МІНІСТЕРСТВО АГРАРНОЇ ПОЛІТИКИ УКРАЇНИ

БІЛОЦЕРКІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ ВЕТЕРИНАРНОЇ МЕДИЦИНИ

Кафедра фізики та вищої математики

ОСНОВИ ЕЛЕМЕНТАРНОЇ МАТЕМАТИКИ

Навчальний посібник
для самостійного опрацювання

Біла Церква
2005

УДК 517 (075.8)

Рекомендовано до видання вченою радою
факультету ветеринарної медицини
(Протокол №2 від 18 жовтня 2005р.)

Укладачі: О.П. Мельниченко, асистент; Р.Л. Шевченко, канд. фіз-мат наук, доцент; І.Л. Якименко, доктор біол. наук, професор; В.Т. Розумнюк, канд. фіз-мат наук, доцент.

Основи елементарної математики: Навчальний посібник для самостійного опрацювання / О.П. Мельниченко, Р.Л. Шевченко, І.Л. Якименко, В.Т. Розумнюк − Біла Церква, 2005.− с.

Посібник охоплює основні розділи курсу елементарної математики: арифметику, алгебру, тригонометрію, геометрію.

Рекомендований для самостійного опрацювання елементарної математики студентами аграрного напрямку, для факультетів, в програму яких не входять курси математичних дисциплін. Розрахований на студентів, які мали перерву в навчанні після отримання середньої освіти.

Рецензент: **М.І. Трегуб**, зав. кафедри механізації, канд. техн. наук.

ВСТУП

Першокурсники, розпочинаючи вивчення базових дисциплін, зустрічаються з багатьма труднощами, що ускладнюють свідоме засвоєння навчального матеріалу. Це пов´язано як із важкодоступністю самого матеріалу та переходом на нові форми навчальної діяльності, так і з потребою відновленя знань та навичок, які були здобуті під час навчання в загальноосвітній школі. Автори поставили завдання – систематизувати знання, вміння та навички шкільного курсу математики і підготувати їх до вивчення предметів, в основі яких є математичний апарат.

Посібник „Основи елементарної математики” призначений для самостійного опрацювання студентами основних понять елементарної математики. Охоплює основні розділи курсу елементарної математики: арифметику, алгебру, тригонометрію, геометрію. Кожен параграф містить стисло викладений теоретичний матеріал, проілюстрований багатьма прикладами та зразками розв´язування типових вправ. Обов´язковий елемент – задачі для самостійного розв´язування та теоретичні питання. До посібника входить абетковий покажчик, що сприяє можливості швидко відшукати відповідь на те чи інше запитання.

§1. ЧИСЛОВІ МНОЖИНИ

I. НАТУРАЛЬНІ ЧИСЛА

Перелічуючи будь-які предмети, називають у певному порядку числа: один, два, три, чотири, п’ять і т. д. Зображають їх символами: 1, 2, 3, 4, 5, ... Це *натуральні числа*. Множину натуральних чисел позначають буквою *N*. Ця множина містить безліч елементів – натуральних чисел, тому вона є нескінченною. Якщо записати натуральні числа в такій послідовності: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ..., тобто за кожним натуральним числом написати число, яке на одиницю більше від нього, дістанемо *натуральний ряд*. Число 0 (від лат. *nullum* – ніщо) не належить до натуральних чисел у повному розумінні слова (0 не використовується при лічбі), і складає разом з множиною натуральних чисел *розширений натуральний ряд*.

1 – найменше натуральне число, а найбільшого натурального числа не існує. Яким би великим не було натуральне число, існує таке, що на одиницю більше від даного. Отже, натуральний ряд − нескінченний.

Щоб записати натуральні числа, досить десяти знаків: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Ці знаки називаються *цифрами*. Найбільш розповсюдженою стала індійська позиційна система запису числа, в якій його величина залежить не тільки від самої цифри, але і від місця її знаходження (позиції). Наприклад, 4337 – це число, що має 4 тисячі, 3 сотні, 3 десятки і 7 одиниць:

$$4337 = 4 \cdot 1000 + 3 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 7.$$

При загальному способі запису й читання числа важливу роль відіграє число 10: десять одиниць – десяток, десять десятків – сотня, десять сотень – тисяча і т. д. Тому говорять, що ми користуємося *десятковою системою числення*. Десяткова система числення поширилася тому, що люди здавна рахували десятками, маючи на обох руках десять пальців. Але деякі народи користувалися й недесятковими системами.

Дії над натуральними числами

Додавання. Числа, які додають, називають *доданками*, а результат додавання – *сумою*.

<u>Приклад</u>: 12 + 9 = 21. Тут 12 і 9 – доданки, а 26 – сума. Знак додавання «+» – плюс.

Для додавання натуральних чисел існують такі закони:

1. *Переставний*. Сума не змінюється від зміни місць доданків, тобто які б не були натуральні числа *a* і *b*, справедлива рівність:

$$a + b = b + a.$$

2. *Сполучний*. Сума не змінюється, якщо будь-яку групу доданків, що стоять поряд, замінити сумою:

$$a + b + c = a + (b + c)\ c = (a + b) + c.$$

Віднімання. *Відніманням* називається дія, за допомогою якої за даною сумою двох доданків і одним з них відшукується другий доданок. Число, від якого віднімають, називають *зменшуваним*, число, яке віднімають – *від’ємником*, а результат – *різницею.*

Приклад: 80 − 12 = 68. Тут 80 – зменшуване, 12 – від’ємник, 68 – різниця. Знак віднімання «–» – мінус.

Множення. Помножити число *a* на число *b* означає знайти суму *b* доданків, кожний з яких дорівнює *a*. Тобто, $a \cdot b = \underbrace{a + a + a + ... + a}_{b}$.

Приклад: $5 \cdot 6 = \underbrace{5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5}_{6} = 30$.

Числа, які перемножують, називають *множниками*, а результат множення − *добутком*.

Мають місце такі закони множення:

1. *Переставний*. Добуток не змінюється від зміни місць множників, тобто які б не були числа *a* і *b*, справедлива рівність: a · b = b · a.

2. *Сполучний*. Добуток не зміниться, якщо будь-яку групу множників, що стоять поряд, замінити їх добутком: a · b · c = (a · b) · c = a · (b · c).

3. *Розподільний*. Добуток суми кількох чисел на будь-яке число дорівнює сумі добутків кожного доданка на це число: (a + b + c) · d = a · d + b · d + c · d.

Для того, щоб помножити одне число на інше, користуються записом:

$$\begin{array}{r} 436 \\ \times\ 154 \\ \hline 1744 \\ +\ 2180 \\ 436 \\ \hline 67144 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 841 \\ \times\ 225 \\ \hline 4205 \\ +\ 1682 \\ 1682 \\ \hline 189225 \end{array}$$

Ділення. *Діленням* називається дія, за допомогою якої за даним добутком двох множників і одним з цих множників знаходять другий множник. Поділити число *a* на число *b* означає знайти таке число *x*, при множенні якого на число *b* дістанемо *a*:

якщо a : b = x, то x · b = a.

Наприклад: 45 : 9 = 5, оскільки 9 · 5 = 45; 81 : 9 = 9, тому що 9 · 9 = 81.

Для того, щоб поділити одне число на інше, користуються таким записом: зліва записують ділене, а справа дільник. Результат записують у правому нижньому куті.

$$\begin{array}{r|l} 13248 & 12 \\ \cline{2-2} \underline{12} & 1104 \\ 12 & \\ \underline{12} & \\ 48 & \\ \underline{48} & \\ 0 & \end{array}$$

Ділення у множині натуральних чисел можливе не завжди. Наприклад, щоб поділити 30 на 7, треба знайти таке число *x*, для якого 7x = 30, а такого натурального значення не існує.

Не можна ділити на нуль! Адже поділити 5 на 0 означає знайти таке число *x*, при якому 0 · x = 5. А за будь-якого *x* добуток $0 \cdot x$ дорівнює нулю, а не 5.

Ознаки подільності. Щоб не виконуючи ділення, встановити ділиться чи не ділиться одне число на інше без остачі, користуються *ознаками подільності*:

- на 10 діляться всі ті і тільки ті числа, які закінчуються нулем;

- на 2 або на 5 діляться всі ті і тільки ті числа, в яких остання цифра виражає число, що ділиться відповідно на 2 або на 5;

- на 3 або на 9 діляться всі ті і тільки ті числа, в яких сума цифр ділиться відповідно на 3 або на 9;

Піднесення до степеня. Якщо множення числа *а* на число *n* означає, що число *а* треба додати само до себе *n* разів ($a \cdot n = \underbrace{a + a + a + ... + a}_{n}$), то піднесення числа *а* до степеня *n* означає, що число *а* треба помножити само на себе *n* разів ($a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{n}$).

Необхідно пам'ятати, що:

1) $a^0 = 1$, наприклад: $3^0 = 1$, $104^0 = 1$, $(-5)^0 = 1$;

2) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$, наприклад: $3^2 \cdot 3^3 = 3^{2+3} = 3^5 = 243$;

3) $a^n \cdot b^n = (ab)^n$, наприклад: $2^2 \cdot 3^2 = (2 \cdot 3)^2 = 6^2 = 36$;

4) $(a^b)^c = a^{bc}$, наприклад: $(3^2)^3 = 3^6 = 3^{2 \cdot 3} = 729$;

5) $\dfrac{a^m}{b^m} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^m$, наприклад: $\dfrac{5^3}{2^3} = \left(\dfrac{5}{2}\right)^3$;

6) $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$, наприклад: $3^{-2} = \dfrac{1}{3^2} = \dfrac{1}{9}$;

7) $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$, наприклад: $2^{2^3} = 2^8 = 256$.

Добування кореню − дія, обернена відносно дії піднесення до степеня: якщо $3^2 = 9$, тобто 3 · 3 = 9, то $\sqrt{9} = \sqrt{3 \cdot 3} = 3$, а якщо $3^3 = 27$, тобто 3 · 3 · 3 = 27, то $\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3 \cdot 3 \cdot 3} = 3$.

<u>Приклади</u>: 1) Добути квадратний корінь (корінь другого степеня) з 1764. Розкладемо число 1764 на множники: 2, 2, 3, 3, 7 і 7, тоді $\sqrt{1764} = \sqrt{\underbrace{2 \cdot 2}_{2} \cdot \underbrace{3 \cdot 3}_{2} \cdot \underbrace{7 \cdot 7}_{2}} = 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$.

2) Добути корінь кубічний (корінь третього степеня) з 216. Розкладемо число 216 на множники: 2, 2, 2, 5, 5 і 5, тоді $\sqrt[3]{216} = \sqrt[3]{\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{3} \cdot \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3}_{3}} = 2 \cdot 3 = 6$.

Взагалі: $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.

<u>Приклад</u>: $\sqrt{9} = \sqrt{3^2} = 3^{\frac{2}{2}} = 3^1 = 3$, $\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4$, $\sqrt[5]{8} = \sqrt[5]{2^3} = 2^{\frac{3}{5}}$.

Властивості коренів:

$$1.\ \sqrt[n]{a\cdot b}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b};\quad 2.\ \sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},b\neq 0;\quad 3.\ \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[nm]{a};\quad 4.\ \left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m};$$

$$5.\ \sqrt[n]{a^n\cdot b}=|a|\cdot\sqrt[n]{b}=a\cdot\sqrt[n]{b}.$$

II. ДРОБОВІ ЧИСЛА

Дріб – це одна або кілька часток цілого. Дроби бувають *звичайні* та *десяткові*.

Звичайні дроби

Звичайний дріб записують за допомогою двох чисел і дробової риски $\frac{m}{n}$, де *n* – *знаменник* – число, яке вказує, на скільки рівних частин поділено одиницю, а *m* – *чисельник* – число, яке показує скільки частин містить дріб.

Приклад: $\frac{3}{8}$, 3 – чисельник дробу, 8 – знаменник.

Дробову риску розуміють як знак ділення. Наприклад, $\frac{3}{4}=3:4$. Це означає: ціле поділити на 4 частини і взяти 3 частини.

Якщо чисельник менший від знаменника, то дріб називається *правильним*.

Приклад: $\frac{4}{7}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{3}{104}$ − правильні дроби.

Якщо чисельник більший від знаменника, то дріб називається *неправильним*.

Приклад: $\frac{11}{7}$; $\frac{13}{3}$; $\frac{102}{101}$ − неправильні дроби.

З неправильного дробу завжди можна отримати правильний, виділивши цілу частину. Наприклад: $\frac{11}{7}=\frac{7+4}{7}=1\frac{4}{7}$; $\frac{13}{3}=\frac{12+1}{3}=4\frac{1}{3}$; $\frac{102}{101}=\frac{101+1}{101}$.

