ЗМІСТ

РОЗДІЛ 1. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

§1.1. Матриці та дії над ними.

ПРАКТИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

П р и к л а д : Дано матриці A та B: $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 3 & 5 & -3\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -11 & 4 & 5\\ -3 & -1 & 2\end{pmatrix}$,

знайти матриці а) $A+B$; б) $-4A$; в) A^T; г) $A\cdot B$; д) $B\cdot A$; е) A^2.

а) $$A+B=\begin{pmatrix}1+0 & -2+1 & 0+0\\ 3+(-11) & 5+4 & -3+5\\ 2+(-3) & 0+(-1) & -1+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -8 & 9 & 2\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix};$$

б) $$-4\cdot A=\begin{pmatrix}-4\cdot 1 & -4\cdot(-2) & -4\cdot 0\\ -4\cdot 3 & -4\cdot 5 & -4\cdot(-3)\\ -4\cdot 2 & -4\cdot 0 & -4\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 8 & 0\\ -12 & -20 & 12\\ -8 & 0 & 4\end{pmatrix};$$

в) $$A^T=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 3 & 5 & -3\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ -2 & 5 & 0\\ 0 & -3 & -1\end{pmatrix};$$

г) $$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 3 & 5 & -3\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -11 & 4 & 5\\ -3 & -1 & 2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot 0+(-2)\cdot(-11)+0\cdot(-3) & 1\cdot 1+(-2)\cdot 4+0\cdot(-1) & 1\cdot 0+(-2)\cdot 5+0\cdot 2\\ 3\cdot 0+5\cdot(-11)+(-3)\cdot(-3) & 3\cdot 1+5\cdot 4+(-3)\cdot(-1) & 3\cdot 0+5\cdot 5+(-3)\cdot 2\\ 2\cdot 0+0\cdot(-11)+(-1)\cdot(-3) & 2\cdot 1+0\cdot 4+(-1)\cdot(-1) & 2\cdot 0+0\cdot 5+(-1)\cdot 2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}22 & -7 & -10\\ -46 & 26 & 19\\ 3 & 3 & -2\end{pmatrix};$$

д) $$B\cdot A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -11 & 4 & 5\\ -3 & -1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 3 & 5 & -3\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0\cdot 1+1\cdot 3+0\cdot 2 & 0\cdot(-2)+1\cdot 5+0\cdot 0 & 0\cdot 0+1\cdot(-3)+0\cdot(-1)\\ -11\cdot 1+4\cdot 3+5\cdot 2 & -11\cdot(-2)+4\cdot 5+5\cdot 0 & -11\cdot 0+4\cdot(-3)+5\cdot(-1)\\ -3\cdot 1-1\cdot 3+2\cdot 2 & -3\cdot(-2)-1\cdot 5+2\cdot 0 & -3\cdot 0-1\cdot(-3)+2\cdot(-1)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 3 & 5 & -3 \\ 11 & 42 & -17 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

е) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$

$$=\begin{pmatrix} 1\cdot 1 - 2\cdot 3 + 0\cdot 2 & 1\cdot(-2) - 2\cdot 5 + 0\cdot 0 & 1\cdot 0 - 2\cdot(-3) + 0\cdot(-1) \\ 3\cdot 1 + 5\cdot 3 - 3\cdot 2 & 3\cdot(-2) + 5\cdot 5 - 3\cdot 0 & 3\cdot 0 + 5\cdot(-3) - 3\cdot(-1) \\ 2\cdot 1 + 0\cdot 3 - 1\cdot 2 & 2\cdot(-2) + 0\cdot 5 - 1\cdot 0 & 2\cdot 0 + 0\cdot(-3) - 1\cdot(-1) \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} -5 & -12 & 6 \\ 12 & 19 & -12 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

№1.1. Для матриць A та B: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$, знайти матриці:

а) $A + B$; б) $-4A$; в) A^T; г) $A \cdot B$; д) $B \cdot A$; е) A^2.

№1.2. Виконати множення матриць $A \cdot B$ та $B \cdot A$, якщо $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$.

№1.3. Для матриць $A = \begin{pmatrix} 1 & 11 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$ та $B = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$ знайти матриці:

а) $2A + \frac{1}{2}B$; б) $2AB - B$; в) $2BA + 4A$.

№1.4. Для матриць A та B: $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 11 & 9 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, знайти матриці:

а) $A + B$; б) $-4A$; в) A^T; г) $A \cdot B$; д) $B \cdot A$; е) A^2.

№1.5. Для матриць A та B: $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, знайти матриці:

а) $2A+\frac{1}{2}B$; б) $2AB-B$; в) $2BA+4A$.

№1.6. Для матриць $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -5\end{pmatrix}$ та $B=\begin{pmatrix}9 & -2\\ 7 & 3\end{pmatrix}$ перевірити, чи справджуються формули скороченого множення:

а) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$; б) $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

Виконати дії в наступних прикладах:

№1.7. $\left(\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & -3\\ -4 & 1\end{pmatrix}\right)^2$;

№1.8. $\left(\begin{pmatrix}5 & -6\\ 3 & 7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}9 & -11\\ 4 & 7\end{pmatrix}\right)^2$;

№1.9. $\begin{pmatrix}1 & -8 & 5\\ -3 & 4 & 2\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}^2-\begin{pmatrix}1 & -8 & 5\\ -3 & 4 & 2\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}$;

№1.10. $\begin{pmatrix}2 & -7 & 4\\ -1 & 0 & -2\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}^2+\begin{pmatrix}2 & -7 & 4\\ -1 & 0 & -2\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}^T$;

№1.11. $\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}12 & 0\\ 6 & -8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & -3\\ 4 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ -3 & 4\end{pmatrix}$;

№1.12. $\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}12 & 0\\ 6 & -3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}7 & -3\\ 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$;

№1.13. $\begin{pmatrix}-7 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}8 & -1\\ 3 & 2\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}4 & 2\\ 0 & 8\end{pmatrix}$;

№1.14. $\begin{pmatrix}-7 & 5\\ 1 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}8 & -1\\ -7 & 5\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}-6 & 9\\ 0 & 3\end{pmatrix}$;

№1.15. $\begin{pmatrix}4 & 1 & -5\\ 2 & 3 & 7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -4\\ 3 & 5\\ 4 & 6\end{pmatrix}-7\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & -3\end{pmatrix}$;

№1.16. $\begin{pmatrix}2 & -4\\ 3 & 5\\ 4 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 1 & -5\\ 2 & 3 & 7\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}1 & -4 & -5\\ 2 & 4 & 6\\ -3 & 5 & 1\end{pmatrix}$;

№1.17. $7\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 6 & -5 \\ -9 & 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 7 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$;

№1.18. $4\begin{pmatrix} 1 & -4 & -5 \\ 0 & 7 & 6 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & -5 \\ -9 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 3 & -5 \\ 2 & 8 & 7 \end{pmatrix}$.

