Лекція 7.

Тема: Еластичність функції багатьох змінних

1. Означення еластичності функції двох змінних
2. Виробнича функція Кобба-Дугласа
3. Попит на конкурентні товари

1. Означення еластичності функції двох змінних

У попередньому розділі було введено поняття еластичності функції однієї змінної. Аналогічно вводиться поняття еластичності функції багатьох змінних.

Введемо це поняття для функції двох змінних $z = f(x, y)$.

Означення: Еластичністю функції $z = f(x, y)$ у точці (x_0, y_0) за змінною x називають границю: $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta_x z}{z} : \frac{\Delta x}{x}\right) = E_x\left(z(x_0; y_0)\right)$.

Еластичністю функції $z = f(x, y)$ у точці (x_0, y_0) за змінною y називають границю: $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta_y z}{z} : \frac{\Delta y}{y}\right) = E_y\left(z(x_0; y_0)\right)$.

Кажуть, що $E_x (z)$ – коефіцієнт еластичності z за x, а $E_x (z)$ – коефіцієнт еластичності z за y (позначення точки часто пропускають).

З означення випливають такі формули:

$$E_x\left(z(x_0; y_0)\right) = \frac{x}{z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = x(\ln z)'_x ;$$

$$E_y\left(z(x_0; y_0)\right) = \frac{y}{z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = y(\ln z)'_y .$$

<u>Приклад.</u> Знайти коефіцієнти еластичності за x і за y функції $z = x^y$ у точці $(4; 3)$.

Згідно останніх формул:

$$E_x\left(z(x_0; y_0)\right) = x(\ln z)'_x = x\left(\ln x^y\right)'_x = y;$$

$$E_y\left(z(x_0; y_0)\right) = x(\ln z)'_y = x\left(\ln x^y\right)'_y = y \ln x .$$

Підставивши в отримані рівності координати точки *(4; 3)* маємо:

$$E_x(z(4;3)) = 3;\ E_y(z(4;3)) = 3\ln 4.$$

В економічному аналізі процесу виробництва за допомогою виробничих функцій визначаються такі показники, часткові еластичності за факторами виробництва та еластичність виробництва.

<u>Означення.</u> Відношення граничної продуктивності і-го ресурсу M_i до його середньої продуктивності $\overline{z_i}$ називають частинною еластичністю випуску за *і-м* фактором виробництва й позначать: $E_{x_i}(f) = \frac{M_i}{\overline{\overline{z_{x_i}}}} = \frac{x_i}{f(x)} \cdot \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$.

Суму $E(x) = \sum_{i=1}^{n} E_{x_i}$ називають еластичністю виробництва.

З економічного погляду еластичності характеризують відсоток приросту обсягу випуску продукції зі збільшенням витрат ресурсу на 1 %.

2. Виробнича функція Кобба-Дугласа

Аналіз виробництва здійснюється за допомогою теорії виробничих функцій, виникнення якої відносять до 1928 р., коли було опубліковано статтю «Теорія виробництва» американських учених – економіста Поля Дугласа й математика Чарльза Кобба. В цій статті було здійснено спробу визначити емпіричним шляхом вплив витрачених капіталу й праці на обсяг випуску продукції в переробній промисловості США. На підставі статистичних даних за 1899-1922 рр. було поставлено такі задачі:

1) визначити клас функцій, який найкраще наближує співвідношення між трьома вибраними характеристиками виробничої діяльності;

2) знайти числові параметри, що задають конкретну функцію;

3) порівняти добуті результати – значення функцій – із фактичними даними.

У 1928 р. ними було запропоновано степеневу виробничу функцію такого вигляду:

$$\boldsymbol{Q=AK^{1-\alpha}L^{\alpha}},$$

де Q – обчислений або очікуваний індекс виробництва продукції обробної промисловості за деякий характерний інтервал часу;

L – індекс зайнятості в обробній промисловості;

K – індекс постійного капіталу;

A, α – сталі додатні величини, що характеризують технологію виробництва.

Вибір степеневої функції було зумовлено двома причинами:

1) степенева функція є однією з найпростіших із нелінійних функцій і за допомогою логарифмування зводиться до лінійної;

2) вона враховує нульовий ефект виробництва: якщо один із факторів дорівнює нулю, то й виробнича функція дорівнює нулю. Економічно це означає, що, не витрачаючи жодного з видів ресурсів, неможливо одержати продукцію.

Використовуючи статистичні дані за зазначений період, Ч.Кобб і П.Дуглас одержали таку виробничу функцію для обробної промисловості США:

$$Q = 1{,}01L^{0,75}K^{0,25} \quad \left(R^2 = 0{,}9402\right).$$

Тут R^2 – коефіцієнт множинної детермінації, що показує, яка частина змін залежної змінної (у даному випадку – Q) обумовлена змінами незалежних змінних (L, K). Його значення говорить про те, що зміни Q на 94% обумовлені змінами L і K. Зауважимо, що значення показників ступеня за незалежних змінних у сумі дорівнює одиниці.