Дії над звичайними дробами

Додавання. Щоб *додати* дроби з однаковими знаменниками, треба додати їх чисельники, а знаменник лишити той самий.

Приклад: $\frac{1}{7}+\frac{3}{7}=\frac{1+3}{7}=\frac{4}{7}$.

Щоб *додати* дроби з різними знаменниками, треба звести їх до спільного знаменника. *Спільний знаменник* – це найменше число, яке можна поділити на кожен знаменник. Потім додати їх здобуті чисельники і під сумою підписати спільний знаменник.

Приклад: $\frac{3}{8}+\frac{7}{12}=\frac{^{3/}3}{8}+\frac{^{2/}7}{12}=\frac{9}{24}+\frac{14}{24}=\frac{9+14}{24}=\frac{23}{24}$.

Користуючись таким правилом, можна додавати натуральні числа і дроби.

Приклад: $3+\frac{2}{5}=\frac{{}^{5/}3}{1}+\frac{2}{5}=\frac{15}{5}+\frac{2}{5}=\frac{15+2}{5}=\frac{17}{5}$. Пишуть і так: $3+\frac{2}{5}=3\frac{2}{5}$.

Щоб додати кілька чисел, що містять цілі і дробові частини, можна окремо знайти суму цілих і суму дробових частин:

$$1\frac{11}{45}+8\frac{4}{9}=1\frac{11}{45}+8\frac{{}^{5/}4}{9}=\left(1+8\right)\frac{11+20}{45}=9\frac{31}{45}.$$

Усі закони і властивості додавання натуральних чисел справедливі також і для дробових чисел. Їх застосування у багатьох випадках спрощує процес обчислення.

Приклад: $1\frac{7}{9}+2\frac{5}{12}+\frac{2}{9}+\frac{7}{12}+\frac{1}{4}=\left(1\frac{7}{9}+\frac{2}{9}\right)+\left(2\frac{5}{12}+\frac{7}{12}\right)+\frac{1}{4}=5\frac{1}{4}$.

Віднімання. Щоб знайти *різницю* дробів з однаковими знаменниками, треба відняти чисельник від'ємника від чисельника зменшуваного і залишити той самий знаменник. Наприклад: $\frac{7}{8}-\frac{3}{8}=\frac{7-3}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$.

Щоб зайти *різницю* дробів з різними знаменниками, необхідно спочатку звести їх до найменшого спільного знаменника, а потім діяти за попереднім правилом.

Приклад: $\frac{11}{12}-\frac{5}{8}=\frac{{}^{2/}11}{12}-\frac{{}^{3/}5}{8}=\frac{22-15}{24}=\frac{7}{24}$.

Аналогічно віднімають від цілого числа дробове чи навпаки.

Приклад: $5-2\frac{3}{8}=4\frac{8}{8}-2\frac{3}{8}=2\frac{5}{8}$; $7\frac{1}{4}-3=\left(7-3\right)\left(\frac{1}{4}-0\right)=4\frac{1}{4}$.

Множення. *Добуток* дробів дорівнює дробові, чисельник якого є добутком чисельників даних дробів, а знаменник – добутком їх знаменників, тобто $\frac{a}{b}\cdot\frac{n}{m}=\frac{a\cdot n}{b\cdot m}$.

Приклад: $\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{7}=\frac{2\cdot 5}{3\cdot 7}=\frac{10}{21}$.

Якщо перемножують число з цілою і дробовою частинами, то перемножують окремо цілу і дробову частини: $4\frac{3}{5}\cdot 3=12\frac{9}{5}=13\frac{4}{5}$.

Ділення. Щоб *поділити* один дріб на другий, треба ділене помножити на дріб, обернений до дільника.

Приклад: $\frac{2}{3}:\frac{6}{7}=\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{6}=\frac{14}{18}=\frac{7}{9}$.

Десяткові дроби

Десятковим називають дріб, якщо його знаменник можна представити у вигляді 10^n. Наприклад: $\frac{3}{10}=0{,}3$; $15\frac{23}{1000}=15{,}023$.

У десятковому дробі ліворуч від коми записують *цілу* частину числа, а праворуч – *дробову*.

Щоб перетворити десятковий дріб у звичайний, його записують із знаменником, і якщо це можливо, скорочують.

Приклад: $13{,}125 = 13\frac{125}{1000} = 13\frac{1}{8}$.

Щоб перетворити звичайний дріб у десятковий, треба чисельник поділити на знаменник.

Приклад: $\frac{6}{25} = 6 : 25 = 0{,}24$.

Дії над десятковими дробами

Додавання та *віднімання десяткових* дробів виконують так само, як і додавання і віднімання натуральних чисел. При цьому записують числа у стовбчик так, щоб кома була записана під комою. У сумі ставлять кому під комою в доданках.

Приклад: 8,7689 + 2,67 = 11,4389; 8,7 – 6,984 = 1,716;

$$\begin{array}{r} +\ 8{,}7689 \\ 2{,}6700 \\ \hline 11{,}4389 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -\ 8{,}700 \\ 6{,}984 \\ \hline 1{,}716 \end{array}$$

Щоб *помножити* один десятковий дріб на інший, треба виконати множення, не звертаючи уваги на коми, а потім у результаті відокремити справа комою стільки десяткових знаків, скільки їх є в обох множниках разом.

Наприклад: 0,245·0,03. Виконаємо множення чисел 245·3 = 735. Оскільки в першому множнику три цифри після коми, а в другому дві, то в результаті відокремимо п’ять цифр (3 + 2 =5). Отже, 0,245 · 0,03 = 0,00735.

Щоб *поділити* число на десятковий дріб, треба в діленому і дільнику перенести кому вправо на стільки цифр, скільки стоїть їх після коми в дільнику, а потім виконати ділення на натуральне число.

Наприклад: 17,976:2,14. Перенесемо в діленому і дільнику кому на дві цифри вправо. Одержимо числа 1797,6 і 214. Поділимо 1797,6 на 214. Отримаємо 8,4. Отже, 17,976:2,14 = 8,4.

Множення і ділення десяткових дробів на 10, 100, 1000 і т. д. можна виконувати усно. Щоб помножити десятковий дріб на 10, 100, 1000 і т. д., треба перенести кому відповідно на один, два, три і т. д. знаки вправо. Якщо для перенесення коми не вистачає знаків, їх число доповнюють відповідним числом нулів.

Наприклад: 25,95 · 10 = 259,5; 82,3 · 100 = 8230.

Щоб поділити десятковий дріб на 10, 100, 1000 і т. д., треба перенести кому відповідно на один, два, три і т. д. знаки вліво.

Наприклад: 25,95 : 10 = 2,595; 82,3 : 100 = 0,823.

Не завжди в результаті ділення одного числа на друге отримуємо скіннчений десятковий дріб. Наприклад: $\frac{4}{6} = 0{,}6666...$, $\frac{10}{23} = 0{,}434783...$. Такі дроби називаються нескінченними десятковими дробами. Нескінченні десяткові дроби бувають *періодичні* і *неперіодичні*. Наприклад: якщо ділити 3 на 11, у частці отримаємо нескінченний десятковий дріб: 0,272727..., в якому цифри 2 і 7 періодично повторюються. Це *нескінченний періодичний десятковий дріб* із періодом 27.

Періодичні десяткові дроби бувають *чисті* і *мішані*. *Чистим* періодичним дробом називається такий, у якого період починається відразу після коми, наприклад: 12, 363636...; *мішаним* – такий, у якого між комою і першим періодом є одна або кілька цифр, що не повторюються, наприклад: 0,074646... Записувати періодичні десяткові дроби прийнято скорочено: замість 3,2666... пишуть 3,2(6), замість 0,424242... пишуть 0,(42), тобто період записують у дужках.

Щоб перетворити чистий періодичний десятковий дріб у звичайний, досить записати чисельником його період, а знаменником – число, позначене стількома дев'ятками, скільки цифр у періоді.

Приклади: $0,(8)=\frac{8}{9}$; $12,(35)=12\frac{35}{99}$.

Щоб перетворити мішаний періодичний десятковий дріб у звичайний, досить від числа, що стоїть до другого періоду, відняти число, що стоїть між комою і першим періодом, і здобуту різницю взяти чисельником, а знаменником написати число, позначене стількома дев'ятками, скільки цифр у періоді, і зі стількома нулями на кінці, скільки цифр між комою і періодом.

Приклади: $0,8(57)=\frac{857-8}{990}=\frac{849}{990}$; $6,7(8)=6\frac{78-7}{90}=6\frac{71}{90}$.

Звичайний дріб можна подати у вигляді скінченного десяткового дробу тоді і лише тоді, коли в розкладі на прості множники його знаменника не має інших множників, крім 2 і 5. Наприклад: $\frac{3}{20}$. Оскільки знаменник 20 можна розкласти на множники 2, 2 і 5, тобто: $20=2\cdot 2\cdot 5$, то даний звичайний дріб можна подати у вигляді скінченного десяткового дробу: $\frac{3}{20}=0,15$.

Розглядаючи неперіодичні нескінченні десяткові дроби, користуються їх *округленим* значенням. Округлюючи десятковий дріб до деякого розряду, відкидають усі його десяткові знаки після даного розряду, дотримуючись правила:

1. Якщо перша зліва цифра, що відкидається, менша за 5, то останню залишену цифру не замінюють.

2. Якщо перша цифра, що відкидається, більша за 5 або дорівнює 5, то останню залишену цифру збільшують на одиницю.

Приклади: округлити: а) до десятих 18,34: 18,34 ≈ 18,3;

б) до сотих 3,2466: 2,2466 ≈ 2,25;

в) до тисячних 8,4335: 8,4335 ≈ 8,434.

Степенева форма запису числа. Будь-яке число можна подати у вигляді:

$$a \cdot 10^n, \text{ де } 0 < a < 10.$$

Наприклад, $56000 = 5{,}6 \cdot 1\underbrace{0000}_{4} = 5{,}6 \cdot 10^4$, або $0{,}0000032 = 3{,}2 \cdot 0{,}\underbrace{000001}_{6} 3{,}2 \cdot$ $\cdot 10^{-6}$. Даний запис називають *степеневою формою запису числа*. Такою формою запису числа особливо зручно користуватися при великих або малих числах. Наприклад: маса Землі $m_з = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ кг, швидкість світла в вакуумі $\upsilon = 3 \cdot 10^8$ м/с, маса спокою електрону $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг.

Відсотком даного числа називається $\frac{1}{100}$ частина цього числа. Позначають відсотки символом %. Наприклад, замість того, щоб сказати: 64 сотих усіх студентів групи навчається на ”4” та „5”, можна сказати: 64 % (відсотки) усіх студентів групи навчається на ”4” та „5”.

Відсотком *X* числа *a* від числа *b* називають кількість сотих долей числа *b*, що містяся в числі *a*:

$$X = \frac{a}{\frac{b}{100\%}} = a : \frac{b}{100\%} = \frac{a \cdot 100\%}{b}.$$

Приклад: знайти відсоток числа 2 від числа 10.

Один відсоток (1%) числа 10 дорівнює $\frac{10}{100}$, тоді *X* дорівнює:

$$X = \frac{2}{\frac{10}{100\%}} = 2 : \frac{10}{100\%} = \frac{2 \cdot 100\%}{10} = 20\%.$$

Знаючи відсоток *X* числа *a* від числа *b*, легко знайти *a*, якщо відоме *b*:

$$a = X \frac{b}{100\%}.$$

Приклад: знайти число, що становить 10% від числа 60.

В даному прикладі $b = 60$, а X = 10%, тоді:

$$a = X \frac{b}{100\%} = 10\% \cdot \frac{60}{100\%} = 6.$$

Знаючи відсоток *X* числа *a* від числа *b*, легко знайти *b*, якщо відоме *a*:

$$b = \frac{100\% \cdot a}{X}.$$

Приклад: знайти число, якщо відомо, що 5 становить 15% від нього.

В даному прикладі $a = 5$, а $X = 25\%$, тоді:

$$b = \frac{100\% \cdot a}{X} = \frac{100\% \cdot 5}{25\%} = 20.$$

III. РАЦІОНАЛЬНІ ЧИСЛА

У практичному житті зустрічаються не тільки натуральні та дробові числа, мова про які йшла раніше, а й від’ємні числа. *Від’ємні числа* використовують для позначення величин, які можуть змінюватися у двох напрямках відносно деякого їх значення. Наприклад, термометр може показувати і 5, і −5°. Число −5 – від’ємне. Натуральні та дробові числа утворюють множину додатних чисел. Перед такими числами іноді ставлять знак «+». Два числа, які відрізняються лише знаками, називають *протилежними*. Наприклад, +12 і −12. Протилежними називають і знаки «+» і «–». Від’ємні числа бувають цілими і дробовими. Наприклад, числа −4, −301 − цілі від’ємні числа, а числа −4,16; $-\frac{2}{3}$; −0,7 − дробові від’ємні числа.

