

Тема: ПОНЯТТЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ В ЕКОНОМІЦІ.

1. Структура курсу «Оптимізаційні методи і моделі в економічних дослідженнях»

2. Поняття та приклади математичних моделей.
3. Етапи побудови економічної моделі.
4. Класифікація моделей.
5. Робота з моделлю.

1. Структура курсу «Оптимізаційні методи і моделі в економічних дослідженнях»

Курс «Оптимізаційні методи і моделі в економічних дослідженнях» розрахований на 64 години. З них 32 лекційних та 32 практичних занять. У ході курсу буде розглянуто чотири розділи. Такі як:

1. Застосування методів диференціального числення функції однієї змінної в економічному аналізі.
2. Застосування методів диференціального числення функцій багатьох змінних в економічних дослідженнях.
3. Методи і моделі інтегрального числення.
4. Застосування методів диференціальних рівнянь в економічних моделях.

Після вивчення цих розділів буде написано два модулі (по два розділи в одному модулі). Модуль – це письмова перевірка, як практичних так і теоретичних знань. Крім того перевірка знань буде здійснюватися за допомогою написання індивідуальних завдань та виконання творчого завдання по завершенню курсу.

Остаточним контролем знань, вмінь та навичок є екзамен.

2. Поняття та приклади математичних моделей

При вивченні складних економічних процесів та явищ часто застосовується моделювання.

Означення. Модель – це спеціально створений об'єкт, на якому відтворюються певні характеристики досліджуваного явища, а моделювання – це конкретне відтворення цих характеристик, що дає змогу вивчати можливу поведінку явища без проведення експериментів над ним.

Модель – це описання реального явища, події, системи за допомогою знаків, креслень, формул, зразків тощо. Наприклад, моделлю Землі може слугувати глобус, географічна карта, моделлю студента – залікова книжка.

Моделювання є важливим інструментом наукової абстракції, що допомагає виокремити, уособити та проаналізувати суттєві для даного об'єкта характеристики (властивості, взаємозв'язки, структурні та функціональні параметри).

Для економіки, де неможливе будь-яке експериментування, особливого значення набуває математичне моделювання. Завдяки застосуванню потужного математичного апарату воно є найефективнішим і найдосконалішим методом. У свою чергу, математичні методи не можуть застосовуватися безпосередньо щодо дійсності, а лише щодо математичних моделей того чи іншого кола явищ.

Прикладами економічних моделей є:

- моделі споживчого вибору,
- моделі фірми,
- моделі економічного зростання,
- моделі рівноваги на товарних, факторних і фінансових ринках тощо.

Поведінка й значення будь-якого економічного показника залежать практично від безлічі факторів, усі їх урахувати нереально. Але в цьому й немає потреби. Звичайно лише обмежена кількість факторів насправді істотно впливає на досліджуваний економічний показник. Вплив інших факторів настільки незначний, що їх ігнорування не може призвести до істотних відхилень у поведінці досліджуваного об'єкта. Виокремлення й урахування в моделі лише обмеженої кількості реально домінуючих факторів

і є важливою передумовою якісного аналізу, прогнозування й керування ситуацією.

Математична модель, аби бути ефективним інструментом вивчення економічних процесів, насамперед має відповідати таким вимогам:

- будуватися на основі економічної теорії й відбивати об'єктивні закономірності процесів;

- правильно відтворювати функцію та структуру реальної економічної системи;

- відповідати певним математичним умовам (мати розв'язок, узгоджені розмірності тощо).

Природно, результати досліджень будь-якої моделі можуть мати практичну цінність, якщо модель адекватна явищу, що вивчається, тобто досить добре відтворює реальну ситуацію.

3. Етапи побудови економічної моделі.

Процес побудови моделі складається з таких етапів:

- 1) формулюються предмет і мета дослідження;

- 2) у досліджуваній економічній системі виокремлюються структурні чи функціональні елементи, що відповідають поставленій меті, визначаються найважливіші якісні характеристики цих елементів;

- 3) словесно, якісно описуються взаємозв'язки між елементами моделі;

- 4) вводяться символічні позначення для відповідних характеристик економічного об'єкта та формалізуються, наскільки можливо, взаємозв'язки між ними, тим самим формалізується (описується мовою математики) математична модель;

- 5) виконуються розрахунки за математичною моделлю та аналізуються отримані результати.

