 додатку) для трьох значень рівня надійності 0,95, 0,99, 0,999, як і у попередньому методі.

Приклад 3. Порівнюючи масу (кг) дорослих індиків двох порід після однакової відгодівлі, отримані наступні показники:

I порода	4,1	3,9	4,3	3,8	3,8	4,0
II порода	4,3	4,4	4,3	4,5	4,6	4,5

Визначити оцінку достовірності за критерієм Фішера.

Розв’язання: Знайдемо середні арифметичні та середні квадратичні відхилення мас індиків обох порід. Для першої породи:

$$\overline{X}_1 = \frac{4,1 + 3,9 + 4,3 + 3,8 + 3,8 + 4,0}{6} = 3,98.$$

Обчислимо середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{(3{,}98-4{,}1)^2+(3{,}98-3{,}9)^2+(3{,}98-4{,}3)^2+(3{,}98-3{,}8)^2+(3{,}98-3{,}8)^2+(3{,}98-4{,}0)^2}{6-1}}$$

$\approx 0{,}194$.

Тоді: $\Delta_1 = \frac{\sigma_1}{\sqrt{6}} = \frac{0{,}194}{\sqrt{6}} \approx 0{,}079$.

Для другої групи:

$$\overline{X}_2 = \frac{4{,}3+4{,}4+4{,}3+4{,}5+4{,}6+4{,}5}{6} = 4{,}43.$$

Обчислимо середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma_2 = \sqrt{\frac{(4{,}43-4{,}3)^2+(4{,}43-4{,}4)^2+(4{,}43-4{,}3)^2+(4{,}43-4{,}5)^2+(4{,}43-4{,}6)^2+(4{,}43-4{,}5}{6-1}}$$

$\approx 0{,}121$.

Тоді: $\Delta_2 = \frac{\sigma_2}{\sqrt{6}} = \frac{0{,}121}{\sqrt{6}} \approx 0{,}049$.

Обрахуємо випадкову варіанту σ_z за формулою:

$$\sigma_z^2 = \frac{n_1(n_1-1)m_1^2 + n_2(n_2-1)m_2^2}{n_1+n_2-2} = \frac{6\cdot 5\cdot 0{,}079^2 + 6\cdot 5\cdot 0{,}049^2}{6+6-2} \approx 0{,}012.$$

Тоді, $F = \frac{(\overline{X}_1-\overline{X}_2)^2}{\sigma_z^2}\cdot\frac{n_1 n_2}{n_1+n_2} = \frac{(3{,}98-4{,}43)^2}{0{,}012}\cdot\frac{6\cdot 6}{6+6} = 50{,}6$.

Обчислимо ν_2: $\nu_2 = n_1 + n_2 - 2 = 5+5-2 = 8$.

Знайдемо F_{st} (табл. 3 додатку) для $\begin{Bmatrix}\nu_1 = 1\\ \nu_2 = 10\end{Bmatrix}$: $F_{st} = \{25{,}0 - 10 - 21{,}0\}$. Отже різниця достовірна з максимальною надійністю 99,9 %.