Усі *цілі* і *дробові* (додатні і від’ємні) числа утворюють множину *раціональних* чисел. Раціональним називається кожне число виду $\frac{m}{n}$, де m – ціле, а n – натуральне число. Множину всіх раціональних чисел позначають буквою *Q*.

Два протилежних числа, наприклад +8 і −8, відрізняються знаками, але записують їх однаковими цифрами. Кажуть, що вони мають однакові *модулі*. Модуль кожного з них дорівнює 8.

Модулем невід’ємного числа називається це ж число, *модулем* від’ємного числа називається протилежне до нього число. Позначають модуль числа *a* знаком $|a|$.

Таким чином, $|a|=a$, якщо $a \geq 0$; $|a|=-a$, якщо $a<0$.

Наприклад: $|-18| = -(-18) = 18$; $|0,4| = 0,4$.

Дії з раціональними числами

Щоб *додати* раціональні числа з однаковими знаками, треба додати їх модулі і перед сумою поставити їх спільний знак.

Приклади: (+8) + (+10) = +18; (−7,2) + (−3,5) = −10,7.

Щоб *додати* два раціональних числа з різними знаками, необхідно від більшого модуля відняти менший і поставити знак числа з більшим модулем.

Приклади: (−19) + (+7) = −12; (+2,4) + (−15,8) = −13,4.

Сума двох протилежних чисел дорівнює нулю.

Щоб знайти різницю двох чисел, досить до зменшуваного додати число, протилежне від’ємнику: a − b = a + (−b).

Приклад: (−5) – (−8,3) = (−5) + (+8,3) = 3,3.

Щоб визначити *добуток* двох раціональних чисел, треба перемножити їх модулі і перед результатом поставити знак плюс, якщо обидва множники мають однакові знаки, чи мінус, якщо знаки множників різні. Якщо хоч один множник дорівнює нулю, то добуток дорівнює нулю.

Приклад: (−3) · (−5) = 15; (−0,3) · (+2) = −0,6; (−6,1) · 0 = 0.

Степінь раціонального числа з натуральним показником − це добуток кількох однакових раціональних множників. Тому парний степінь від’ємного числа додатний, а непарний – від’ємний.

Наприклад: $(-0,5)^2 = 0,25$; $(-3)^3 = -27$.

Оскільки добування кореня – дія обернена відносно дії піднесення до степеня, можна зробити висновок: не існує число *a*, яке при множенні на *a* дорівнює $-a^2$, тобто: $a \cdot a = a^2$ і $(-a)\cdot(-a) = a^2$, тому $\sqrt{-a^2}$ не існує. Взагалі для всіх парних степенів корені від'ємних чисел не існують. Разом з тим, $(-3)\cdot(-3)\cdot(-3) = -27$, тому $\sqrt[3]{-27} = -3$. Отже, корені непарного степеня від'ємних чисел існують.

Арифметичним коренем називається невід'ємне значення кореня: $\sqrt[n]{a^n} = |a|$. Наприклад: $\sqrt{3^2} = |3| = 3$ і $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$. Отже: $\sqrt{9} = 3$, а не ± 3.

Частка від ділення двох раціональних чисел з однаковими знаками дорівнює частці їх модулів. Частка від ділення двох раціональних чисел з різними знаками дорівнює частці їх модулів, узятій із знаком мінус.

Приклади: (−105) : (−15) = 7; (+64,8) : (−8) = −8,1.

У множині раціональних чисел завжди виконуються дії додавання, віднімання, множення і ділення (за винятком ділення на 0).

Питання для самоперевірки

1. Які числа називають натуральними?
2. Що називають сумою натуральних чисел?
3. Які існують закони додавання?
4. Що називають різницею натуральних чисел?
5. Що означає помножити одне натуральне число на інше?
6. Які існують закони множення натуральних чисел?
7. Степінь та його властивості.
8. Корінь та його властивості.
9. Ділення натуральних чисел.
10. Ознаки подільності натуральних чисел.
11. Що називають дробом?
12. Як записують звичайні та десяткові дроби?
13. Додавання та віднімання дробів з однаковими знаменниками.
14. Додавання та віднімання дробів з різними знаменниками.
15. Як помножити звичайні дроби?
16. Як поділити звичайні дроби?
17. Додавання та віднімання десяткових дробів.
18. Як помножити число на десятковий дріб та два десяткові дроби?
19. Правила ділення десяткових дробів.
20. Як з десяткового дробу утворити звичайний? І навпаки.
21. Нескінченні десяткові дроби та правила їх округлення.
22. Які бувають періодичні дроби?
23. Як перетворити періодичний дріб у звичайний?
24. Що називають стандартним записом числа?
25. Що називають відсотком?
26. Основні типи задач на відсотки.
27. Поняття про додатні та від'ємні числа.
28. Як додати два числа з різними знаками?
28\. Як додати два числа з однаковими знаками?

29. Як знайти добуток та частку двох раціональних чисел?

30. Степінь та корінь раціонального числа.

Задачі для самостійного розв'язування

1. Обчислити:

1) $14 +(-8) + (-6) + 9 + (-16)$;

2) $-6{,}47 +8{,}32 + 6{,}47 + (-7{,}32)$;

3) $-1{,}6 + 0{,}8 +(-1{,}8) + 3{,}4$;

4) $-43 +(-60) + 18 +36 + (-19)$;

5) $-2{,}43 +6{,}31 +(-3{,}21) +0{,}49 +4{,}87$;

6) $\frac{2}{3}+\left(-\frac{7}{8}\right)+\frac{5}{6}+\left(-\frac{7}{12}\right)$;

7) $-2\frac{3}{7}+8\frac{9}{14}+\left(-5\frac{5}{21}\right)$.

2. Записати десяткові дроби у вигляді звичайних дробів і результат, якщо можливо, скоротити: 0,6; 0,8; 0,68; 0,32; 0,88; 0,125; 0,4654; 0,456.

3. Яку частину доби становлять: 3 год; 5 год; 8 год; 16 год?

4. Розташувати у порядку зростання числа:

1) $\frac{5}{8};\frac{3}{5};\frac{7}{10};\frac{1}{2}$.   2) $\frac{3}{7};\frac{9}{14};\frac{5}{8};\frac{9}{28}$.

5. Перетворити десяткові дроби в звичайні і обчислити:

1) $0{,}8-\frac{5}{9}$;   3) $0{,}48+\frac{3}{8}$;

2) $9\frac{17}{36}-6{,}75$;   4) $4{,}875-2\frac{5}{24}$.

6. Перетворити звичайні дроби в десяткові і обчислити:

1) $0{,}37-\frac{1}{4}$;   3) $4\frac{9}{25}-6{,}37$;

2) $\frac{9}{16}+3{,}23$;   4) $12\frac{9}{40}-7{,}84$.

7. Виконати дії:

1) $2{,}3 \cdot (-8) -9{,}8 : (6{,}7 -8{,}1)$;

2) $(-28{,}6 : 57{,}2 - 26{,}8 : (-1{,}34)) \cdot (-3{,}1)$;

3) $(-1{,}7 + 3{,}64 : (-1{,}4)) : (0{,}001) \cdot (-0{,}4)$.

§2. ВИРАЗИ

Виразом називається сукупність дій, які необхідно виконати в певному порядку над деякими величинами для отримання його значення. Існує певний *порядок виконання дій* у даних виразах:

1. Першими виконують дії множення, ділення та піднесення до степеня в тому порядку, в якому вони зустрічаються в математичному виразі.

2. Наступними виконують додавання та віднімання в тому порядку, в якому вони зустрічаються в математичному виразі.

3. Якщо вираз містить дужки, першими дії виконуються в дужках, відповідно до попередніх правил.

Приклад: $125 : 25 + (17 + 12 : 3 - 3^2) = 5 + (17 + 4 - 9) = 5 + 12 = 17$.

Якщо у виразі використовується скінченна кількість дій додавання, віднімання, множення, ділення, піднесення до степеня та добування кореня, то такі вирази називаються алгебраїчними. Якщо у цих виразах добування кореня відсутнє, то вони називаються раціональними, а якщо корінь присутній − то ірраціональними. Так, $\frac{a-b}{a+b}$ − раціональний вираз, а $\frac{a-\sqrt{b}}{a+\sqrt{b}}$ − ірраціональний.

Якщо прирівнюються один до одного два вирази, то отримаємо *рівність*. Якщо ця рівність справедлива при всіх значеннях її величин, то вона називається *тотожністю*.

Наприклад: рівність $2x-3=\frac{4x-6}{2}$ задовольняється при всіх значеннях змінної, тому вона утворює тотожність.

Якщо рівність задовольняється не при всіх значеннях величин, то вона називається *рівнянням*. Наприклад, рівність $2x + 3 = 5$ задовольняється тільки при $x = 1$ і тому називається рівнянням.

Найвищий показник степеня невідомої величини в рівнянні вказує на його порядок. Наприклад: $x^3 + 3x^2 - 5x +7 = 0$ є рівнянням третього порядку. Число розв’язків рівняння не може перевершувати його порядок.

І. ОСНОВНІ ПРАВИЛА І СПІВВІДНОШЕННЯ

1. *Множення многочленів*:

$$(a+b)(c+d+e)=a(c+d+e)+b(c+d+e)=ac+ad+ae+bc+bd+be.$$

2. *Ділення многочлена на число*:

$$\frac{a+b+c}{d}=\frac{a}{d}+\frac{b}{d}+\frac{c}{d}.$$

3. *Формули скороченого множення*:

а) $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$;

б) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$;

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$;

в) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$;

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$;

г) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$;

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

ІІ. КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ

Рівняння виду $ax^2+bx+c=0$ має розв'язки:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\text{ де } b^2-4ac\ge 0.$$

Вираз b^2-4ac називається *дискримінантом*.

Наприклад: $3x^2-4x-1=0$; $x_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot 3\cdot(-1)}}{2\cdot 3}$; $x_1=\frac{1}{6}$, $x_2=-\frac{5}{3}$.

Якщо дискримінант дорівнює нулю, то квадратне рівняння є повним квадратом, для якого $x_1=x_2$.

Теорема Вієта

Якщо x_1 та x_2 – корені квадратного рівняння $ax^2+bx+c=0$, то:

$$\begin{cases} x_1x_2=\frac{c}{a} \\ x_1+x_2=-\frac{b}{a} \end{cases}$$

Наприклад: рівняння $x^2-5x+4=0$ має корені $x_1=2$ і $x_2=3$, бо $x_1x_2=6$ і $x_1+x_2=5$.

Рівняння виду $ax^4+bx^2+c=0$ називаються біквадратними і зводяться до квадратних заміною $x^2=t$. Аналогічно розв'язуються рівняння виду $ax^6+bx^3+c=0$ заміною $x^3=t$ і т. д. Взагалі для рівнянь виду $ax^{2n}+bx^n+c=0$ застосовується заміна $x^n=t$.

Питання для самоперевірки

1. Що називають виразом?
2. Який порядок виконання дій?
3. Що називають тотожністю та рівнянням?
4. Як визначити порядок рівняння?
5. Як помножити два многочлени?
6. Як поділити многочлен на число?
7. Формули скороченого множення?
8. Як розв'язати квадратне рівняння?
9. Коли зручно користуватися теоремою Вієта?

Задачі для самостійного розв'язування

1. Знайти значення виразу:

1) $12\frac{7}{16}-5\frac{5}{8}\cdot\frac{22}{27}-1\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{6}$; 2) $4\frac{1}{7}\cdot 14-2\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{11}-1\frac{4}{9}\cdot 27$;

3) $1\frac{31}{32}\cdot 3\frac{1}{5}-\left(8\frac{5}{9}\cdot\frac{6}{77}+2\frac{2}{15}\right)\cdot\frac{15}{42}$.

2. Виконати дії :

1) $(-5{,}16 + 5{,}03) \cdot (32{,}54 - 48)$; 2) $\frac{4}{7} \cdot \left(-5\frac{5}{6}\right) - \frac{7}{62} \cdot \left(-4\frac{3}{7}\right)$;

3) $\left(5\frac{1}{6} - 6\frac{1}{4}\right) \cdot \left(3\frac{1}{4} - 0{,}55\right)$.