Щоб оцінити внесок кожного фактора в кінцевий продукт, Ч.Кобб і П.Дуглас за допомогою диференціального числення, використовуючи часткові похідні, розрахували граничний продукт праці та капіталу:

$$MP_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = (0{,}75)\,(1{,}01)L^{-0{,}25}K^{0{,}25} = 0{,}7575L^{-0{,}25}K^{0{,}25};$$

$$MP_K = \frac{\partial Q}{\partial K} = (0{,}25)\,(1{,}01)L^{0{,}75}K^{-0{,}75} = 0{,}2525L^{0{,}75}K^{-0{,}75}.$$

Середні продукти праці та капіталу були визначені за загальноприйнятими формулами:

$$AP_L = \frac{Q}{L} = \frac{1{,}01L^{0{,}75}K^{0{,}25}}{K} = 1{,}01L^{-0{,}25}K^{0{,}25};$$

$$AP_K = \frac{Q}{K} = \frac{1{,}01L^{0{,}75}K^{0{,}25}}{K} = 1{,}01L^{0{,}75}K^{-0{,}75}.$$

Еластичності випуску за кожним змінним фактором становили:

$$E_{Q,L} = \frac{MR}{AP_L} = \frac{(0{,}75)(1{,}01)L^{-0{,}25}K^{0{,}25}}{1{,}01L^{-0{,}25}K^{0{,}25}} = 0{,}75;$$

$$E_{Q,K} = \frac{MP_K}{AP_K} = \frac{(0{,}75)(1{,}01)L^{0{,}75}K^{-0{,}75}}{1{,}01L^{0{,}75}K^{-0{,}75}} = 0{,}25.$$

Отже, у функції, отриманій Коббом і Дугласом, збільшення обсягу трудовитрат на 1% веде до збільшення випуску на 0,75%, а збільшення капіталу на 1% збільшує випуск на 0,25%. Оскільки значення $E_{Q,L}$ та $E_{Q,K}$ менше одиниці, випуск продукції відносно нееластичний і за працею, і за капіталом.

3. Попит на конкурентні товари

Попит на будь-який товар залежить від ціни його одиниці, якості, упакування та інших факторів, наприклад ціни іншого товару.

Розглянемо випадок двох товарів x і y. Нехай p_x і p_y – ціни за одиницю відповідного товару, а q_x та q_y – кількісний попит на товари x і y відповідно.

Можна стверджувати, що товари x і y взаємопов'язані, якщо попит на товар x залежить не тільки від його ціни, а й від ціни товару y. Для пари товарів, які доповнюють один одного (наприклад, чай і цукор), або пари товарів, які замінюють один одного (наприклад, масло й маргарин), природно вважати, що попит на кожен товар залежить від обох цін p_x і p_y.

Нехай товари x і y взаємопов'язані. Тоді q_x, q_y будуть функціями двох змінних: $q_x = q_x\ (p_x,\ p_y)$, $q_y = q_y\ (p_x,\ p_y)$. Припустимо, що не тільки ціни визначають попит, а й навпаки, попит визначає ціни. Інакше кажучи, вважатимемо, що ціни p_x і p_y виражаються через попит, тобто є оберненими функціями $p_x = p_x\ (q_x, q_y)$, $p_y = p_y\ (q_x, q_y)$.

Маємо дві пари взаємно обернених функцій. Тоді матрицю коефіцієнтів еластичності цін за попитом можна знайти як обернену матрицю $E_x\ (p) = (E(x))^{-1}$ до матриці $E_x\ (p)$ коефіцієнтів еластичності попиту за цінами.

Частинні похідні функції попиту виражають:

$\frac{\partial q_x}{\partial p_x}$ – граничний попит на товар x відносно ціни p_x;

$\frac{\partial q_y}{\partial p_y}$ – граничний попит на товар x відносно ціни p_y

Означення. Товари x і y називають конкурентними, якщо $\frac{\partial q_x}{\partial p_x} \geq 0$ і $\frac{\partial q_y}{\partial p_y} \geq 0$.

Еластичність попиту на товар x відносно ціни p_x обчислюється формулою:

$$E_{p_x}(q_x) = \frac{p_x}{q_x} \cdot \frac{\partial q_x}{\partial p_x}.$$

Еластичність попиту на товар x відносно ціни p_y обчислюється за формулою:

$$E_{p_y}(q_x) = \frac{p_y}{q_x} \cdot \frac{\partial q_x}{\partial p_y}.$$

Отже, попередня формула задає ***перехресний коефіцієнт еластичності попиту,*** який наближено показує відсоткову зміну попиту на даний товар зі зміною ціни альтернативного товару на 1 %.

Означення. Товари x і y називають взаємозамінними, якщо $E_{p_y}(q_x) > 0$.

У цьому разі збільшення ціни одного товару спричиняє зростання попиту на інший товар.

Означення. Товари x і y називають взаємодоповняльними, якщо $E_{p_y}(q_x) < 0$.

У цьому разі збільшення ціни будь-якого товару спричиняє зменшення попиту на нього.

Приклад. Задано функцію попиту $q_x = 500 + 3p_y - 6p^2_x$ на товар x, де p_x і p_y – ціни товарів x і y відповідно. Знайти коефіцієнт еластичності попиту відносно цін p_x і p_y якщо $p_x = 5$, $p_y = 30$.

Розв'язання.