Індивідуальне завдання

Виконати дії $\begin{pmatrix} 1 & n & 2 \\ -3 & n-1 & 5 \\ 4 & n+1 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n-3 & n-4 & n-5 \\ -3 & 4 & -5 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} + n \cdot \begin{pmatrix} 2 & -n & 1 \\ n & 3 & -2 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$,
де n – остання цифра номера студента за списком.

Теми рефератів

1. Дії над матрицями та їх властивості.
2. Застосування матричного числення при розв’язуванні прикладних задач.

§1.2. Визначники. Мінори. Алгебраїчні доповнення.

ПРАКТИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

П р и к л а д 1 : Обчислити визначники другого та третього порядку:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 22 \end{vmatrix} = 3 \cdot 22 - 1(-4) = 70.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 6 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 4 \cdot 5 \cdot 5 + 2 \cdot (-3) \cdot (-2) + (-3) \cdot 3 \cdot 6 -$$

$$-(-2) \cdot 5 \cdot 6 - (-3) \cdot 3 \cdot 4 - 2 \cdot (-3) \cdot 5 = 100 + 12 - 54 + 60 + 36 + 30 = 184.$$

П р и к л а д 2 : Дано матрицю $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 6 & -3 & 5 \end{pmatrix}$.

Обчислити мінори M_{12} і M_{22} та алгебраїчні доповнення A_{12} і A_{22}.

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 18 = -8; \; M_{22} = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 20 - (-12) = 32;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot (2 \cdot 5 - 3 \cdot 6) = -(10 - 18) = 8;$$

$$A_{22}=\left(-1\right)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}4&-2\\6&5\end{vmatrix}=\left(-1\right)^{4}\cdot\left(4\cdot5-6\cdot\left(-2\right)\right)=20-\left(-12\right)=32.$$

П р и к л а д 3: Обчислити визначник розкладаючи його за елементами третього рядка:

$$\Delta=\begin{vmatrix}3&-7&5\\1&-2&3\\4&2&-11\end{vmatrix}=4\cdot\left(-1\right)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}-7&5\\-2&3\end{vmatrix}+2\cdot\left(-1\right)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}3&5\\1&3\end{vmatrix}+\left(-11\right)\cdot\left(-1\right)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}3&-7\\1&-2\end{vmatrix}=$$

$$=4\cdot1\cdot\left(-7\cdot3-5\cdot\left(-2\right)\right)+2\cdot\left(-1\right)\cdot\left(3\cdot3-5\cdot1\right)+\left(-11\right)\cdot1\cdot\left(3\cdot\left(-2\right)-\left(-7\right)\cdot1\right)=-44-$$
$$-8-11=63.$$

П р и к л а д 4 : Обчислити визначник четвертого порядку:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&2&-1&2\\3&0&1&5\\1&-2&0&3\\-2&-4&-1&6\end{vmatrix}.$$

Додамо перший рядок до другого і четвертого, утворивши визначник

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&2&-1&2\\4&2&0&7\\1&-2&0&3\\-1&-2&0&8\end{vmatrix}.$$

Переставимо місцями перший і третій стовпчики:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&2&1&2\\0&2&4&7\\0&-2&1&3\\0&-2&-1&8\end{vmatrix}.$$

Додамо другий рядок до третього і четвертого рядків і винесемо спільний множник елементів третього та четвертого рядків:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&2&1&2\\0&2&4&7\\0&0&5&10\\0&0&3&15\end{vmatrix}=-5\cdot3\cdot\begin{vmatrix}1&2&1&2\\0&2&4&7\\0&0&1&2\\0&0&1&5\end{vmatrix}.$$

Віднявши третій рядок від четвертого, одержимо:

$$\Delta = -5 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -15 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 = -90 .$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Обчислити визначники в наступних завданнях:

№1.19. $\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 7 & 12 \end{vmatrix}$;

№1.20. $\begin{vmatrix} 9 & 0 \\ 14 & 1 \end{vmatrix}$;

№1.21. $\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$;

№1.22. $\begin{vmatrix} -7 & 1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix}$;

№1.23. $\begin{vmatrix} -6 & 11 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}$;

№1.24. $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -8 & -2 \end{vmatrix}$;

№1.25. $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 3 \\ 7 & 3 & 5 \end{vmatrix}$;

№1.26. $\begin{vmatrix} 4 & 7 & 3 \\ -9 & 6 & 2 \\ 8 & 5 & 1 \end{vmatrix}$;

№1.27. $\begin{vmatrix} -5 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \\ 8 & 3 & 5 \end{vmatrix}$;

№1.28. $\begin{vmatrix} 1 & -4 & 7 \\ -2 & 5 & -8 \\ 3 & -6 & 9 \end{vmatrix}$;

№1.29. $\begin{vmatrix} -5 & 9 & 2 \\ -6 & -5 & 3 \\ 7 & -1 & 0 \end{vmatrix}$;

№1.30. $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & 2 \\ 13 & 7 & 4 \end{vmatrix}$;

№1.31. $\begin{vmatrix} 25 & 8 & 3 \\ -3 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & -2 \end{vmatrix}$;

№1.32. $\begin{vmatrix} 7 & 8 & 3 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & 6 & 5 \end{vmatrix}$;

№1.33. $\begin{vmatrix} 11 & 5 & 6 \\ 1 & -2 & -3 \\ 7 & 4 & 4 \end{vmatrix}$;

№1.34. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 10 & 3 \\ 4 & -1 & 5 \end{vmatrix}$;

№1.35. $\begin{vmatrix} 3 & 9 & 1 \\ 9 & 12 & 5 \\ 2 & -3 & -2 \end{vmatrix}$;

№1.36. $\begin{vmatrix} 20 & 3 & -3 \\ -5 & -6 & 7 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$;

№1.37. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -5 & 2 \end{vmatrix}$; **№1.38.** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$.