3. Знайти значення виразу:

1) $0{,}8\,(3x - 14) - 0{,}3\,(4 - 5x)$ при $x = 3\frac{1}{13}$;

2) $3\frac{1}{8}(-y + 8) - 4\frac{5}{8}(y - 16)$ при $y = -0{,}6$.

4. Обчислити:

1) $\left(-\frac{5}{12} + \frac{11}{16}\right) : \left(-\frac{13}{72}\right)$; 3) $\left(-4\frac{11}{18} - 2\frac{7}{12}\right) : \left(-3\frac{1}{12}\right)$;

2) $\left(\frac{9}{14} - \left(-\frac{5}{21}\right)\right) : \left(-2\frac{9}{14}\right)$; 4) $\left(\frac{7}{16} - \frac{31}{40}\right) : \left(-\frac{17}{24} + \frac{27}{40}\right)$;

5) $-3\frac{3}{4} - \left(-8\frac{2}{9} - (-4{,}5) \cdot \frac{14}{9}\right) \cdot 2\frac{1}{4}$.

5. Знайти значення виразу:

1) $82\,453 + 28 \cdot 82 - 6\,919 : 17 - 14\,009$;

2) $(207 \cdot 906 - 51\,943 : 127) \cdot 12 - 2\,356$;

3) $1{,}29 : 4{,}3 + 18 : 0{,}15 + 9 : 45 - 1{,}4 : 0{,}35$;

4) $(1{,}43 + 2{,}145) : 0{,}65 - (2 \cdot 1{,}45 - 2{,}9) \cdot 3{,}68$;

5) $16{,}7 - 4 \cdot (0{,}006 + 0{,}994) \cdot (4 \cdot 0{,}8 - 2)$.

6. Розв’язати рівняння:

1) $x^2 - 12x - 28 = 0$;

2) $x^2 + 3x - 4 = 0$;

3) $x^2 + 10x + 25 = 0$;

4) $7x^2 - x = 0$;

5) $2x^2 - 3x - 2 = 0$;

6) $16x^2 - 8x + 1 = 0$;

7) $9x^2 - 16 = 0$;

8) $3x^2 - 21x = 0$.

§3. ФУНКЦІЇ

Функцією називають відповідність між елементами двох множин x та y, при якій кожному елементові першої множини x відповідає не більше одного елемента y другої множини. Наприклад: $y = x^3$, $y = \frac{1}{x}$, $y = 4x + 2$.

Множина всіх тих елементів з X, для яких є відповідні елементи множини $У$, називається *областю визначення*, а множина всіх тих елементів з $У$, що відповідають елементам з X, − *областю значень* даної функції.

Наприклад, для функції $y = x + 4$ область визначення – всі дійсні числа. Для позначення користуються записом $D(f) = R$, або $D(f) = (-\infty; \infty)$. Область значень – це також множина всіх дійсних чисел. Записують $E(f) = R$, або $E(f) = (-\infty; +\infty)$.

Для функції $y=\frac{4}{x}$ область визначення D(f) = $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$, область значень E(f) = $(-\infty;+\infty)$.

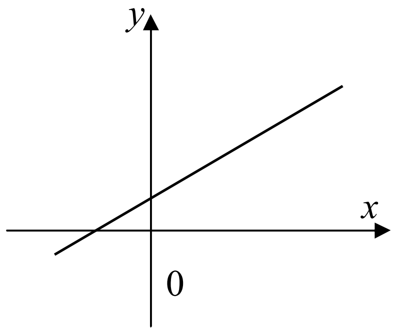
Графіком функції *f* називається множина точок (x; y) на координатній площині, таких, що перебігають всю множину D(f), а y = f(x).

І. ЛІНІЙНА ФУНКЦІЯ

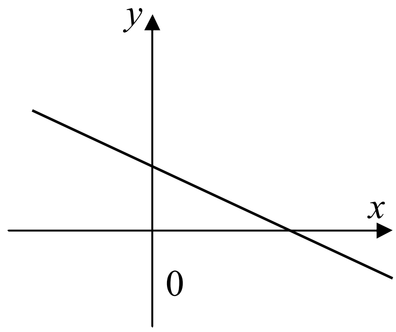
Лінійною називають функцію, яку можна задати формулою $y = ax + b$, де x – аргумент, a і b – будь-які числа.

1. Область визначення: $x \in (-\infty;+\infty)$.
2. Область значень: $y \in (-\infty;+\infty)$.
3. При a > 0 функція зростає, при a < 0 – спадає.

Графіком функції є пряма:

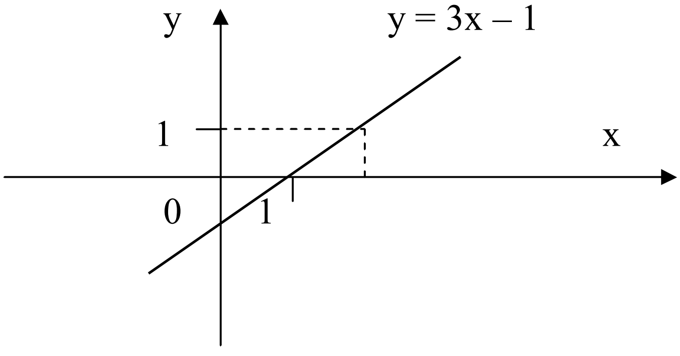


$a > 0$;



$a < 0$.

Для побудови графіка необхідно мати дві точки. Наприклад, для функції y = 3x – 1, задамо x = 0, тоді y = 3 · 0 – 1 = –1. Маємо точку з координатами (0; –1). Першу координату називають *абсцисою*, а другу – *ординатою*. Відповідно і вісь *X* називають віссю *абсцис*, а вісь *У* – *ординат*. Аналогічно задамо другу точку: $x = 1$, тоді $y = 3\cdot 1 - 1 = 2$. Отримали другу точку (1; 2). Через дані точки можна побудувати пряму: $y = 3x - 1$.



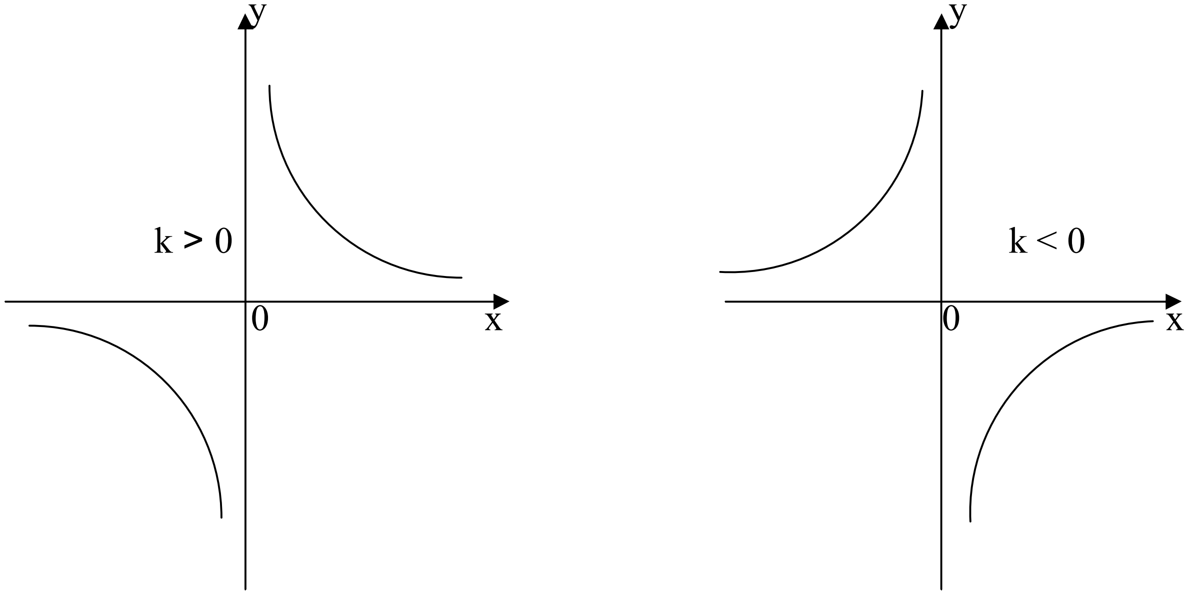
Можна зробити висновок, що зі збільшенням ординати, абсциса також збільшується. Причому, якщо збільшити ординату на одиницю, то й абсциса збільшиться на одиницю. Якщо зменшити ординату на 13, наприклад, то й абсциса зменшиться на 13. Тобто лінійна функція є функцією прямої пропорційності.

II. ОБЕРНЕНА ПРОПОРЦІЙНІСТЬ

Змінну y називають обернено пропорційною до змінної x, якщо відповідні значення цих змінних зв'язані рівністю $y = \frac{k}{x}$, де k – якесь дійсне число, відмінне від нуля. Число k називають *коефіцієнтом оберненої пропорційності*. Жодна з змінних не може набувати значення 0.

1. Область визначення: $x \in (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$.
2. Область значень: $y \in (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$.
3. При k>0 функція спадає, при k<0 – зростає на всій області визначення.

Графіком цієї функції $y = \frac{k}{x}$ є крива, що складається з двох гілок. Цю криву називають *гіперболою*:



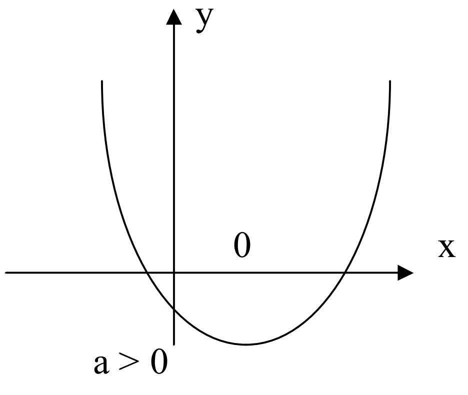
Зауважимо, що графіками функцій $y = \frac{1}{x} + 3$, $y = \frac{3}{x-2}$, $y = \frac{x+3}{x-2}$ теж є гіперболи, однак вони – необернено пропорційні. Це приклади *дробово-раціональних функцій*. Обернена пропорційність є найпростішим випадком дробово-раціональних функцій.

III. КВАДРАТИЧНА ФУНКЦІЯ

Квадратичною називають функцію, яку можна задати формулою $y=ax^2+$ $+bx+c$, де x – змінна, $a \neq 0$, b і c – числа.

1. Область визначення: $x \in (-\infty;+\infty)$.
2. Область значень: $y \in (-\infty;+\infty)$.

Графіком квадратичної функції є парабола, її гілки напрямлені вгору, якщо a>0, гілки напрямлені вниз, якщо a < 0. Вершина цієї параболи має координати $\left(-\frac{b}{2a}; c - \frac{b2}{4a}\right)$.



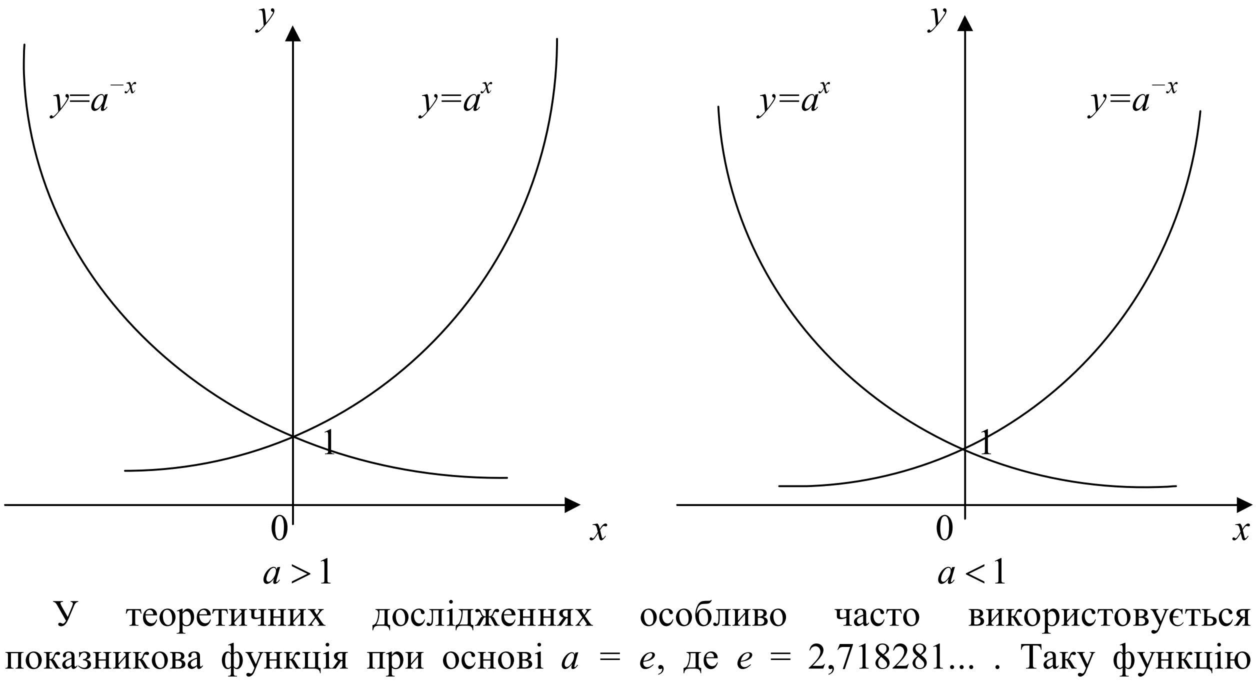
Якщо дискримінант квадратного тричлена ax^2+bx+c додатній, парабола перетинає вісь абсцис у двох точках, що є коренями рівняння: $ax^2+bx+c=0$. Якщо дискримінант дорівнює 0, то графік функції дотикається до осі абсцис, причому абсциса дотику є коренем рівняння $ax^2+bx+c=0$. Якщо дискримінант від'ємний, то графік функції не перетинає вісь абсцис.