Зауважимо, що різні за природою економічні явища можуть мати однаковий математичний вираз, хоча економічна інтерпретація моделі та результати розрахунків будуть різними.

За визначенням, будь-яка економічна модель є абстрактною, а отже, неповною. Це пов'язано з тим, що для виокремлення закономірностей функціонування економічного об'єкта потрібно абстрагуватися від інших факторів, які хоч і мають незначний вплив, однак у сукупності можуть визначати не лише відхилення в поведінці об'єкта, а й його поведінку. Звичайно вважають, що всі фактори, невраховані явно в моделі, мають незначний результуючий вплив на процес чи явище, що досліджується. Склад урахованих факторів і їх структура коригуються в процесі вдосконалення моделі.

4. Класифікація моделей

Математичні моделі, що використовуються в економіці, можна поділити на класи за рядом ознак. Залежно від особливостей об'єкта моделювання та застосованого математичного інструментарію виокремлюють такі моделі:

- макро- та мікроекономічні,
- теоретичні та прикладні,
- статичні та динамічні,
- детерміновані та стохастичні,
- оптимізаційні та моделі рівноваги тощо.

Макроекономічні моделі описують економіку загалом, пов'язуючи між собою узагальнені матеріальні та фінансові показники: споживання, інвестиції, зайнятість, процентну ставку, кількість грошей тощо.

Мікроекономічні моделі описують взаємодію структурних і функціональних складових економіки або поведінку окремої складової в ринковому середовищі. Завдяки різноманіттю типів економічних елементів і форм їх взаємодії на ринку мікроекономічне моделювання становить основну частину економіко-математичної теорії. Останніми роками найсуттєвіші теоретичні результати в мікроекономічному моделюванні отримано в процесі дослідження стратегічної поведінки фірм в умовах олігополії.

Теоретичні моделі дають змогу вивчати загальні властивості економіки та її характерних елементів і отримувати нові результати на підставі формальних припущень.

За допомогою **прикладних** моделей можна оцінити певні економічні показники, надати їм конкретних значень виходячи з відповідної статистичної інформації.

У **статичних** моделях описується стан економічного об'єкта в певний момент чи період часу а **динамічні** моделі вивчають взаємозв'язки економічних змінних у часі. Змінні, що вивчаються в динаміці, у статичних моделях мають фіксоване значення. Однак динамічна модель не зводиться до простої суми статичних моделей, а описує взаємодію сил, що рухають економіку.

Детерміновані моделі передбачають жорсткі функціональні зв'язки між змінними моделі, а **стохастичні** – припускають наявність випадкових впливів на досліджувані показники.

У моделюванні ринкової економіки важливе місце належить моделям рівноваги. Вони описують такий стан економіки, коли всі сили, що намагаються вивести її з рівноваги, мають нульову сумарну дію.

Оптимізаційні моделі найчастіше застосовують на мікрорівні: вони дають змогу визначати найкращі рішення в умовах обмежених можливостей.

Предметом економетричного дослідження є прикладні стохастичні економічні моделі, тобто загальні економічні моделі, у яких модельні коефіцієнти набувають конкретних числових значень залежно від використаної статистичної інформації

6. Робота з моделлю.

Моделі і моделювання – важливий інструмент економічної науки. Причому, кінцевою метою моделювання є вивчення не моделі як такої, а реального явища, що відтворюється моделлю.

Робота з моделлю складається з декількох етапів:

1. Завдання та чітке визначення невідомих, які будуть використані в моделі.

2. Визначення тих спрощень, які необхідно зробити, щоб не ускладнювати модель.

3. Висування гіпотез, що пояснюють взаємовідношення невідомих.

4. Вироблення висновків.

Приклад. Знайдіть, за яких умов витрати жерсті на виготовлення консервних банок циліндричної форми заданого об'єму будуть найменшими.

