РОЗДІЛ ІІ. **Лекція 5.**

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ В ЕКОНОМІЧНИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ

Тема: Аналіз економічних задач за допомогою виробничих функцій

1. Виробничі функції багатьох змінних.
2. Властивості виробничих функцій.
3. Економічні характеристики процесу виробництва.
4. Дослідження функції двох змінних на знаходження екстремумів
5. Приклади економічних задач, що зводиться до знаходження основних характеристик функцій декількох змінних.

1. Виробничі функції багатьох змінних.

Важливими елементами мікро- й макроекономічної теорії раціонального господарювання є, з одного боку, виробник, який витрачає економічні ресурси для виготовлення товарів або надання послуг, а з іншого – виробничі технологічні процеси.

Вивчаючи економічні процеси в сучасному суспільстві для побудови економіко-математичної моделі, яка описує внутрішній бік виробництва, потрібно зібрати необхідну інформацію про фактори й ресурси, які впливають на обсяг продукції, що випускається.

<u>Означення.</u> Виробнича функція (ВФ) – це функція, незалежна змінна x якої набуває значень обсягу ресурсу, котрий використовується у виробництві (фактора виробництва), а залежна змінна у – значення обсягу продукції, котру випускає дане підприємство, фірма або галузь.

Виробничу функцію позначають $y=f(x)$.

Тут x ($x > 0$) і y ($y > 0$) – числові величини, тобто $y=f(x)$ є функцією однієї змінної x. У зв'язку з цим виробничу функцію називають *одноресурсною,* або *однофакторною.* Її область визначення – множина невід'ємних дійсних чисел. Запис $y=f(x)$ означає: якщо ресурс витрачається або використовується в кількості x одиниць, то продукція випускається в кількості $y=f(x)$ одиниць. Знак функції f є характеристикою виробничої функції, яка перетворює ресурс у випуск продукції і пов'язує між собою незалежну змінну x та залежну змінну y.

Введемо поняття виробничої функції багатьох змінних за аналогією. Припустимо, що фірма випускає один вид продукції. Її обсяг позначимо через y, а вектор ресурсів-витрат – через $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

<u>Означення.</u> Виробнича функція багатьох змінних – це функція, незалежні змінні $x_1, x_2, ..., x_n$ якої набувають значень обсягів ресурсів, що використовуються у виробництві (число змінних n дорівнює числу ресурсів), а значення функції виражає обсяг випуску продукції: $y = f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Тут y $(y \geq 0)$ – скалярна величина, а x – векторна; $(x_1, x_2, ..., x_n)$ – координати вектора, тобто $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ є числовою функцією n змінних. Її називають ***багатофакторною виробничою функцією.*** За економічним змістом $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, ..., x_n \geq 0$. Отже, областю визначення багатофакторної виробничої функції є множина n -вимірних векторів x, усі координати яких – невід'ємні числа.

Для окремого підприємства виробнича функція $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ може пов'язувати обсяг випуску продукції з витратами робочого часу за різними видами трудової діяльності, різноманітними видами сировини, енергії, основного капіталу тощо. Виробничі функції такого типу характеризують технологію підприємства.

Будуючи виробничу функцію для регіону або країни в цілому, за обсяг річного випуску y зазвичай беруть їхній сукупний продукт, як ресурси розглядають основний капітал ($x_1 = K$ – обсяг основного капіталу, що використовується протягом року) і працю ($x_2 = L$ витрати праці, що використовується протягом року). Таким чином, отримуємо двофакторну виробничу функцію $y = f(x_1, x_2)= f(K, L)$, наприклад функцію Кобба-Дугласа.

Від двофакторної моделі переходять до трифакторної. За третій фактор іноді беруть обсяг природного ресурсу.

2. Властивості виробничих функцій

Розглянемо багатофакторну виробничу функцію $f\ (x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$. Припустимо, що вона двічі диференційована й має такі ***властивості:***

1. Функція $f\,(x_1, x_2, ..., x_n)$ не спадна в області визначення.

Ця властивість означає, що зі зростанням витрат хоча б одного ресурсу обсяг випуску продукції збільшується.

2. Функція $f\ (x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$ має невід'ємні частинні похідні, які називають ***граничними продуктами***.

Ця властивість означає, що зі зростанням витрат одного ресурсу за незмінного обсягу іншого обсяг випуску продукції збільшується.

3. $f\,(0;\,0;\,0;\,...;\,0) = 0.$

Ця властивість означає, що без ресурсів немає випуску продукції.

3. Економічні характеристики процесу виробництва

В економічному аналізі процесу виробництва за допомогою виробничих функцій використовуються такі показники:

- середні й граничні ефективності;
- коефіцієнти еластичності;
- коефіцієнти заміщення.

Означення. ***Середні показники ефективності*** визначаються за формулою:

$$\overline{z_i} = \frac{f\left(x_1; x_2; ...; x_n\right)}{x_i}$$

і називаються *середньою продуктивністю i-го ресурсу (фактора виробництва),* або *середнім випуском за i-м ресурсом (фактором виробництва).*

Означення. ***Середня фондовіддача*** – це відношення обсягу виробленої продукції до розміру основних фондів:

$$\overline{y_k} = \frac{f\left(L; K\right)}{K}.$$

Означення. ***Середня продуктивність праці*** – це відношення обсягу виробленої продукції до кількості витраченої праці:

$$\overline{y_L} = \frac{f(L;K)}{L}.$$

Зокрема, для розглянутої функції така залежність є спадною функцією. Економічно це можна трактувати так: *зі збільшенням витрат ресурсів середня продуктивність праці знижується.* Це має природне пояснення: оскільки значення другого фактора *K* залишається без змін, то нова робоча сила не забезпечуватиметься додатковими засобами виробництва, що спричинить зниження продуктивності праці.