IV. ПОКАЗНИКОВА ФУНКЦІЯ

Функція, яку можна задати формулою $y=a^x$, де $a>0$, називають показниковою.

1. Область визначення: $x \in (-\infty;+\infty)$.
2. Область значень: $y \in (0;+\infty)$.
3. $a^b > a^c$ при $a > 1$, якщо $b > c$.
4. $a^b < a^c$ при $a < 1$, якщо $b > c$.

Графіком показникової функції є крива, що проходить через точку (0; 1). Даний графік необмежено наближається до осі абсцис, але не дотикається до неї.



У теоретичних дослідженнях особливо часто використовується показникова функція при основі $a = e$, де $e = 2{,}718281...$. Таку функцію називають *експонентою*.

V. ЛОГАРИФМІЧНА ФУНКЦІЯ

Логарифмом числа N (від грецького *logos* + *arithmos* − відношення до числа) за даною основою a, називається показник степеня x, до якого треба піднести основу, щоб дістати число N. Позначають $x = log_a N$. Таким чином, якщо $a^x = y$, то $x = log_a y$.

Приклади: $\log_2 8 = 3$, бо $2^3 = 8$; $\log_2 \frac{1}{4} = -2$, бо $2^{-2} = \frac{1}{4}$.

Властивості логарифмів:

1. $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$;
2. $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$;
3. $\log_a b^c = c\log_a b,\ b > 0$;
4. $\log_{a^n} b = \frac{1}{n}\log_a b$;
5. $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ − формула переходу до другої основи.

Для обчислень найзручнішими є логарифми за основою 10, їх називають *десятковими логарифмами*. Наприклад: lg 100 = 2; lg 0, 0001 = −4.

Логарифми за основою e називають *натуральним логарифмом* $log_e x = ln\,x$.

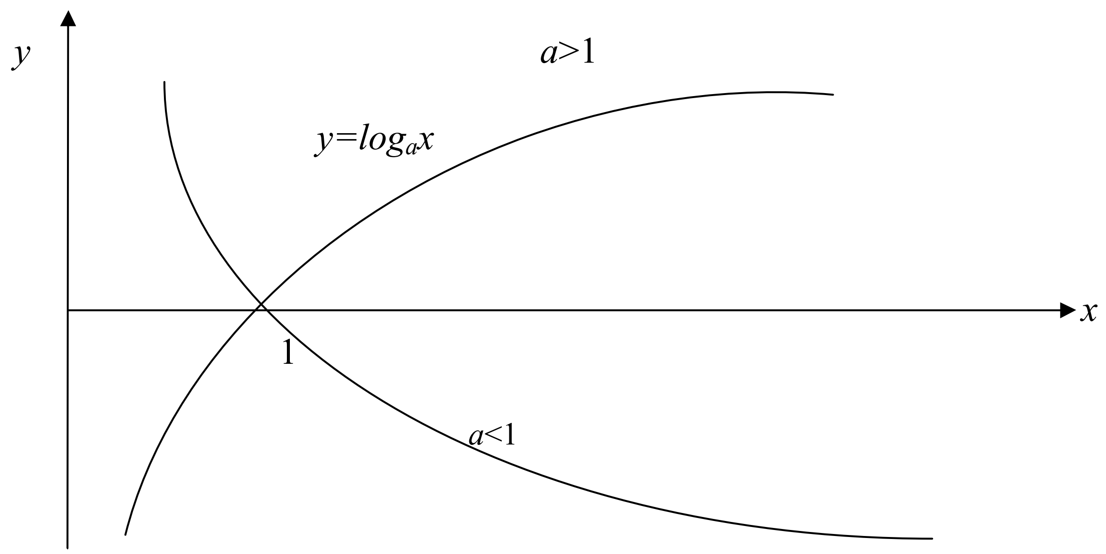
Функція, обернена до показникової, називається *логарифмічною*:

$$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y.$$

Помінявши місцями x і y, дістанемо $y = log_a x$. Функція $y = log_a x$ і є логарифмічною. Тут основа a – число додатне і відмінне від 1.

Приклади логарифмічних функцій: $y = \log_2 x$, $y = \log_\pi x$, $y = \lg x$.

Оскільки логарифмічна функція обернена до показникової $y = a^x$, то її графіки симетричні відносно прямої $y = x$:



Властивості логарифмічних функцій:

1. Функція визначена для всіх $x > 0$.
2. Область значень функції: $y \in (-\infty;+\infty)$.
3. З ростом аргументу функція зростає при $a > 0$ і спадає при $a < 0$.
4. Функція додатна для $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 1 \\ a > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x \in (0;1) \\ a \in (0;1) \end{cases} \end{array}\right.$ і від'ємна для $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 1 \\ a \in (0;1) \end{cases} \\ \begin{cases} x \in (0;1) \\ a > 1 \end{cases} \end{array}\right.$.

Питання для самоперевірки

1. Що називається функцією?
2. Що називають областю значень та областю визначення функції?
3. Що називається графіком функції?
4. Лінійна функція. Область визначення та область значень лінійної функції.
5. Побудова графіка лінійної функції.
6. Обернена пропорційність. Область визначення та область значень даної функції.
7. Побудова графіка функції оберненої пропорційності.
8. Квадратична функція. Область визначення та область значень квадратичної функції.
9. Побудова графіка квадратичної функції.
10. Показникова функція. Область визначення та область значень показникової функції.
11. Графік показникової функції.
12. Що називають логарифмом числа?
13. Які властивості логарифмів?
14. Що називають десятковим та натуральним логарифмами?
15. Логарифмічна функція. Область визначення та область значень логарифмічної функції.
16. Графік логарифмічної функції.

Задачі для самостійного розв'язування

1. Побудувати графіки функцій:

1) $y = x + 5$; 2) $y = 4x + 2$; 3) $y = -3x - 9$; 4) $y = -\dfrac{1}{2}x + 2$;

5) $y = x^2 - 12x - 28$; 6) $y = 3x^2 - 7x - 4$; 7) $y = x^2 - 4$;

8) $y = 7x^2 - x$; $y = 3x^2 - 21x$.

2. Визначити область визначення функції:

1) $y = \dfrac{x-1}{2x}$; 2) $y = \sqrt{5x-1}$; 3) $y = \dfrac{2}{4x-3}$;

4) $y = 2x^2 - 8$; 5) $y = =\sqrt[3]{11x-1}$.

3. Знайти логарифми:

1) $log_3 \frac{1}{9}$; 2) $log_4 64$; 3) $log_3 \frac{1}{81}$; 4) $log_2 8$.

4. Знайти число x, якщо:

1) $log_5 x = 2$; 2) $log_6 x = 3$; 3) $log_4 x = \frac{1}{2}$; 4) $log_{13} x = 0$; 5) $lg\ x = -3$.

§4. ГЕОМЕТРІЯ

Геометрія виникла як наука про вимірювання ділянок землі (гр. Гεο – земля, μετρια − вимірюю). Тепер геометрія складається з багатьох спеціальних розділів і теорій, далеких від вимірювання земельних ділянок. Геометрія – наука, що вивчає просторові властивості предметів, залишаючи осторонь всі інші їх властивості. Ту частину геометрії, яка вивчає фігури однієї площини, називають *планіметрією*. Фігури, розміщені в тривимірному просторі (плоскі чи неплоскі), вивчаються в *стереометрії*.

І. ПЛАНІМЕТРІЯ

Геометричною фігурою називається будь-яка множина точок. Наприклад: відрізок, квадрат, коло, круг, точка – це все фігури.

Множина, що складається з двох різних точок і всіх точок, що лежать між ними, називається *відрізком*. Якщо відрізок уявно продовжити в обидві сторони безмежно, то отримаємо *пряму*. Будь-яка точка розбиває пряму на два *променя*.

Об’єднання двох різних променів із спільним початком називається *кутом*. Дані промені – *сторони* кута, спільний початок – *вершина* кута. Кут із сторонами ОА і ОВ позначається так: $\angle$ABC. Кут, сторони якого утворюють пряму, називається *розгорнутим* кутом.

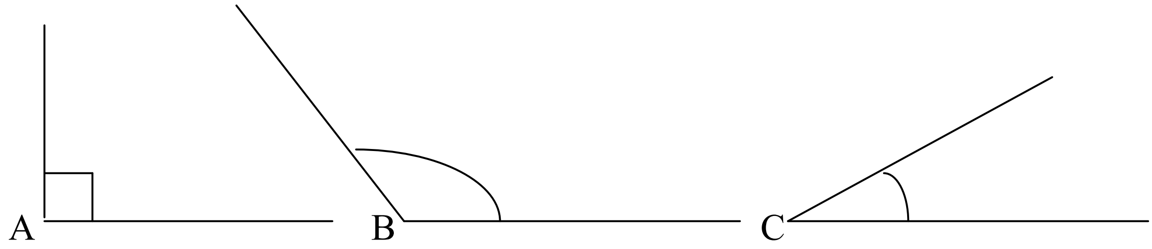
Промінь, що ділить кут пополам, називається *бісектрисою*. Бісектриса розгорнутого кута поділяє його на два кути, що називаються *прямими*.

Одна дев’яноста частина прямого кута називається градусом (1°). Прямий кут складає $\frac{\pi}{2}$ радіан:

$$1° = \frac{\pi}{180}\, радіан \approx 0{,}017453.$$

$$1 радіан = \frac{180°}{\pi} \approx 57°17'44{,}8''.$$

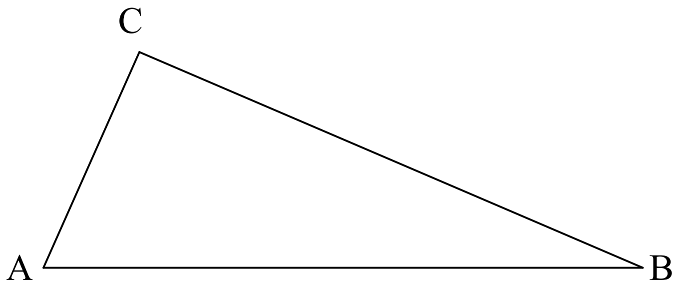
Кути, градусна міра яких більша за 90°, називаються *тупими*, менша за 90° – *гострими*.



$\angle$A − прямий $\angle$B − тупий $\angle$C − гострий

Якщо сторони кута лежать на одній прямій по різні боки від вершини кута, то такий кут називається *розгорнутим*. Градусна міра такого кута − 180°, радіанна − π.

Трикутником називається многокутник, що має три сторони. Позначають ΔABC – трикутник ABC:



У побудованому трикутнику AB, BC і AC – сторони трикутника, а A, B і C – його вершини.

Сума величин кутів трикутника (внутрішніх) дорівнює 180°.

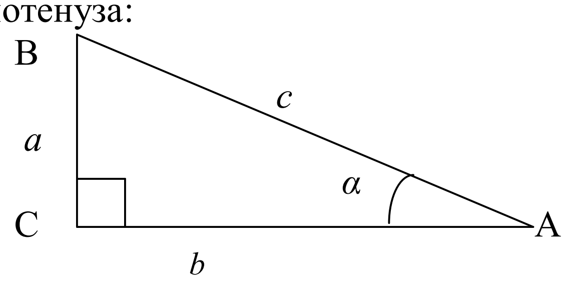
Висотою трикутника називається відрізок перпендикуляра, проведеного з вершини трикутника до прямої, що містить протилежну сторону.