Обчислити мінори та алгебраїчні доповнення в наступних завданнях:

№1.39. $\begin{vmatrix} 4 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & -5 \\ 3 & 11 & 2 \end{vmatrix}$; **№1.40.** $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 14 & 3 & 0 \\ 6 & -2 & 1 \end{vmatrix}$;

№1.41. $\begin{vmatrix} 4 & 5 & 2 & 1 \\ -4 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 6 & -2 \end{vmatrix}$; **№1.42.** $\begin{vmatrix} 6 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

Обчислити визначник розкладаючи його за елементами рядка або стовпця в наступних завданнях:

№1.43. $\begin{vmatrix} -7 & 11 \\ 13 & -2 \end{vmatrix}$; **№1.44.** $\begin{vmatrix} 33 & 14 \\ 7 & 10 \end{vmatrix}$;

№1.45. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 15 \\ 1 & -3 & -6 \end{vmatrix}$; **№1.46.** $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 14 & 8 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}$;

№1.47. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ -4 & 0 & 5 & 0 \\ -2 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$; **№1.48.** $\begin{vmatrix} 4 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 6 & -2 \end{vmatrix}$.

Індивідуальне завдання

Обчислити визначники в наступних завданнях:

1) $\begin{vmatrix} n & n-1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} n & 2 & n+2 \\ 2 & n-1 & 7 \\ n+2 & -3 & -n \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} n & 5 & 2 & -2n \\ 1 & n-1 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 2n & 5 \\ 1 & -n & 6 & n+2 \end{vmatrix}$.

де n – остання цифра номера студента за списком.

Теми рефератів

1. Основні властивості визначників та їх застосування.
2. Правило Лапласа.

§1.3. Обернена матриця.

ПРАКТИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

П р и к л а д 1: Знайти матрицю, обернену до заданої: $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Обчислимо визначник матриці А і алгебраїчні доповнення всіх елементів:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -68.$$

$A_{11} = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -17$; $A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -5$; $A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 9$;

$A_{21} = -\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -17$; $A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7$; $A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 32 \end{vmatrix} = 1$;

$A_{31} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 17$; $A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -11$; $A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -21$.

Обернена матриця має вигляд:

$$A^{-1} = -\frac{1}{68} \cdot \begin{pmatrix} -17 & -17 & 17 \\ -5 & 7 & -11 \\ 9 & 1 & -21 \end{pmatrix}.$$

Матриця A^{-1} знайдена правильно, тому що $A \cdot A^{-1} = E$, тобто:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{68}\right) \cdot \begin{pmatrix} -17 & -17 & 17 \\ -5 & 7 & -11 \\ 9 & 1 & -21 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{68} \begin{pmatrix} 2 \cdot (-17) + 5 \cdot (-5) - 1 \cdot 9 & 2 \cdot (-17) + 5 \cdot 7 - 1 \cdot 1 & 2 \cdot 17 + 5 \cdot (-11) - 1 \cdot (-21) \\ 3 \cdot (-17) - 3 \cdot (-5) + 4 \cdot 9 & 3 \cdot (-17) - 3 \cdot 7 + 4 \cdot 1 & 3 \cdot 17 - 3 \cdot (-11) + 4 \cdot (-21) \\ 1 \cdot (-17) + 2 \cdot (-5) + 3 \cdot 9 & 1 \cdot (-17) + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 17 + 2 \cdot (-11) + 3 \cdot (-21) \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{68} \cdot \begin{pmatrix} -68 & 0 & 0 \\ 0 & -68 & 0 \\ 0 & 0 & -68 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

П р и к л а д 2 : Розв'язати матричне рівняння:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 7 \end{pmatrix};$$

$$X = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}^{-1};$$

Обчислимо обернену матрицю $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}^{-1}$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 10 = -13;$$

$A_{11} = -3$; $A_{12} = -5$ $A_{21} = -2$ $A_{22} = 1$

Тоді обернена матриця матиме вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-13} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$X = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{-13} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix};$$

$$X = -\frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} 5 \cdot (-3) + 9 \cdot (-5) & 5 \cdot (-2) + 9 \cdot 1 \\ 4 \cdot (-3) + 7 \cdot (-5) & 4 \cdot (-2) + 7 \cdot 1 \end{pmatrix};$$

$$X = -\frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} -60 & -1 \\ -47 & -1 \end{pmatrix}; \ X = \begin{pmatrix} \frac{60}{13} & \frac{1}{13} \\ \frac{47}{13} & \frac{1}{13} \end{pmatrix}.$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Для заданих матриць знайти обернені матриці:

№1.49. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$;

№1.50. $\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$;

№1.51. $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$;

№1.52. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$;

№1.53. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$;

№1.54. $\begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$;

№1.55. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; **№1.56.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$;

№1.57. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$; **№1.58.** $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \\ -2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Розв'язати матричне рівняння:

№1.59. $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -7 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; **№1.60.** $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 15 & -1 \end{pmatrix}$;

№1.61. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$; **№1.62.** $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 11 & 10 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}$;

№1.63. $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$; **№1.64.** $\begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$;

№1.65. $\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 11 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$; **№1.66.** $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

№1.67. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; **№1.68.** $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -4 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

З'ясувати, чи існують матриці, обернені до заданих:

№1.69. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; **№1.70.** $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

Якщо так, то виконати перевірку $A \cdot A^{-1} = E$.