Означення. Вектор-градієнт, що має координатами частинні похідні виробничої функції називають ***граничним вектор-продуктом,*** або ***вектором граничних продуктів.***

4. Дослідження функції двох змінних на знаходження екстремумів

Неперервна функція $z = f(x, y)$ може мати в області завдання $\begin{pmatrix} x \in [a;b] \\ y \in [c;d] \end{pmatrix}$ максимум і мінімум.

В точках максимуму та мінімуму дотичні, паралельні осям ox та oy, будуть паралельні площині xOy, тому $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ і $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$. Точки, в яких частинні похідні дорівнюють нулю, називаються стаціонарними.

Якщо $z = f(x, y)$ має неперервні похідні першого та другого порядків, то можемо знайти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ і ввести позначення: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = A$ в точці $(x_0; y_0)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = B$ в точці $(x_0; y_0)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = C$ в точці $(x_0; y_0)$.

Обчислимо визначник $\Delta = A \cdot C - B^2$. Якщо

1). $\Delta < 0$, то функція в точці $(x_0; y_0)$ екстремуму не має.

2). $\Delta > 0$, то екстремум існує, причому це максимум, якщо $A < 0$, і мінімум, якщо $A > 0$.

3). $\Delta = 0$, то функція може мати екстремуми, а може їх не мати. В цьому випадку потрібні додаткові дослідження.

Вказані твердження про знак та величину Δ називаються достатньою умовою.

Приклад. Дослідити на екстремум функцію

$$z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20 .$$

Розв'язання. Знаходимо частинні похідні функції:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y + 9 ; \ \frac{\partial z}{\partial y} = -x + 2y - 6 .$$

Розглянемо систему двох рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} 2x - y + 9 = 0 \\ 2y - x - 6 = 0 \end{cases} .$$

Розв'язком цієї системи будуть числа $x = -4$, $y = 1$. Тобто критична точка має координати $M_0(-4;1)$.

Обчислимо частинні похідні другого порядку в точці M_0:

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{M_0(-1;4)} = 2 ; \ C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big|_{M_0(-1;4)} = 2 ; \ B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\Big|_{M_0(-1;4)} = -1.$$

Тоді: $\Delta = A \cdot C - B^2 = 4 - 1 = 3 > 0$. Так як $A > 0$, то існує мінімум функції в точці $M_0(-4;1)$, $z_{\min} = z(-4;1) = -1$.

5. Приклади економічних задач, що зводиться до знаходження основних характеристик функцій декількох змінних

Приклад . Потік пасажирів z виражається функцією $z = \frac{x^2}{y}$, де x – число жителів, y – відстань між містами. Знайти частинні похідні і пояснити їх зміст.

Розв'язання. Похідна $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{y}$ показує, що при одній і тій же відстані між містами збільшення потоку пасажирів пропорційне подвоєному числу жителів. Похідна $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x^2}{y^2}$ показує, що при одній і тій же чисельності жителів збільшення потоку пасажирів обернено пропорційне квадрату відстані між містами.

Приклад. Фірма виробляє два види товарів G_1 і G_2 і продає їх за ціною 1000 грош. од. та 800 грош. од. відповідно. Обсяги випуску товарів Q_1 і Q_2. Функція витрат має вигляд $C=2Q_1^2+2Q_1Q_2+Q_2^2$. Знайти такі значення Q_1 і Q_2, за яких прибуток, отриманий фірмою, максимальний. Знайти цей прибуток.

Розв'язання. Сумарний прибуток від продажу товарів буде:

$$R=1000Q_1+800Q_2$$

Прибуток, який отримає фірма, позначимо $П$. Він являє собою різницю між прибутком R і витратами C, а саме:

$$П = R - C = (1000Q_1+ 800Q_2) - (2Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + Q_2^2).$$

$$П = 1000Q_1+ 800Q_2 - 2Q_1^2 - 2Q_1Q_2 - Q_2^2.$$

Для знаходження максиму цієї функції обчислимо перші та другі частинні похідні:

$$\frac{\partial П}{\partial Q_1}=1000-4Q_1-2Q_2;\ \frac{\partial П}{\partial Q_2}=800-2Q_1-2Q_2.$$

Прирівняємо їх до нуля та знайдемо стаціонарні точки:

$$1000-4Q_1-2Q_2=0\ ;$$

$$800-2Q_1-2Q_2=0\ .$$

Тоді $M_0\ (100;\ 300)$.

$$A=\frac{\partial^2 П}{\partial Q_1^2}\Big|_{M_0}=-4;\ C=\frac{\partial^2 П}{\partial Q_2^2}\Big|_{M_0}=-2;\ B=\frac{\partial^2 П}{\partial Q_1\partial Q_2}\Big|_{M_0}=-2.$$

Тоді: $\Delta = A\cdot C - B^2 = 4 > 0$. Так як $A < 0$, то існує максимум функції в точці $M_0\ (100;\ 300)$, значення якого дорівнює $П = 170000$ грош. од.