Медіаною трикутника називається відрізок, що з’єднує його довільну вершину з серединою протилежної сторони. Точка перетину медіан трикутника поділяє кожну медіану у відношенні 2 : 1 (від вершини).

Бісектрисою трикутника називається відрізок бісектриси будь-якого кута цього трикутника від вершини до перетину її з протилежною стороною.

Якщо трикутник має прямий кут, такий трикутник називають *прямокутним*.

Нехай ABC – прямокутний трикутник з прямим кутом C і гострим кутом при вершині A, що дорівнює α. В даному трикутнику a і b – катети, c – гіпотенуза:



$a^2 + b^2 = c^2$ – теорема Піфагора.

Розв´язуючи трикутники, ми поставим перед собою задачу: знайти його невідомі сторорони та кути. Для цього введемо поняття тригонометричних функцій: косинус, синус, тангенс та котангенс.

Нехай ABC – прямокутний трикутник з прямим кутом C і гострим кутом при вершині A, що дорівнює *α*.

Косинусом (лат. *co* − при + *sinus* − затока) кута *α* називається відношення катета AC, прилеглого до кута α, до гіпотенузи AB: $\cos \alpha = \dfrac{AC}{AB}$.

Синусом (лат. *sinus* − затока) кута *α* називається відношення катета BC, протилежного до кута α, до гіпотенузи AB: $\sin \alpha = \dfrac{BC}{AC}$.

Тангенсом (лат. *tangens* − дотична) кута *α* називається відношення протилежного катета BC до прилеглого катета AC, тобто: $tg\,\alpha = \dfrac{BC}{AC}$.

Котангенсом кута *α* називається відношення прилеглого катета AC до протилежного катета BC, тобто: $ctg\,\alpha = \dfrac{AC}{BC}$.

Величини *cos α, sin α, tg α, ctg α* − математичні символи, що означають певні поняття, тому *неправильно* вважати, що, наприклад, між знаками *sin* та *α* існує дія множення (*sin α* − це єдиний і нероздільний символ).

З означень *cos α, sin α, tg α, ctg α* отримаємо такі правила:

1. Катет, протилежний куту *α*, дорівнює добутку гіпотенузи на *sin α.*
2. Катет, прилеглий до кута *α*, дорівнює добутку гіпотенузи на *cos α.*
3. Катет, протилежний куту *α*, дорівнює добутку другого катета на *tg α.*

Ці правила дають можливість за даною стороною і гострим кутом прямокутного трикутника знаходити дві інші його сторони, а за двома сторонами знаходити його гострі кути.

Для *cos α, sin* та *tg α* складено спеціальні таблиці, які дають можливість для даного кута знайти cos α, sin α і tg α, або, навпаки, за значенням cos α, sin α і tg α знайти відповідний кут. Для кутів 0°, 30°, 45°, 60°, 90° значення тригонометричних функцій запропоноване в наступній таблиці:

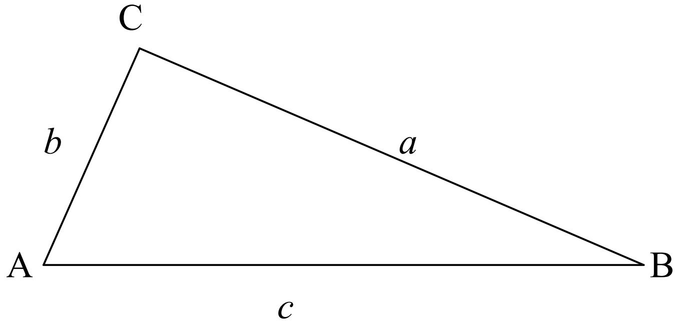
Значення тригонометричних функцій для кутів 0°, 30°, 45°, 60°, 90°

	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$tg\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	не існує
$ctg\alpha$	не існує	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Основні тригонометричні тотожності:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $ctg\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

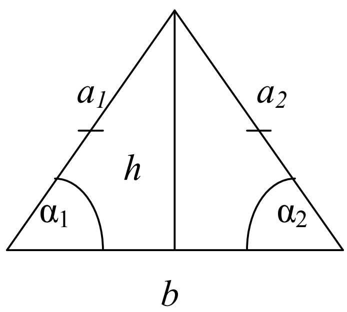
Розглянемо довільний трикутник ABC. Для того, щоб розв'язати даний трикутник, тобто знайти всі сторони та кути, користуються теоремами синусів та косинусів:



Теорема синусів: $\frac{a}{\sin\angle A} = \frac{b}{\sin\angle B} = \frac{c}{\sin\angle C}$.

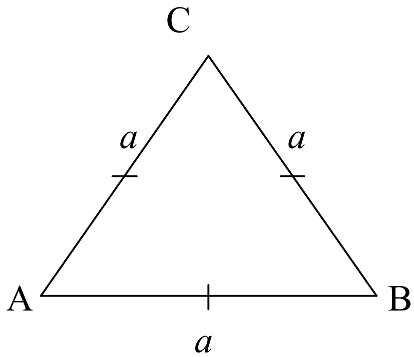
Теорема косинусів: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\angle A$.

Трикутник, у якого дві сторони рівні, називається *рівнобедреним*:



У даному трикутнику: $a_1 = a_2$, $\angle\alpha_1 = \angle\alpha_2$, h – висота, бісектриса і медіана.

Трикутник, у якого всі сторони рівні, називається *рівностороннім*:



В такому трикутнику: $\angle A = \angle B = \angle C$,

Площею S називається величина, що характеризує розмір геометричної фігури. Для того, щоб визначити площу дослідним шляхом, поверхню розкреслюють сіткою, наприклад, з розмірами клітинки 1см х 1см, потім підраховують кількість клітинок. Результат отримаємо в см^2. Крім цього, площа вимірюється в квадратних міліметрах (мм^2), квадратних метрах (м^2), квадратних кілометрах (км^2).

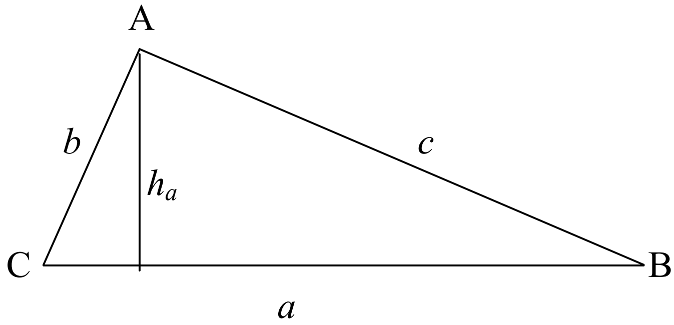
Оскільки одиниці довжини (міліметр, сантиметр, метр, кілометр) пов´язані між собою певними співвідношеннями, запишемо співвідношення, які дають можливість переходу від одних одиниць площі до інших:

1км = 1000 м = 10^3 см, отже 1км^2 = $(1000)^2$ см^2 = $(10^3)^2$ см^2 = 10^6 см^2.

Аналогічно 1м^2 = 10^4 см^2, 1см^2 = 10^2 мм^2.

Фігури, що мають однакові площі, називають *рівновеликими*.

Розглянемо трикутник АВС, в якому АВ = c, ВС = a, АС = b, АН – висота, проведена до сторони ВС:



Площа трикутника обчислюється за формулами:

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\angle C,$$

де a і b – сторони трикутника, а $\angle C$ – кут між цими сторонами.

$$S = \frac{1}{2}ah_a,$$

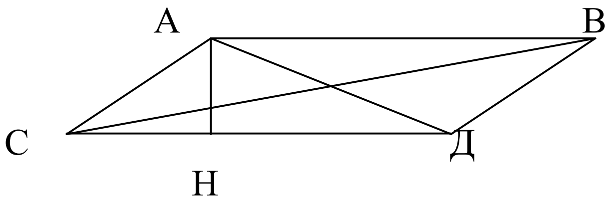
де h_a – висота, проведена до сторони a;

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

де $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

Чотирикутником називається многокутник, що має чотири сторони. Сума кутів чотирикутника дорівнює 360°.

Якщо в чотирикутнику протилежні сторони лежать на паралельних прямих, то такий чотирикутник називається *паралелограмом*:



У паралелограмі протилежні сторони і кути рівні:

$$\angle А = \angle Д,\ \angle В = \angle С,\ АВ = СД,\ АС = ВД,$$

де ВС і АД – діагоналі паралелограма, АН – висота паралелограма.

Для паралелограма справедлива рівність: ВС^2 + АД^2 = 2(АВ^2 + ВД^2).

Площа паралелограма обчислюється за формулами:

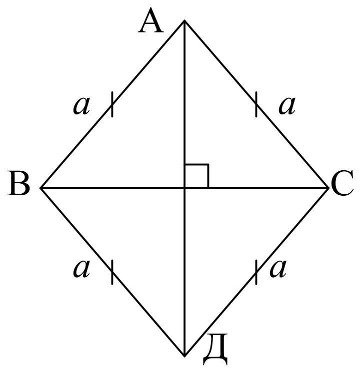
$$S = a \cdot h,$$

де a – сторона паралелограма, а h – висота, проведена до цієї сторони;

$$S = a \cdot b \cdot \sin\alpha,$$

де a і b – сторони, а α – гострий кут паралелограма.

Ромбом називають паралелограм, у якого всі сторони рівні:



Для ромба справедливі рівності:

$$d_1^2 + d_2^2 = 4a^2,$$

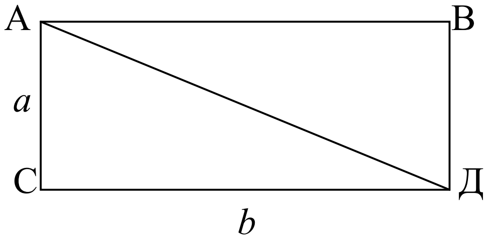
де a – сторона, а d_1 і d_2 – діагоналі ромба.

Площа ромба обчислюється за формулами:

$$S = \frac{d_1 d_2}{2} = ah = a^2 \sin\alpha,$$

де h – висота ромба, α – гострий кут ромба.

Прямокутником називають паралелограм, в якого всі кути прямі:

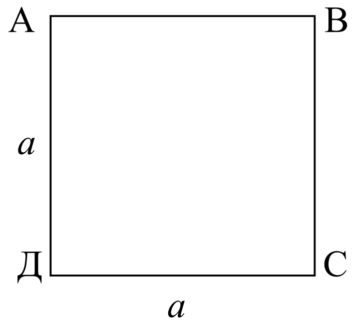


Площа паралелограма обчислюється за формулою:

$$S = a \cdot b,$$

де a і b – сторони.

Квадратом називають прямокутник, у якого всі сторони рівні:

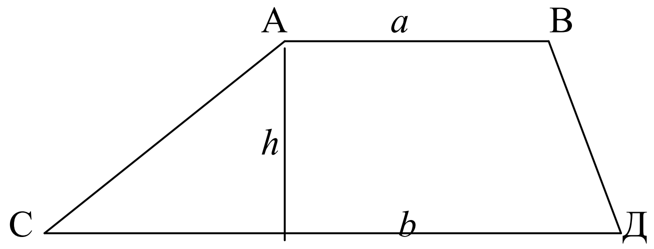


Площа квадрата обчислюється за формулою:

$$S = a^2,$$

де a – сторона.

Трапеція – чотирикутник, у якого дві сторони паралельні, а інші дві – не паралельні. Паралельні сторони називають *основами*, а непаралельні – *бічними сторонами*:

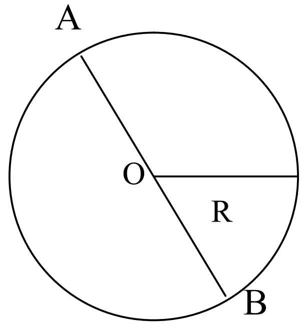


Площа трапеції обчислюється за формулою:

$$S = \frac{a+b}{2}h,$$

де a і b – основи трапеції, а h – висота.

Множина всіх точок, що лежать на однаковій відстані від даної точки O цієї площини, називається *колом*. Точка O – центр кола:



R – радіус, AB – діаметр кола.

Радіусом кола називається відрізок прямої, що сполучає центр кола з будь-якою точкою кола. Радіус і його довжину позначають буквою r або R.

Довжину кола позначають l і обчислюють за формулою:

$$l = 2\pi R.$$

Площу круга обчислюють за формулою:

$$S = \pi R^2,$$

де R – радіус кола.

Число π – це відношення довжини кола до діаметру (діаметр дорівнює двом радіусам), воно дорівнює $\pi = 3{,}14159265... \approx 3{,}14$.