Індивідуальне завдання

1. Знайти обернену матрицю до заданої: $A = \begin{pmatrix} 1 & n & 2 \\ -3 & n-1 & 5 \\ 4 & n+1 & -7 \end{pmatrix}$.

2. Розв'язати матричне рівняння: $\begin{pmatrix} 1 & n \\ n-7 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -n \end{pmatrix}$,

де n – остання цифра номера студента за списком.

Теми рефератів

1. Матриця та її ранг.
2. Застосування матричного числення при розв'язуванні прикладних задач.

§1.4. Системи лінійних рівнянь. Метод Крамера. Матричний метод.

ПРАКТИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

П р и к л а д : Розв'язати систему лінійних рівнянь за правилом Крамера та матричним методом: $\begin{cases} 2x+7y+z=-17, \\ 7x+3y+5z=8, \\ 3x+2y+6z=9. \end{cases}$

Розв'язання:

а) Розв'яжемо систему лінійних рівнянь за правилом Крамера. Для цього обчислимо головний визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 7 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 2\cdot 3\cdot 6 + 1\cdot 7\cdot 2 + 7\cdot 5\cdot 3 - 1\cdot 3\cdot 3 - 2\cdot 5\cdot 2 - 7\cdot 7\cdot 6 =$$

$$= 36+14+105-9-20-294=-168.$$

Так як $\Delta \neq 0$, то система має єдиний розв'язок.

Обчислимо додаткові визначники, замінюючи по черзі перший, другий та третій стовбець головного визначника стовбцем вільних елементів:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -17 & 7 & 1 \\ 8 & 3 & 5 \\ 9 & 2 & 6 \end{vmatrix} = (-17)\cdot 3\cdot 6 + 8\cdot 2\cdot 1 + 7\cdot 5\cdot 9 - 1\cdot 3\cdot 9 - 2\cdot 5\cdot(-17) - 8\cdot 7\cdot 6 =$$

$$= -306+16+315-27+170-336=-168;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & -17 & 1 \\ 7 & 8 & 5 \\ 3 & 9 & 6 \end{vmatrix} = 2\cdot 8\cdot 6 + 7\cdot 9\cdot 1 + 3\cdot(-17)\cdot 5 - 1\cdot 8\cdot 3 - 2\cdot 5\cdot 9 - 7\cdot 6\cdot(-17) =$$

$$= 96+63-255-24-90+714=504;$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 7 & -17 \\ 7 & 3 & 8 \\ 3 & 2 & 9 \end{vmatrix} = 2\cdot 3\cdot 9 + 7\cdot 8\cdot 3 + 7\cdot 2\cdot(-17) - (-17)\cdot 3\cdot 3 - 2\cdot 2\cdot 8 - 7\cdot 7\cdot 9 =$$

$$= 54+168-238+153-32-441=-336.$$

Визначимо корені системи рівнянь за формулами Крамера:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-168}{-168} = 1; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{504}{-168} = -3; \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-336}{-168} = 2.$$

Отже, {1; –3; 2} – шуканий розв'язок системи лінійних рівнянь.

б) Розв'яжемо систему лінійних рівнянь матричним методом, скориставшись

формулою: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} A^* \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$,

де Δ – головний визначник системи,

A^* – зведена матриця, $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ – стовбець вільних елементів.

З попередніх обчислень головний визначник системи дорівнює $\Delta = -168$.

Обчислимо математичні доповнення до кожного елемента матриці за формулою:

$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot 6 - 5 \cdot 2 = 18 - 10 = 8;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -(7 \cdot 6 - 5 \cdot 3) = -(42 - 15) = -27;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = 14 - 9 = 5;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -(7 \cdot 6 - 1 \cdot 2) = -(42 - 2) = -40;$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 1 \cdot 3 = 12 - 3 = 9;$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(2 \cdot 2 - 7 \cdot 3) = -(4 - 21) = 17;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 7 \cdot 5 - 1 \cdot 3 = 35 - 3 = 32;$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = -(2 \cdot 5 - 1 \cdot 7) = -(10 - 7) = -3;$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 7 \cdot 7 = 6 - 49 = -43.$$

Запишемо зведену матрицю: $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -40 & 32 \\ -27 & 9 & -3 \\ 5 & 17 & -43 \end{pmatrix}$.

Тоді стовбець невідомих елементів $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ дорівнює: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} A^* \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} =$

$$= \frac{1}{-168} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 40 & 32 \\ -27 & 9 & -3 \\ 5 & 17 & -43 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -17 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{-168} \cdot \begin{pmatrix} 8 \cdot (-17) - 40 \cdot 8 + 32 \cdot 9 \\ (-27) \cdot (-17) + 9 \cdot 8 + (-3) \cdot 9 \\ 5 \cdot (-17) + 17 \cdot 8 + (-43) \cdot 9 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{-168} \cdot \begin{pmatrix} -136 - 320 + 288 \\ 459 + 72 - 27 \\ -85 + 136 - 387 \end{pmatrix} = \frac{1}{-168} \cdot \begin{pmatrix} -168 \\ 504 \\ -336 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Отже, {1; –3; 2} – шуканий розв'язок системи лінійних рівнянь.

