Лекція 1.

Основні поняття комбінаторики.

1. Скінченні множини та операції над ними
2. Предмет комбінаторики.
3. Перестановки.
4. Розміщення.
5. Сполучення.

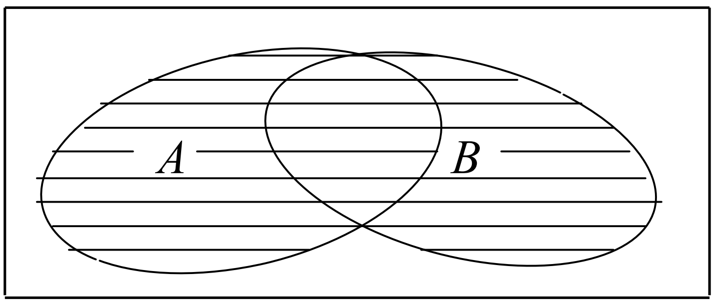
1. Скінчені множини та операції над ними

В основі розповсюдженого теоретико-множинного методу викладання теорії ймовірностей лежить припущення, що кожному досліду поставлено у відповідність деяку множину елементів, які дають повну інформацію про можливі результати цього досліду.

Всяка сукупність довільних елементів утворює множину. Множина вважається визначеною, якщо відомі всі її елементи. Якщо кількість елементів множини скінчена, то множина називається скінченою.

Множини позначають великими латинськими літерами A, B, C тощо, а їх елементи відповідно малими літерами $a, b, c...$.

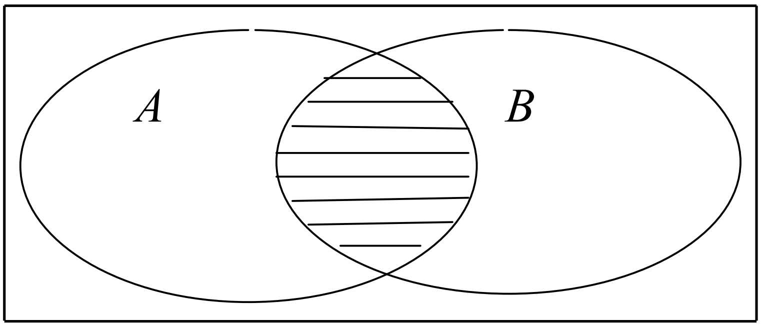
Озн. 1: Сумою або об'єднанням множин A та B називається множина $C = A \cup B = A + B$, яка складається з елементів, що належать хоч одній з цих множин.



$A + B = A \cup B$

Приклад 1. Нехай множина A складається з трьох елементів 1,2,3, а множина B також з трьох елементів 2,3,4. Це записується: $A = \{1;2;3\}$, $B = \{2;3;4\}$. Тоді $A + B = \{1;2;3;4\}$.

Озн. 2: Добутком або перерізом множин A та B називається множина $C = A \cap B = A \cdot B$, якій належать тільки спільні для обох множин елементи.



$C = A \cap B = A \cdot B$

Приклад 2. Для множин $A = \{1;2;3\}$ і $B = \{2;3;4\}$ перерізом буде множина $C = \{2;3\}$.

2. Предмет комбінаторики

Комбінаторика − розділ математики, в якому вивчають методи обчислення кількості різних множин, вибраних за певними правилами.

Комбінаторику розглядають як вступ до теорії ймовірностей, тому що методи комбінаторики допомагають в теорії ймовірностей виконати підрахунок числа можливих результатів.

Теорема 1: Принцип суми: Якщо множина A містить n елементів, а множина $B - m$ елементів, і множини не перетинаються, то множина $A \cup B$ вміщує $n + m$ елементів.

Правило суми можна сформулювати ще й так: якщо вибір A можна здійснити n способами, а вибір B − відповідно m способами, то вибір A або B можна здійснити $n + m$ способами.

Приклад 3. Для проведення Олімпіади треба вибрати місто. У східній півкулі Землі запропоновано 5 міст, а в західній − 4. Скількома способами можна вибрати місто для проведення Олімпіади?

Розв’язання: Вибір A (зі східної півкулі) можна здійснити 5-ма способами, а вибір B − 4-ма способами. Загальна кількість способів: $4 + 5 = 9$.

Теорема 2: Принцип добутку: Для множин $A = \{a_1, a_2, \ldots a_n\}$ та $B = \{b_1, b_2, \ldots b_m\}$ множина C всіх можливих пар з елементів обох множин містить $n \cdot m$ елементів і має вигляд: $C = \{(a_i, b_j), де\ i = 1,2,\ldots,n;\ j = 1,2,\ldots,m\}$.

Сформулюємо це правило по-іншому. Якщо вибір A можна здійснити n різними способами, і для кожного з цих способів вибір B можна здійснити m способами, то вибір A і B можна здійснити $n \cdot m$ способами.