II. СТЕРЕОМЕТРІЯ

Многогранником називається тіло, обмежене скінченним числом площин. Поверхня многогранника складається зі скінченного числа многокутників, що називаються *гранями* многогранника. Сторони граней називаються *ребрами*, а вершини – *вершинами* многогранника.

Основними характеристиками многогранника є об’єм та площа повної поверхні.

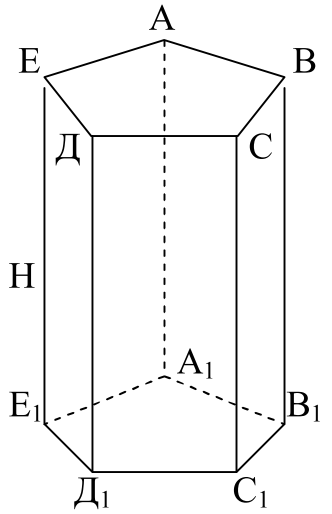
Об’єм V – величина, що характеризує розмір геометричного тіла. У повсякденному житті нам часто доводиться визначати об’єми різних тіл. Наприклад, необхідно визначити об’єм ящика, коробки. Не знаючи формул, можна підійти до визначення об’єму і дослідним шляхом: щільно скласти кубики із сантиметровим ребром і підрахувати їх. Результат отримаємо в кубічних сантиметрах (см^3). Об’єм також вимірюється в кубічних міліметрах (мм^3), кубічних метрах (м^3), кубічних кілометрах (км^3).

Запишемо співвідношення, які дають можливість переходу від одних одиниць об´єму до інших.

Оскільки 1км = 1000 м = 10^3 см, то 1 $км^3 = (1000)^3 см^3 = (10^3)^3 см^3 = 10^9 см^3$.
Аналогічно $1м^3 = 10^6 см^3$, $1 см^3 = 10^3 мм^3$. У побуті користуються такими одиницями вимірювання об'єму, як літр: 1 л = 1 $дм^3 = 10^{-3} м^3 = 0{,}001 м^3$.

Площа повної поверхні S_n – це величина, яка дорівнює сумі площ граней многогранника. Площа повної поверхні, як і площа многокутника, вимірюється в $мм^2$, $см^2$, $м^2$, $км^2$.

Призма – це многогранник, основи якого – це рівні многокутники, а бічні грані – паралелограми. Якщо ребра перпендикулярні до площини основи, то призма називається *прямою*. Якщо пряма призма в основі має правильні многокутники, то вона називається *правильною*:



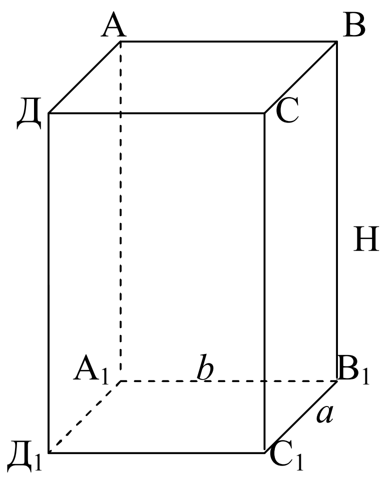
$АВСДЕА_1В_1С_1Д_1Е_1$ – призма, в основі якої лежать правильні п'ятикутники $А_1В_1С_1Д_1Е_1$ і АВСДЕ.
$AA_1 = BB_1 = CC_1 = ДД_1 = EE_1 = H$ − висота

Об'єм V та повна поверхня призми S_n обчислюються за формулами:

$$V = S_oH;\ S_n = P_oH + S_o,$$

де H – висота призми, а S_o і P_o − відповідно площа та периметр основи.

Паралелепіпед − це призма, основами якої є паралелограми. Прямий паралелепіпед, основи якого утворені прямокутниками, називається *прямокутним*:



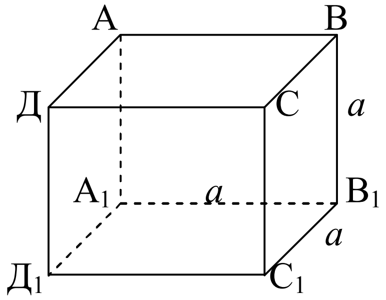
$АВСДА_1В_1С_1Д_1$ – паралелепіпед.
АВСД і $А_1В_1С_1Д_1$ – основи.
$AA_1 = BB_1 = CC_1 = ДД_1 = H$ − висота.

Об'єм та повна поверхня паралелепіпеда обчислюються за формулами:

$$V = abH;\ S_n = 2(ab + bH + aH),$$

де *a*, *b*, *c* – ребра паралелепіпеда.

Куб – це прямокутний паралелепіпед, у якого всі ребра рівні, тобто $a = b = H$:



$ABCДA_1B_1C_1Д_1$ – куб

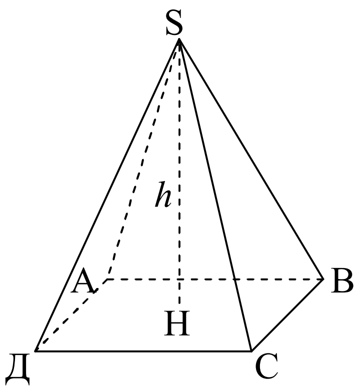
$AB=BC=CД=AД=A_1B_1=B_1C_1=C_1Д_1=A_1Д_1=AA_1=BB_1=CC_1=ДД_1=a$

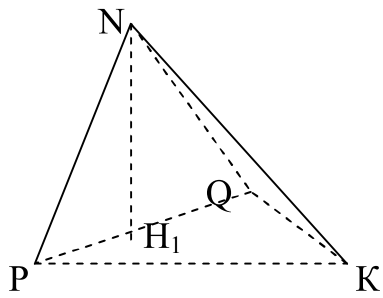
За означенням куба можна зробити висновки, що об'єм V та повна поверхня S_n куба обчислюються за формулами:

$$V = a^3;\ S_n = 6a^2,$$

де a – сторона куба.

Піраміда – це многогранник, який складається з плоского многокутника – основи піраміди, точки, що не лежить у площині основи, – вершини піраміди та усіх відрізків, які сполучають вершину з точками основи:





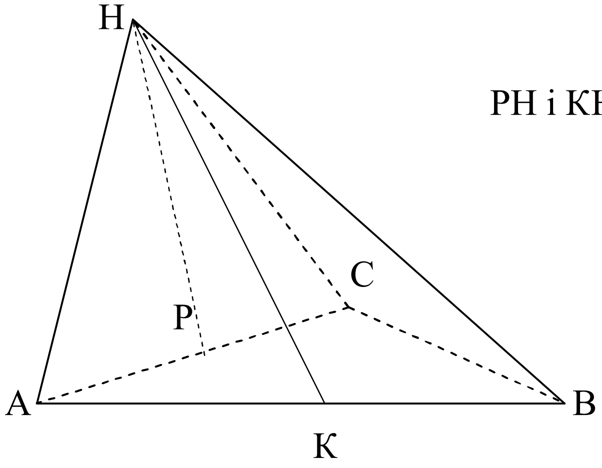
SABCД – піраміда, в основі якої лежить чотирикутник; NQKP – піраміда, в основі якої трикутник; SH і NH_1 – висоти відповідних пірамід.

Об'єм V піраміди обчислюється за формулою:

$$V = \frac{1}{3} S_o H,$$

де H – висота піраміди, а S_o – площа основи.

Висота будь-якої бічної грані називається *апофемою*.



PH і KH – апофеми.

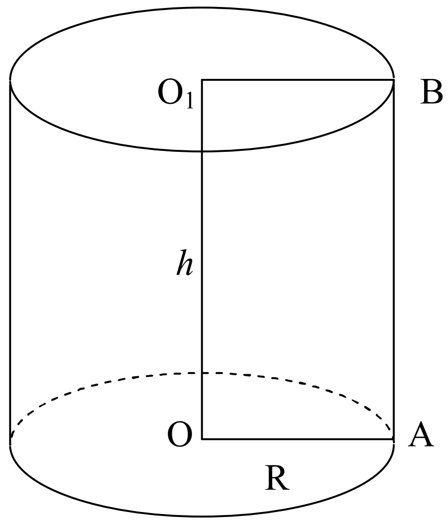
Якщо основа піраміди − правильний многокутник, а бічні грані − рівнобедрені (як частковий випадок − рівносторонні) трикутники, то піраміда називається *правильною*. Бічна поверхня такої піраміди дорівнює:

$$S_n = S_o + \frac{1}{2}pl,$$

де *p* − периметр основи, *l* − апофема.

Якщо всі грані та основа − трикутники, то піраміда називається *тетраедром*.

Круговий циліндр − тіло, основа якого − круг радіусом R, а твірна перпендикулярна до площини основи:



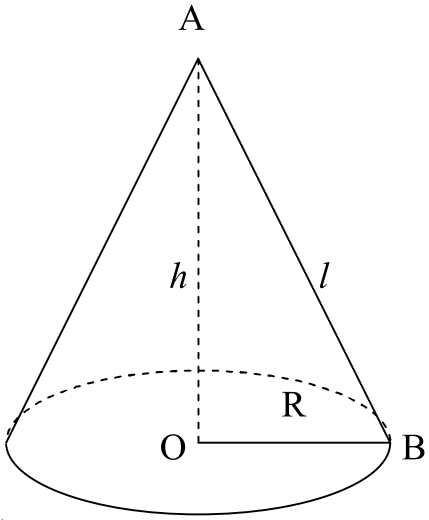
$OA = O_1B = R$ – радіуси основ.
$OO_1 = h$ – висота циліндра.

Об'єм V та повна поверхня циліндра S_n обчислюються за формулами:

$$V = \pi R^2 h,\ S_n = 2\pi R(R + h),$$

де R − радіус основи, h − висота циліндра.

Круговим конусом називається тіло, утворене при обертанні прямокутного трикутника навколо катета:



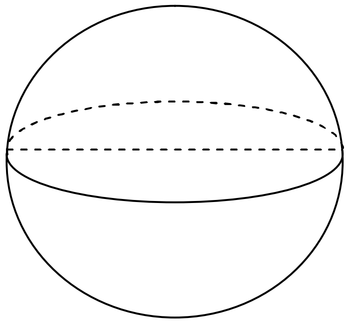
Зображений конус утворено обертанням трикутника ABC.
OB – радіус основи, AO – висота,
AB – твірна.

Об'єм V та повна поверхня конуса S_n обчислюються за формулами:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h,\ S_n = \pi R(l + R),$$

де R – радіус основи, *l* – твірна.

Куля − тіло, утворене обертанням круга навколо діаметра:



Об’єм та повна поверхня кулі обчислюються за формулами:

$V = \frac{4}{3}\pi R^3$, $S_n = 4\pi R^2$,

де R – радіус кулі.

Питання для самоперевірки

1. Що називають многокутником? Які многокутники ви знаєте?
2. Що називають трикутником? Які бувають трикутники?
3. У чому полягає теорема Піфагора та для яких трикутників вона використовується?
4. Що називають синусом, косинусом, тангенсом та котангенсом кута α?
5. Основні співвідношення між кутами та сторонами прямокутного трикутника.
6. Значення тригонометричних функцій для кутів 0°, 30°,45°,60° та 90°.
7. Що називають площею?
8. Як обчислити площу трикутника?
9. Що називають медіаною, висотою та бісектрисою трикутника?
10. Що називають паралелограмом?
11. Як обчислити площу паралелограма?
12. Що називають прямокутником?
13. Як обчислити площу прямокутника?
14. Що називають ромбом?
15. Як обчислити площу ромба?
16. Що називають квадратом?
17. Як обчислити площу квадрата?
18. Що називають трапецією?
19. Як обчислити площу трапеції?
20. Коло та його довжина.
21. Круг та його площа.
22. Що називають многогранником?
23. Що називається об’ємом та площею повної поверхні?
24. Що називають призмою?
25. Чому дорівнює об’єм та площа повної поверхні призми?
26. Що називають паралелепіпедом?
27. Чому дорівнює об’єм та площа повної поверхні паралелепіпеда?
28. Що називають кубом?
29. Чому дорівнює об’єм та площа повної поверхні куба?
30. Що називають пірамідою?
31. Чому дорівнює об’єм та площа повної поверхні піраміди?
32. Що називають круговим циліндром?

33. Чому дорівнює об’єм та площа повної поверхні кругового циліндра?
34. Що називають круговим конусом?
35. Чому дорівнює об’єм та площа повної поверхні кругового конуса?
36. Що називають кулею?
37. Чому дорівнює об’єм та площа повної поверхні кулі?