Відповідь: {1; –3; 2}.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Розв'язати систему лінійних рівнянь:
а) за правилом Крамера; б) матричним методом:

№1.71. $\begin{cases} 4x - 3y - 2z = 9, \\ 2x + 5y + 3z = -7, \\ 6x - 3y + 5z = 5; \end{cases}$

№1.72. $\begin{cases} x + 2y - 3z = 7, \\ 3x - y - 4z = 13, \\ 4x + y + 2z = 0; \end{cases}$

№1.73. $\begin{cases} 2x + y - z = 0, \\ x - y - 3z = 13, \\ 3x - 2y + 4z = -15; \end{cases}$

№1.74. $\begin{cases} x + y - 2z = 4, \\ 2x - 3y + z = 3, \\ 3x - 2y + 6z = 0; \end{cases}$

№1.75. $\begin{cases} 5x - 3y + 6z = 6, \\ 2x - y - 3z = 8, \\ x + 4y - 2z = 9; \end{cases}$

№1.76. $\begin{cases} x - y + z = 3, \\ 2x + y + z = 11, \\ x + y + 2z = 8; \end{cases}$

№1.77. $\begin{cases} 2x - 3y - 4z = -5, \\ x + 5y - 5z = -6, \\ 8x - 2y + 4z = -10; \end{cases}$

№1.78. $\begin{cases} 2x + 2y + z = 1, \\ 3x + y + 2z = -2, \\ 4x - y - 7z = 7; \end{cases}$

№1.79. $\begin{cases} x - 8y + 3z = 1, \\ 2x - 6y + z = 4, \\ 0{,}1x - 2y + z = 0; \end{cases}$

№1.80. $\begin{cases} x - 5y + z = 4, \\ 2x - y + 3z = 14, \\ 3x + 5y + z = 8; \end{cases}$

№1.81. $\begin{cases} 3x - y - 4z = -2, \\ 6x + 2y + z = 9, \\ 2x + 4y - 3z = 3; \end{cases}$

№1.82. $\begin{cases} 3x + 2y + z = 5, \\ x + y - z = -2, \\ 4x - y + 5z = 3; \end{cases}$

Індивідуальне завдання

Розв'язати систему лінійних рівнянь за правилом Крамера та матричним методом.

1. $\begin{cases} 2x-3y+z=-6, \\ 3x+3y-2z=20, \\ 5x-6y+4z=-12. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x+3y+z=0, \\ 2x+y+3z=4, \\ 3x+2y+z=2. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x+5y+9z=-20, \\ 9x-7y+3z=1, \\ 6x+4y+7z=-2; \end{cases}$

4. $\begin{cases} 4x-2y+3z=-9, \\ 3x+5y-4z=25, \\ 7x+2y+3z=2; \end{cases}$

5. $\begin{cases} x+y+z=-2, \\ 2x+3y-z=1, \\ x-y+2z=-7. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x+4y+2z=-5, \\ 2x-4y+3z=20, \\ 4x-3y-5z=3; \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3x+2y+4z=-3, \\ 2x-3y+z=-4, \\ 4x-5y-2z=10; \end{cases}$

8. $\begin{cases} x+2y+3z=-2, \\ 3x+4y-2z=-17, \\ 2x+3y+z=-9; \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x+5y-2z=9, \\ 4x+y-4z=9, \\ x+y-4z=9; \end{cases}$

10. $\begin{cases} x-y+z=3, \\ 2x+y+z=1, \\ x+y+2z=8. \end{cases}$

/Завдання обирається за останньою цифрою номера студента в списку.
Наприклад, студенти за номерами 3, 13 та 23 розв'язують систему №3./

Теми рефератів

1. Розв'язування систем лінійних рівнянь методом Гауса.
2. Прямокутні системи.

РОЗДІЛ 2. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

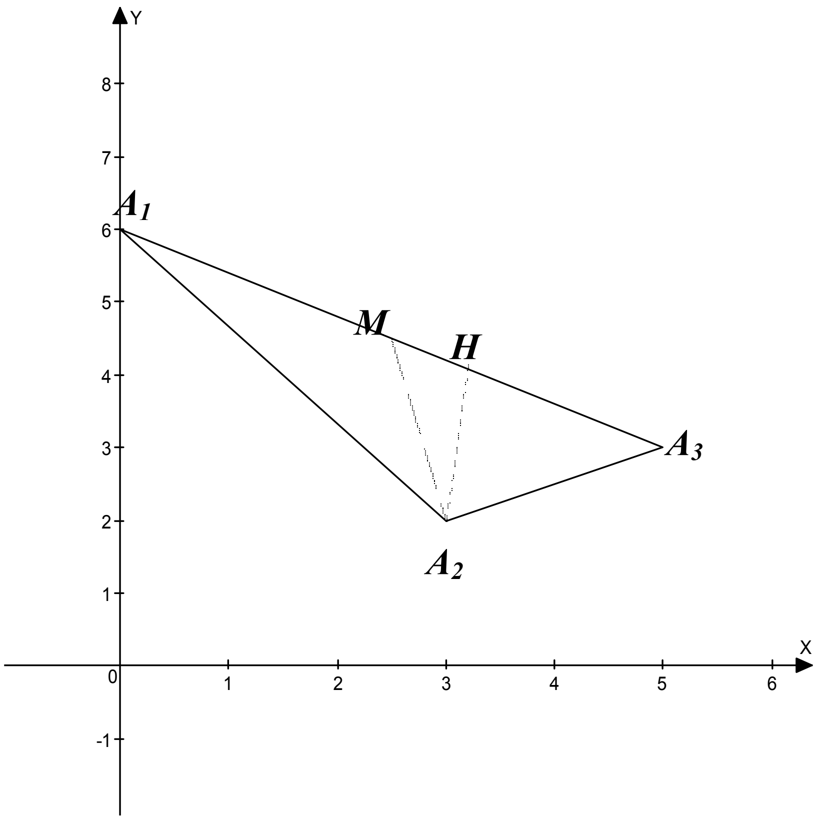
§2.1. Прямокутні координати на площині.

ПРАКТИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

П р и к л а д : Дано координати вершин трикутника $\Delta A_1A_2A_3$: $A_1\ (0;\ 6);\ A_2\ (3;\ 2);\ \ A_3\ (5;\ 3)$ і точку $A_4\ (2;\ 1)$. Побудувати рисунок в системі координат.
Знайти: а) рівняння прямої A_1A_2; б) рівняння висоти та медіани $\Delta A_1A_2A_3$, опущених з вершини A_2; в) тангенс кута A_2; г) площу трикутника $\Delta A_1A_2A_3$; д) відстань від точки A_4 до прямої A_1A_2.

Розв'язання:

Побудуємо рисунок в системі координат:



а) Запишемо <u>рівняння прямої A_1A_2</u>:

Рівняння прямої, що проходить через дві точки, має вигляд: $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$.