Приклад 4. З пункту A в пункт B веде 6 шляхів, а з пункту B в пункт C 4 шляхи. Скількома способами можна проїхати з пункту A до пункту C?

Розв'язання: Для кожного (наприклад, верхнього з шести шляхів з A в B існує чотири шляхи (способи) потрапити з B до C. Тому на підставі правила добутку дістанемо: $6 \cdot 4 = 24$.

Існує достатня кількість математичних задач комбінаторного типу, своєрідність яких показують наступні приклади:

1. Скількома способами можемо вишикувати 5 студентів?
2. Скільки п'ятизначних номерів можна скласти з чисел від 0 до 9?
3. Скількома способами група з 25 студентів може обрати делегацію з 4-х чоловік?

Комбінаторна математика оперує поняттями переставлення, розміщення та сполучення (комбінації).

3. Перестановки.

Озн. 3: Множини, для яких істотним є порядок розташування елементів, називаються упорядкованими. Дві упорядковані множини називаються рівними, якщо вони складаються з однакових і однаково розташованих елементів. Тому множини {a,b,c} і {b,c,a} − це різні упорядковані величини.

Нехай скінчена упорядкована множина Ω складається з n пронумерованих елементів. Будь-який спосіб розташування цих елементів складає результат дослідження.

Озн. 4: Перестановкою P_n називається число всіх можливих способів розташування елементів.

$$P_n = n!, \tag{1}$$

Приклад 5. Задана множина $A = \{1;2;3\}$. Знайти число переставлень.

Розв'язання: З елементів множини чисел можемо отримати такі сполуки: 1,2,3 1,3,2 2,1,3 2,3,1 3,1,2 3,2,1, тобто число переставлень $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

Таким чином, переставлення дають можливість знайти число способів упорядкування множини, яка складається з n елементів. Для пустої множини (немає жодного елемента) існує єдиний спосіб упорядкування її, який вказує на існування пустої множини. Тому $0! = 1$.

Приклад 6. Скількома способами можна вишикувати 5 студентів?

Розв'язання: Маємо групу з 5 студентів, яких можемо поставити в ряд і переставляти між собою. Число способів такого розташування буде переставленням з 5 чоловік, тобто: $P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

Висновок. Переставлення з n елементів складаються з одних і тих же елементів і відрізняються між собою лише порядком розташування.

4. Розміщення.

Розіб'ємо множину Ω на упорядковані підмножини, які складаються з m елементів кожна, так щоб підмножини відрізнялись одна від другої або порядком розташування елементів, або самими елементами. Отримуємо певне елементарне розміщення елементів у підгрупах як результат досліду.

Озн. 5: Розміщенням A_n^m з n елементів по m називається число таких можливих дослідів, що обраховується за формулою

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)...(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}. \qquad (2)$$

Приклад 7. Знайти число розміщень з 3-х елементів, заданих числами 1,2,3.

Розв'язання: Розміщення з трьох елементів по два будуть: (1,2), (1,3), (2,1), (2,3), (3,1), (3,2). Розміщення (1,2) і (2,1) відрізняються лише порядком розташування елементів, тоді як розміщення (1,2) і (1,3) відрізняються самими елементами (хоч би одним): $A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6$.

Приклад 8. Скільки п'ятизначних номерів можна скласти з чисел від 0 до 9, так, щоб всі цифри в кожному номері були різними?

Розв'язання: За умовою задано 10 чисел, з яких необхідно скомпонувати блоки по 5 номерів. Число розміщень буде:

$$A_{10}^{5}=\frac{10!}{5!}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}=6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10=30240.$$

5. Сполучення (комбінація).

Розіб'ємо множину Ω на упорядковані підмножини по m елементів кожна, які відрізняються між собою тільки самими елементами (хоч би одним).

Озн. 6: Сполученням або комбінацією C_n^m з n елементів по m називається число таких можливих дослідів, що обраховується за формулою

$$C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}. \quad (3)$$

За визначенням сполучення відрізняється від розміщення тільки відсутністю підмножин, в яких елементи відрізняються лише порядком розташування одних і тих же чисел, яких (порядків) існує $m!$.

<u>Приклад 9.</u> Скількома способами з 25 студентів можна вибрати делегацію з чотирьох осіб?

<u>Розв'язання:</u> Ясно, що склад групи не зміниться від перестановки членів групи місцями, тому маємо справу зі сполученнями, кількість яких визначається за формулою:

$$C_{25}^{4}=\frac{25!}{4!\cdot(25-4)!}=\frac{25!}{4!\cdot21!}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot.....\cdot21\cdot22\cdot23\cdot24\cdot25}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot1\cdot2\cdot3\cdot...\cdot21}=12650$$

Д.з.: «Т. й.» Шевченко Р.Л., Ревицька У.С. Вступ. Розділ І. § 1–3.