Задачі для самостійного розв’язування

1. Знайти невідомі сторони та кути трикутника ABC, якщо:
   1) AB = 12см; $\angle A = 45°$; $\angle C = 30°$;
   2) BC = 6см; $\angle B = 45°$; $\angle C = 45°$;
2. Знайти радіанну міру кутів:
   12°; 45°; 72°; 105°; 135°.
3. Знайти градусну міру кута, радіанна міра якого дорівнює:
   $\frac{\pi}{30}$; $\frac{\pi}{8}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{5}{6}\pi$; $\frac{13}{18}\pi$.
4. Знайти площу квадрата, діагональ якого дорівнює $8\sqrt{2}$ см.
5. Діагональ прямокутника дорівнює $12\sqrt{3}$ см і утворює зі стороною кут 60°. Знайти площу прямокутника.
6. Площа прямокутника дорівнює 144 см^2. Знайти його сторони, якщо одна з них у 8 разів більша за другу.
7. Площа паралелограма дорівнює 56 см^2. Знайти довжини протилежних сторін, якщо відстань між ними 14 см.
8. Площа паралелограма дорівнює 120 см^2, а дві його сторони – 15 см і 10 см. Знайти висоти паралелограма.
9. Сторона квадрата дорівнює стороні ромба, а гострий кут ромба дорівнює 45°. Знайти відношення площі квадрата до площі ромба.
10. Знайти площу прямокутного трикутника, катет якого дорівнює 8 см, а гіпотенуза 17 см.
11. Знайти площу рівнобедреного трикутника, бічна сторона якого дорівнює 17 см, а висота, проведена до основи, – 8 см.
12. Площа трапеції дорівнює 92 см^2, а її висота – 8 см. Знайти основи трапеції, якщо їх різниця дорівнює 9 см.
13. Знайти площу рівнобічної трапеції, менша основа якої складає 10 см, бічна сторона – 6 см, а тупий кут 120°.
14. Знайти площу круга, довжина якого дорівнює 6π см.
15. На котушку радіусом 1,5 см намотано 40 см мотузки. Скільки зроблено повних витків?
16. Знайти площу повної поверхні і об’єм прямокутного паралелепіпеда, якщо a = 5 см, b = 6 см, c = 4 см.
17. В основі прямої призми лежить паралелограм, сторони якого 5 см і 6 см, а тупий кут 150°. Знайти площу повної поверхні і об’єм призми, якщо її висота дорівнює 8 см.
18. В основі піраміди лежить правильний шестикутник зі стороною 2 см. Знайти об’єм піраміди, якщо її висота 10 см.

19. Усі бічні грані правильного чотирикутної піраміди – правильні трикутники зі стороною 4 см. Знайти площу повної поверхні та об’єм піраміди.

20. Прямокутник, сторони якого дорівнюють 12 см і 8 см, обертається навколо меншої сторони. Знайти площу повної поверхні і об’єм утвореного циліндра.

21. Прямокутний трикутник, катети якого дорівнюють 24 см і 10 см, обертають навколо більшого катета. Знайти площу повної поверхні і об’єм утвореного конуса.

22. Знайти площу повної поверхні і об’єм кулі, діаметр якої дорівнює 6 см.

ДОДАТКИ

Відповіді до задач для самостійного розв'язування

§1

1. 1) -7; **2)** 1; **3)** 0,8; **4)** -68; **5)** 6,03; **6)** $\frac{1}{24}$; **7)** $\frac{41}{42}$.

2. $\frac{3}{5}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{17}{25}$; $\frac{8}{25}$; $\frac{22}{25}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{2327}{5000}$; $\frac{57}{20}$.

3. $\frac{1}{8}$; $\frac{5}{24}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$.

4. 1) $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{5}{8}$; $\frac{7}{10}$; **2)** $\frac{9}{28}$; $\frac{3}{7}$; $\frac{9}{14}$; $\frac{5}{8}$

5. 1) $\frac{11}{45}$; **2)** $2\frac{13}{19}$; **3)** $\frac{171}{200}$; **4)** $2\frac{1}{3}$.

6. 1) 0,12; **2)** 3,7925; **3)** $-2{,}01$; **4)** 4,385.

7. 1) $-4{,}68$; **2)** $-60{,}45$; **3)** 1720.

§2

1. 1) $6\frac{17}{24}$; **2)** 18; **3)** 5,3.

2. 1) 2,0098; **2)** $3\frac{5}{6}$; **3)** $2\frac{37}{40}$.

3. 1) $-0{,}4$; **2)** 103,65.

4. 1) $-1{,}5$; **2)** $-\frac{1}{3}$; **3)** $2\frac{1}{3}$; **4)** 13,5; **5)** $-\frac{1}{4}$.

5. 1) 70 333; **2)** 2 243 240; **3)** 116,5; **4)** 5,5; **5)** 11,9.

6. 1) $x_1=-2$, $x_2=19$; **2)** $x_1=-0{,}2$, $x_2=0{,}8$; **3)** $x_1=-4$, $x_2=1$; **4)** $x_1=x_2=\frac{1}{4}$;

5) $x_1=x_2=5$; **6)** $x_1=x_2=1\frac{1}{3}$; **7)** $x_1=0$, $x_2=\frac{1}{7}$; **8)** $x_1=0$, $x_2=7$.

§3

2. 1) $x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$; **2)** $x\in\left[\frac{1}{5};+\infty\right)$; **3)** $x\in\left(-\infty;\frac{3}{4}\right)\cup\left(\frac{3}{4};+\infty\right)$;

4) $x\in\mathrm{R}$; **5)** $x\in\mathrm{R}$.

3. 1) -2; **2)** 3; **3)** -4; **4)** 3.

4. 1) 25; **2)** 216; **3)** 2; **4)** 1; **5)** 0,001.

§4

1. 1) $\angle B=105°$; $BC=12\sqrt{2}$; $AC=6(\sqrt{3+2})$;

2) $\angle A=90°$; $AB=3\sqrt{2}$; $AC=3\sqrt{2}$.

2. 1) $\frac{\pi}{12}$; **2)** $\frac{\pi}{4}$; **3)** $\frac{2\pi}{5}$; **4)** $\frac{21\pi}{36}$; **5)** $\frac{3\pi}{4}$.

3. **1)** 6°; **2)** 22,5°; **3)** 45°; **4)** 30°; **5)** 130°.
4. 64 см^2. **5.** $108\sqrt{3}$ см^2. **6.** $3\sqrt{2}$ см; $24\sqrt{3}$ см. **7.** 4см. **8.** 10см; 12см.
9. $\sqrt{2}$ **10.** 60см^2. **11.** 255см^2. **12.** 7см; 16см. **13.** $39\sqrt{3}$ см^2. **14.** 9π.
15. 8 витків. **16.** 104см^2; 120см^3. **17.** 120см^2. **18.** $60\sqrt{2}$ см^2.
19. $(16+16\sqrt{3})$см^2; $\frac{32\sqrt{2}}{3}$ см^3. **20.** 480π см^2; 1152π см^3.
21. 360π см^2; 800π см^3. **22.** 36π см^2; 12π см^3.

Деякі математичні сталі

$\pi \approx 3{,}1415926536;$
$e \approx 2{,}7182818285;$
$1° = \frac{\pi}{180} \approx 0{,}0174532925\text{рад.};$
$1\text{рад.} = \frac{180}{\pi} \approx 57°17'45'';$
$\ln\pi \approx 1{,}144729886;$
$\lg e \approx 0{,}4342944819.$

Одиниці вимірювання довжини, площі та об’єму

$$1\text{м} = \begin{cases} 10^3\,\text{мм} \\ 10^2\,\text{см} \\ 10^{-3}\,\text{км} \end{cases} \qquad 1\text{м}^2 = \begin{cases} 10^6\,\text{мм}^2 \\ 10^4\,\text{см}^2 \\ 10^{-6}\,\text{км}^2 \end{cases} \qquad 1\text{м}^3 = \begin{cases} 10^9\,\text{мм}^3 \\ 10^6\,\text{см}^3 \\ 10^{-9}\,\text{км}^3 \end{cases}$$

Латинський алфавіт

A a	(*A a*)	а	J j	(*J j*)	йот	S s	(*S s*)	ес
B b	(*B b*)	бе	K k	(*K k*)	ка	T t	(*T t*)	те
C c	(*C c*)	це	L l	(*L l*)	ель	U u	(*U u*)	у
D d	(*D d*)	де	M m	(*M m*)	ем	V v	(*V v*)	ве
E e	(*E e*)	е	N n	(*N n*)	ен	W w	(*W w*)	дубль-ве
F f	(*F f*)	еф	O o	(*O o*)	о	X x	(*X x*)	ікс
G g	(*G g*)	же	P p	(*P p*)	пе	Y y	(*Y y*)	ігрек
H h	(*H h*)	аш	Q q	(*Q q*)	кю	Z z	(*Z z*)	зет
I i	(*I i*)	і	R r	(*R r*)	ер			

Грецький алфавіт

Α α	альфа	Ι ι	йота	Ρ ρ	ро
Β β	бета	Κ κ	каппа	Σ σ	сигма
Γ γ	гамма	Λ λ	лямбда	Τ τ	тау
Δ δ	дельта	Μ μ	мі (мю)	Φ φ	фі
Ε ε	іпсилон	Ν ν	ні (ню)	Χ χ	хі
Ζ ζ	дзета	Ξ ξ	ксі	Υ ύ	іпсилон
Η η	ета	Ο ο	омікрон	Ψ ψ	псі
Θ θ	тета	Π π	пі	Ω ω	омега

Таблиця множення *a*×*b*

a \ *b*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Основні математичні позначення

$=$	дорівнює	$a = b$
$\neq$	не дорівнює	$a \neq b$
$\equiv$	тотожньо дорівнює	$a \equiv b$
$\approx$	наближено дорівнює	$a \approx b$
$>$	більше	$a > b$
$<$	менше	$a < b$
$\geq$	більше або дорівнює	$a \geq b$
$\leq$	менше або дорівнює	$a \leq b$
$\vert\ \vert$	модуль	$\vert a \vert$
$\in$	належить	$a \in A$
$\notin$	не належить	$a \notin B$
$\Leftrightarrow$	рівносильно	$a = b \Leftrightarrow b = a$
$\Rightarrow$	слідує	$2a = b \Rightarrow a = 0{,}5b$
$\subset$	включення	$A \subset B$
$\cup$	об'єднання (або)	$c \in A \cup B$
$\cap$	перетин (і)	$c \in A \cap B$
$\sum$	сума	$\sum_{1}^{3} n = 1 + 2 + 3 = 6$
$\prod$	добуток	$\prod_{1}^{3} n = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$
$\parallel$	паралельність	$AB \parallel CD$
$\perp$	перпендикулярність	$AB \perp CD$
$\sim$	подібність	$\Delta ABC \sim \Delta DEF$
$\varnothing$	порожня множина	$x^2 < 0 \Rightarrow x \in \varnothing$

Абетковий покажчик

-куба
-кулі
-паралелепіпеда
-піраміди
Область визначення функції
Область значення функції
Округлення дробів
Планіметрія
Площа повної поверхні:
-кругового конуса
-кругового циліндра
-куба
-кулі
-паралелепіпеда
-піраміди
Площа фігури
Призма
Пряма
Раціональні числа
Рівняння
Синус кута
Степенева форма запису числа
Степінь числа
Стереометрія
Тангенс кута
Теорема Вієта
Тотожність
Трикутник
Формули скороченого множення
Функція:
-квадратична функція
-логарифмічна функція
-лінійна функція
-обернена функція
-показникова функція
Чисельник дробу
Чотирикутник:
-квадрат
-паралелограм
-прямокутник
-ромб
-трапеція

Рекомендована література

1. Бевз Г.П. Довідник з математики. − К.: Рад школа, 1981. − 262с.
2. Бевз Г.П., Боголюбов О.М., Фільчаков П.В. Довідник з елементарної математики. − К.: Наукова думка, 1976. − 654с.
3. Фільчаков П.Ф. Довідник з елементарної математики. − К.: Наукова думка, 1967. − 440с.
4. Шевченко Р.Л. Основи вищої математики. – Біла Церква, 2005. − 280с.

ЗМІСТ

Навчальне видання

Основи елементарної математики
Навчальний посібник для самостійного опрацювання

Мельниченко Олена Петрівна**,**
Шевченко Ростислав Леонідович**,**
Якименко Ігор Леонідович**,**
Розумнюк Віктор Трохимович

Редактор О. М. Трегубова
Комп'ютерна верстка:

Здано до складання 31.10.2005. Підп. до друку .Ум. друк. арк.
Формат 60x84 $^{1}/_{16}$ Тираж 100. Зам. Ціна

Сектор оперативної поліграфії РВІКВ БДАУ
09117 Біла Церква, Соборна пл., 8/1; тел. 3-11-01.