Координати точок $A_1\ (0;\ 6)\ і\ A_2\ (3;\ 2)$ відомі, тому рівняння набуватиме вигляду: $\dfrac{x-0}{3-0}=\dfrac{y-6}{2-6}$, або після спрощення: $4x+3y+18=0$.

б) Запишемо <u>рівняння висоти та медіани</u> $\Delta A_1A_2A_3$, опущених з вершини A_2:
Для запису рівняння висоти A_2H, що перпендикулярна стороні A_1A_3, запишемо рівняння сторони A_1A_3, користуючись попередньою формулою: $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$.

Координати точок A_1 *(0; 6)* і A_3 *(5; 3)* відомі, тому рівняння набуватиме вигляду: $\frac{x-0}{5-0}=\frac{y-6}{3-6}$, або після спрощення: $3x+5y-30=0$.

Кутовий коефіцієнт цієї прямої дорівнює: $k_{A_1A_3}=-\frac{A}{B}=-\frac{3}{5}$. Кутовий коефіцієнт перпендикулярної прямої: $k_{A_1A_3}=-\frac{1}{k_{A_1A_3}}=-\left(-\frac{5}{3}\right)=\frac{5}{3}$.

Рівняння прямої, що проходить через точку A_2 *(3; 2)* з кутовим коефіцієнтом $k_{A_2H}=\frac{5}{3}$ має вигляд: $y-y_2=k(x-x_2)$, або $y-2=\frac{5}{3}\cdot(x-3)$. Після перетворення рівняння висоти набуває вигляду: $5x-3y-9=0$.

Для запису рівняння медіани A_2M знайдемо координати точки *M*, як середини сторони A_1A_3: $x_м=\frac{x_{A_1}+x_{A_3}}{2}=\frac{0+5}{2}=2{,}5$, $y_м=\frac{y_{A_1}+y_{A_3}}{2}=\frac{6+3}{2}=4{,}5$.

Запишемо рівняння медіани, як рівняння прямої, що проходить через дві точки: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$. Так як координати точок A_2 і *M* відомо, то: $\frac{x-3}{2{,}5-3}=\frac{y-2}{4{,}5-2}$. Після спрощення рівняння медіани: $5x+y-17=0$.

в) Знайдемо <u>тангенс кута A_2</u>, обчисливши кутові коефіцієнти прямих A_1A_2 і A_2A_3. Рівняння прямої A_1A_2, з попередніх обчислень: $4x+3y+18=0$, тоді $k_{A_1A_2}=-\frac{A}{B}=-\frac{4}{3}$. Кутовий коефіцієнт прямої A_2A_3 обчислимо за формулою: $k_{A_2A_3}=\frac{y_2-y_3}{x_2-x_3}=\frac{2-3}{3-5}=\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}$.

Кут між прямими знаходимо за годинниковою стрілкою, користуючись формулою: $tg\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}=\frac{\frac{1}{2}-\left(-\frac{4}{3}\right)}{1+\left(-\frac{4}{3}\right)\cdot\frac{1}{2}}=\frac{11}{6}:\frac{1}{3}=\frac{11}{2}=5{,}5$. Тоді, користуючись чотиризначними таблицями маємо: $\varphi=78^\circ 42'$.

г) Визначимо <u>площу трикутника $A_1A_2A_3$:</u>

$$S=\pm\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\\ x_3 & y_3\\ x_1 & y_1\end{vmatrix}=\pm\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 6\\ 3 & 2\\ 5 & 3\\ 0 & 6\end{vmatrix}=\pm\frac{1}{2}(0\cdot 2+3\cdot 3+5\cdot 6-3\cdot 6-5\cdot 2-0\cdot 6)=\frac{11}{2}=5{,}5\,кв.од.$$

д) <u>Відстань від точки A_4 *(2; 1)* до прямої A_1A_2, $4x+3y+18=0$</u>:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|4 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 18|}{\sqrt{16+9}} = \frac{29}{5} = 5{,}8\text{од}.$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

2.1 Які з точок *M (3; 5)*, *N (2; 7)*, *P (–1; –3)*, *Q (–2; 0)*, *R (3; –5)* лежать на прямій $y = 2x - 1$.

2.2. Загальне рівняння прямої $3x - 4y + 12 = 0$ представити у вигляді:

а) з кутовим коефіцієнтом; б) у відрізках на осях; в) побудувати пряму.

2.3. Знайти рівняння сторін трикутника, вершини якого є точки *A (1; –1), B (3; 5;), C (–7; 11).*

2.4. Знайти кути трикутника, сторони якого задано рівняннями: $5x - 2y - 11 = 0$; $x + 2y + 5 = 0$; $x - 2y + 1 = 0$.

2.5. Знайти площу трикутника, сторони якого задано рівняннями: $5x - 2y - 11 = 0$; $x + 2y + 5 = 0$; $x - 2y + 1 = 0$.

2.6. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку M_0 *(2; 5)* паралельно прямій $3x - 4y + 15 = 0$.

2.7. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку P_0 *(5; –1)* паралельно прямій $3x - 7y + 14 = 0$.

2.8. Задана пряма $2x + 3y + 4 = 0$. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку *M (2; 1)*:

1) паралельно заданій прямій;

2) перпендикулярно до заданої прямої.

2.9. Знайти відстань між двома паралельними прямими: $3x + 4y - 12 = 0$, $3x + 4y + 13 = 0$.

2.10. Знайти точку *M*, яка симетрична точці *P(–6; 13)* відносно прямої $2x - 3y - 3 = 0$.

2.11. Знайти точку *K*, яка симетрична точці *P(8; –9)* відносно прямої, що проходить через точки *A (3; –4), B (–1; –2)*.

2.12. Задано три вершини паралелограма *A (–3; 1), B (3; 3), C (4; –1)*. Знайти координати четвертої вершини.

2.13. Задано вершини трикутника *A (12; –4), B (0; 5), C (–12; –11).* Знайти:

а) довжини сторін;

б) рівняння сторін;

в) рівняння висоти, що проведена з вершини B;

г) довжину цієї висоти;

д) рівняння медіани, що проведена з вершини A;

е) точку перетину висоти, що проведена з вершини B, та медіани, що проведена з точки A;

ж) кут C;

з) площу трикутника.