Розв'язання. Складаємо математичну модель до задачі. Суттєвим є те, що банка повинна мати заданий об'єм. Суттєвою є вимога, що витрати жерсті повинні бути найменшими. Ця вимога означає, що площа повної поверхні банки, яка має форму циліндра, повинна бути найменшою. Суттєвими є розміри банки. Несуттєвими є конкретна місткість банки і вид консервів (м'ясних, рибних, овочевих, фруктових), для яких вона призначена. Позначимо місткість банки через V см³ і сформулюємо математичну задачу: «Знайдіть такі розміри циліндра з об'ємом V см³, щоб площа його повної поверхні була найменшою». Позначимо радіус основи циліндра через x см, а його висоту через h см. Тоді об'єм циліндра: $V = \pi x^2 h$. Звідси $h = \frac{V}{\pi x^2}$.

Повна поверхня циліндра:

$$S_n = 2S_{осн.} + S_{б.} = 2\pi x^2 + 2\pi x \cdot \frac{V}{\pi x^2} = 2\pi x^2 + \frac{2V}{x}.$$

Маємо S – функцію однієї змінної x . При чому $x > 0$. Знайдемо її похідну:

$$S'_n = 4\pi x - \frac{2V}{x^2} = \frac{4\pi x^3 - 2V}{x^2}.$$

Знаходимо критичні точки: $\frac{4\pi x^3 - 2V}{x^2} = 0$. Звідси $x = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$. Так як

$$S''_n = 4\pi + \frac{4V}{x^3} > 0 \text{ для будь-якого } x, \text{ то отримане значення радіусу є}$$

мінімальним, а разом з тим найменшим значенням. Обчислимо висоту

консервної банки:
$$x = \frac{V}{\pi x^2} = \frac{V}{\pi \left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \right)^2} = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

Отже, площа повної поверхні циліндра з об'ємом V буде найменшою, якщо циліндр рівносторонній. Таким чином, найменші витрати жерсті на виготовлення консервної банки циліндричної форми будуть за умови, що діаметр основи дорівнюватиме висоті банки.

Варто провести дослідження розмірів консервних банок у кількох магазинах міста. Звернути увагу на наступну продукцію: зелений горошок, кукурудза цукрова, квасоля з овочами і грибами у томатному соусі. Ці консерви упаковані у жерстяні банки, для більшості яких діаметр дна та висота 8,3 см. Такий діаметр основи відповідає Державному стандарту №5981-88. У цьому ж стандарті зазначенні банки у яких діаметр дна 7,4 см.

Для банок з висотою та діаметром основи 8,3 см (вміст 420 мл) площа повної поверхні дорівнює 325 см². Для банок з діаметром основи 4,4 см та висотою 10,4 (вміст 420 мл) площа повної поверхні дорівнює 328 см². Як бачимо, площа поверхні збільшилася на 3, тобто на 1 %.

Враховуємо, що у нашій країні щорічно виготовляють сотні мільйонів банок консервів у жерстяних банках. Не всі вони мають форму рівностороннього циліндра, тобто на їх виготовлення передбачається збільшення витрат жерсті. Зауважимо, що економія 1% жерсті на виготовленні кожної банки дасть можливість за рахунок зекономленого матеріалу додатково виготовити тисячі нових банок.

Узагальнимо поняття моделі. Економічна модель – розумова конструкція, яка виражає окремі причинно-наслідкові зв'язки між, принаймні, двома економічними факторами якогось економічного явища.

Простота економічної моделі порівняно з реальним об'єктом досягається тим, що в ній зберігається лише головне, найбільш важливе, а все другорядне, несуттєве відкидається.

Одним з класичних прикладів економічних моделей є крива виробничих можливостей економічної системи, за допомогою якої описується процес прийняття рішення економічною системою щодо використання обмежених ресурсів в умовах зростаючих потреб.

Домашнє завдання:

Крім розглянутих понять, узагальнити і повторити наступні питання:

1. Поняття похідної.
2. Основні формули та правила диференціювання.
3. Знаходження найбільших та найменших значень функції.