Лекція 6.

Тема: Задачі оптимізації виробництва

1. Задача багаторесурсної фірми
2. Задача оптимального розподілу товарів
3. Задача визначення мінімальних витрат фірми
4. Приклади розв'язування задач

1. Задача багаторесурсної фірми

Раніше ми розглядали теорію одноресурсної фірми. В загальному випадку, тобто коли фірма використовує не один ресурс, а кілька, багато понять теорії аналогічні.

Нехай фірма випускає один товар (його обсяг позначимо через q) і використовує для його виробництва певні ресурси. Позначимо через $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – обсяги різних ресурсів, які фірма використовує для випуску продукції, а через $p_1, p_2, \ldots, p_n$ – відповідно їх ціни. Витрати виробництва однозначно пов'язані з випуском продукції і цей зв'язок визначає виробнича функція $q = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, яка виражає обсяг q продукції, що випускається, через обсяги $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ресурсів, які використовуються у виробництві.

Припускатимемо, що виробнича функція задовольняє необхідні умови диференційовності, а також умови виробнича функція є не спадною в економічній області E. Звідси випливає, що її частинні похідні, які називаються граничними продуктами, невід'ємні в цій області.

Означення. Доходом R фірми за певний період часу (наприклад, у певному році) називають добуток загального обсягу продукції q, що випускається, на ринкову ціну p_0 цієї продукції:

$$R = q\,p_0.$$

Означення. Витратами C фірми називають її загальні витрати за певний інтервал часу, тобто

$$C = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n,$$

де $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – обсяги ресурсів, які використовує фірма (фактори виробництва); $p_1, p_2, \ldots, p_n$ – ринкові ціни на ці ресурси (фактори виробництва).

Означення. Прибутком P фірми за певний інтервал часу називають різницю між одержаним нею доходом та витратами виробництва:

$$P = R - C.$$

У теорії фірми вважають: якщо фірма функціонує в умовах чистої конкуренції, то на ринкові ціни $p_1, p_2, \ldots, p_n$ вона вплинути не може, тобто фірма «погоджується» із цими цінами. Випадки функціонування фірми в умовах чистої монополії спеціально розглядаються в межах курсу мікроекономіки.

Основна задача багаторесурсної фірми полягає в тому, що фірма намагається одержати максимальний прибуток шляхом раціонального розподілу ресурсів, які використовуються у виробництві.

З математичного погляду ця задача зводиться до розв’язання задачі про знаходження максимального значення функції прибутку $P = P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, тобто функцію прибутку досліджують на екстремум і визначають, при яких значеннях вона набув свого найбільшого значення.

Означення. Набір ресурсів $x_1, x_2, \ldots, x_n$, який забезпечують фірмі максимальний прибуток, називають оптимальним.

2. Задача оптимального розподілу товарів

Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_n$ обсяги випуску різних товарів фірмою, а $p_1, p_2, \ldots, p_n$ відповідно їх ціни.

Нехай витрати виробництва цих товарів задаються функцією витрат C. Тоді функція прибутку має вигляд $P = R - C$.

Максимум прибутку природно шукати, як локальний екстремум функції багатьох змінних $P = P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, де $x_n > 0$.

Запишемо необхідні умови існування локального екстремуму $\dfrac{\partial P}{\partial x_i} = 0$,

які приводять до системи алгебричних рівнянь відносно змінних x_i : $p_i = \dfrac{\partial C}{\partial x_i}$.

Ця система реалізує відоме правило економіки: *гранична ціна товару дорівнює граничним витратам на виробництво цього товару.*

Приклад. Нехай фірма випускає два види товарів. Позначимо їх обсяги через x і y. Нехай ціни на ці товари становлять відповідно $p_x = 8$ і $p_y = 10$ *умов. грош. од.*, а функція витрат $C(x, y) = x^2 + xy + y^2$. Знайдемо максимальний прибуток, який може одержати фірма.

Розв'язання. Складемо функцію прибутку фірми:

$$P(x,y) = 8x + 10y - x^2 - xy - y^2.$$

Дослідимо функцію на екстремум…

Отже, максимальний прибуток, який одержить фірма $P_{max}(2; 4) = 28$.

3. Задача визначення мінімальних витрат фірми

Нехай $x_1, x_2, ..., x_n$ – обсяги різних ресурсів, які використовує фірма для виробництва своєї продукції, а $p_1, p_2, ..., p_n$ – відповідно їх ціни. Нехай загальні витрати виробництва фірми задаються функцією витрат $C = C(x_1; x_2, ..., x_n)$. Постає задача: визначити мінімально можливі витрати ресурсів на виробництво фіксованого обсягу продукції.

Ці мінімальні витрати природно шукати, як локальний мінімум функції багатьох змінних $C = C(x_1; x_2, ..., x_n)$, де $x_i > 0$ (за відсутності інших обмежень).

Приклад. Нехай фірма випускає два види товарів. Позначимо їх обсяги через x і y. Нехай функція витрат $C(x, y) = x^2 + 10xy + 200y - 140x$. Знайдемо мінімальні витрати фірми.

Розв'язання. Дослідимо функцію на екстремум:

$$C(x, y) = x^2 + 10xy + 200y - 140x.$$

Отже, мінімальні витрати, які може зазнати фірма $C_{min}(10; 20) = 21600$.

4. Приклади розв'язування задач

1. Виробнича функція (в грошових одиницях) має вигляд $f(x,y) = 30\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{y}$, де x – обсяг першого ресурсу, а y – другого. Ціна одиниці першого ресурсу $p_x=5$, а другого $p_y=10$ умов. грош. од. Визначити максимальний прибуток при використанні ресурсів.

2. Виробнича функція (в грошових одиницях) має вигляд $f(x,y) = 30\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{y}$, де x – обсяг першого ресурсу, а y – другого. Ціна одиниці першого ресурсу $p_x=5$, а другого $p_y=10$ умов. грош. од. Через бюджетні обмеження на ресурси можна витратити не більше ніж 600 умов. грош. од. Визначити оптимальний для виробника набір обсягів ресурсів.

3. Задано виробничу функцію, що залежить від двох змінних: $q(x, y) = 5xy$, де x – витрати основних фондів; y – витрати людської праці, а також задано відповідні ціни на ресурси $p_x=10$ і $p_y=8$ умов. грош. од. Знайти значення величин x та y, які забезпечують мінімальні витрати виробництва за фіксованого обсягу продукції $q_0 = 1600$.

4. Функція корисності має вигляд $U(x,y) = 2ln(x-1)+3ln(y-1)$. Ціни одиниці товарів x і y відповідно становлять $p_x=8$, і $p_y=16$ умов. грош. од. На придбання цих товарів можна витратити 1000 умов. грош. од. Визначити як розподілити цю суму між двома товарами x і y, щоб корисність їх придбання була найбільшою.