Індивідуальне завдання

Дано координати вершин трикутника $\Delta A_1A_2A_3$ і точку A_4. Знайти:
а) рівняння прямої A_1A_2;
б) рівняння висоти та медіани $\Delta A_1A_2A_3$, опущених з вершини A_2;
в) тангенс кута A_2;
г) площу трикутника $\Delta A_1A_2A_3$;
д) відстань від точки A_4 до прямої A_1A_2;
е) побудувати рисунок в системі координат.

1. $A_1\ (1;\ 2);\ A_2\ (-3;\ 2);\ A_3\ (-5; -3);\ A_4\ (2;\ -1).$
2. $A_1\ (2;\ 1);\ A_2\ (-1;\ 2);\ A_3\ (-2;\ -3);\ A_4\ (1;\ -6).$
3. $A_1\ (2;\ 2);\ A_2\ (-2;\ 2);\ A_3\ (-3;\ -3);\ A_4\ (2;\ -4).$
4. $A_1\ (1;\ 1);\ A_2\ (-4;\ 2);\ A_3\ (-4; -3);\ A_4\ (2;\ -7).$
5. $A_1\ (1;\ 6);\ A_2\ (-3; -2);\ A_3\ (-5;\ 3);\ A_4\ (2;\ -1).$
6. $A_1\ (2;\ 6);\ A_2\ (-3;\ -1);\ A_3\ (-5;\ 2);\ A_4\ (1;\ -6).$
7. $A_1\ (3;\ 6);\ A_2\ (-2;\ -2);\ A_3\ (-5;\ 1);\ A_4\ (2;\ -3).$
8. $A_1\ (4;\ 6);\ A_2\ (-4;\ -2);\ A_3\ (-5;\ 4);\ A_4\ (2;\ -4).$
9. $A_1\ (6;\ 6);\ A_2\ (-3;\ -5);\ A_3\ (-2;\ 3);\ A_4\ (2;\ -7).$
10. $A_1\ (7;\ 6);\ A_2\ (-5;\ -2);\ A_3\ (-4;\ 3);\ A_4\ (2;\ -8).$

/Завдання обирається за останньою цифрою номера студента в списку./

Теми рефератів

1. Різні види рівнянь прямої.
2. Відхилення та відстань від точки до прямої.

§2.2. Пряма і площина в просторі.

ПРАКТИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

П р и к л а д : Дано координати $A_1\ (2;\ 3;\ -4);\ A_2\ (5;\ 7;\ 9);\ A_3\ (2; -2;\ 4);\ A_4\ (13;\ 1;\ 2)$ вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$. Знайти: а) довжину ребра A_1A_2; б) рівняння ребер A_1A_2 і A_1A_4; в) косинус кута $A_4A_1A_2$; г) площу грані $A_1A_2A_3$; д) рівняння площини $A_1A_2A_3$; е) об’єм піраміди.

Розв’язання:

а) Довжину ребра A_1A_2 обчислимо за формулою:

$A_1A_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$, тобто

$$A_1A_2 = \sqrt{(5-2)^2 + (3-7)^2 + (-4-9)^2} = \sqrt{9+16+169} = \sqrt{194} \approx 14\text{од}.$$

б) Рівняння ребер A_1A_2 і A_1A_4 запишемо, користуючись формулою:

$\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} = \dfrac{y-y_1}{y_2-y_1} = \dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$. За умовою $A_1\ (2;\ 3;\ -4);\ A_2\ (5;\ 7;\ 9);\ A_4\ (13;\ 1;\ 2)$, тоді

Для прямої A_1A_2: $\dfrac{x-2}{5-2} = \dfrac{y-3}{7-3} = \dfrac{z-(-4)}{9-(-4)} \Rightarrow \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z+4}{13}$.

Для прямої A_1A_4: $\frac{x-2}{13-2}=\frac{y-3}{1-3}=\frac{z-(-4)}{2-(-4)} \Rightarrow \frac{x-2}{11}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z+4}{6}$.

в) Косинус кута $A_4A_1A_2$: $\cos A=\frac{a_x в_x+a_y в_y+a_z в_z}{\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2+a_z{}^2}\sqrt{в_x{}^2+в_y{}^2+в_z{}^2}}$. Враховуючи, що рівняння прямої можна подати у вигляді:

$\frac{x-x_1}{a_x}=\frac{y-y_1}{a_y}=\frac{z-z_1}{a_z}$, то для прямої A_1A_2 $\vec{a}$ *(3; 4; 13)*, а для A_1A_4 $\vec{в}$ *(11; –2; 6)*.

Тоді $\cos A=\frac{3\cdot 11+4\cdot(-2)+13\cdot 6}{\sqrt{3^2+4^2+13^2}\sqrt{11^2+(-2)^2+6^2}}=\frac{103}{\sqrt{194}\cdot\sqrt{161}}\approx 0{,}5829$.

Отже, $\angle A=\arccos 0{,}5829=53^{\circ}30'$.

г) Площу грані $A_1A_2A_3$ обчислимо, користуючись властивістю добутку векторів A_1A_2 і A_1A_3: $S_\Delta=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3}\right|$, де $\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3}=\begin{vmatrix} y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}\cdot\vec{i}+$

$+\begin{vmatrix} x_2-x_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}\cdot\vec{j}+\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1\end{vmatrix}\cdot\vec{k}=\begin{vmatrix} 4 & 13 \\ -5 & 8\end{vmatrix}\cdot\vec{i}+\begin{vmatrix} 3 & 13 \\ 0 & 8\end{vmatrix}\cdot\vec{j}+\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 5\end{vmatrix}\cdot\vec{k}=$

$=(32+65)\vec{i}+(24-0)\vec{j}+(-15-0)\vec{k}=97\vec{i}+(-24)\vec{j}+(-15)\vec{k}$.

Тоді: $\left|\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3}\right|=\sqrt{97^2+(-24)^2+(-15)^2}=\sqrt{10210}$.

Отже, $S_\Delta=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3}\right|=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{10210}\approx 50$*кв.од.*

д) Рівняння площини $A_1A_2A_3$ у загальному вигляді:

$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}=0$, тобто $\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z+4 \\ 5-2 & 7-3 & 9+4 \\ 2-2 & -2-3 & 4+4\end{vmatrix}=0$;

$32(x-2)-15(z+4)-24(y-3)+65(x-2)=0 \Rightarrow 97x-24y-15z-182=0$.

е) Об’єм піраміди:

$$V=\pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1\end{vmatrix}=\pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 3 & 4 & 13 \\ 0 & -5 & 8 \\ 11 & -2 & 6\end{vmatrix}=\pm\frac{1}{6}(-90+352+715+48)=$$

$=170\frac{5}{6}$*куб.од.*

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

2.14. На якій відстані від початку координат знаходяться точки *А (–3; 0; 4), В (0; 8; –6), С (1; –1; 4)*.

2.15. Задано дві вершини *А (2; –3; –5), В (–1; 3; 2)* паралелограма *АВСД* і точку перетину його діагоналей *М (4; –1; 7)*. Визначити координати двох інших вершин цього паралелограма.

2.16. Задано вершини трикутника *A (3; 2; –1), B (5; –4; 7)* і *C (–1; 1; 2)*. Обчислити довжину його медіани, що проведена із вершини *C*.

2.17. Обчислити відстань від точки *P (–1; 1; –2)* до площини, що проходить через три задані точки *A (1; –1; 1), B (–2; 1; 3)* і *C (4; –5; –2)*.

2.18. Скласти рівняння площини, що проходить через точку перетину трьох площин $2x - y - z - 1 = 0$, $x + 2z - 4 = 0$, $x - y = 0$, через початок координат і через точку *P (7; 1; 2)*.

2.19. Знайти точку перетину площин $2x - y + 3z - 9 = 0$, $3x + y - 4z + 6 = 0$, $x + 2y + 2z - 3 = 0$.

2.20. Дано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3\,A_4$:
A_1 *(1; 1; 1)*; A_2 *(–1; –2; –2)*; A_3 *(0;– 3; 3)*; A_4 *(4; 3; –1)*. Знайти:
а) довжину ребра A_1A_2;
б) рівняння ребер A_1A_2 і A_1A_3;
в) косинус кута $A_3A_1A_2$;
г) площу грані $A_1A_2A_3$;
д) рівняння площини $A_1A_2A_3$;
е) об'єм піраміди.

Індивідуальне завдання

Дано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3\,A_4$. Знайти:
а) довжину ребра A_1A_2;
б) рівняння ребер A_1A_2 і A_1A_3;
в) косинус кута $A_3A_1A_2$;
г) площу грані $A_1A_2A_3$;
д) рівняння площини $A_1A_2A_3$;
е) об'єм піраміди.

1. A_1 *(1; 2; 1)*; A_2 *(–3; 2; –2)*; A_3 *(–5;– 3; 3)*; A_4 *(0; 2; –1)*.
2. A_1 *(3; 2; 1)*; A_2 *(–3; –1; 2)*; A_3 *(–5; –2; –3)*; A_4 *(0; 1; –6)*.
3. A_1 *(2; 1; 2)*; A_2 *(–3; –2; 2)*; A_3 *(–3; –5; –3)*; A_4 *(0; 2; –4)*.
4. A_1 *(1; 1; 3)*; A_2 *(–4; –3; 2)*; A_3 *(–4;– 3; –5)*; A_4 *(0; 2; –7)*.
5. A_1 *(1; 2; 6)*; A_2 *(–3; –3; – 2)*; A_3 *(–5; –5; 3)*; A_4 *(0; 2; –1)*.
6. A_1 *(2; 4; 6)*; A_2 *(–3; –3; –1)*; A_3 *(–5; –5; 2)*; A_4 *(0; 1; –6)*.
7. A_1 *(4; 3; 6)*; A_2 *(–2; –3; –2)*; A_3 *(–5; –5; 1)*; A_4 *(0; 2; –3)*.
8. A_1 *(5; 4; 6)*; A_2 *(–4; –3; –2)*; A_3 *(–5; –5; 4)*; A_4 *(0; 2; –4)*.
9. A_1 *(1; 6; 6)*; A_2 *(–3; –3; –5)*; A_3 *(–2; –5; 3)*; A_4 *(0; 2; –7)*.
10. A_1 *(1; 7; 6)*; A_2 *(–5; –3; –2)*; A_3 *(–4; –5; 3)*; A_4 *(0; 2; –8)*.

/Завдання обирається за останньою цифрою номера студента в списку./

Теми рефератів

1. Площина в просторі.
2. Нерівності і їх геометричний зміст.

§2.3. Криві лінії другого порядку.

ПРАКТИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

П р и к л а д 1 : Визначити центр і радіус кола, яке задано рівнянням: $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$.

Розв'язання:

Так як в заданому рівнянні коефіцієнт при x^2 та y^2 рівні між собою і відсутній член з добутком координат, то задане рівн6яння є рівнянням кола. Зведемо його до вигляду: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$, виділивши повний квадрат: $(x-1)^2 - 1 + (y+2)^2 - 4 - 20 = 0$, звідси $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$.

Можна зробити висновок, що задане рівняння визначає коло, цент якого має координати *C (1; –2)* і радіусом *5 од*.

П р и к л а д 2 : Знайти довжину осей, координати фокусів і ексцентриситет еліпса $4x^2 + 9y^2 = 144$.

Розв'язання:

Приведемо це рівняння до канонічного виду: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{в^2} = 1$.

Розділивши обидві частини заданого рівняння на 144, одержимо: $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$.

Звідки одержуємо, що $a = 6$, $в = 4$. Тоді $c = \sqrt{a^2 - в^2} = \sqrt{36-16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

Координати фокусів будуть $F_1\ (2\sqrt{5}\ ;\ 0)$ і $F_2\ (-2\sqrt{5}\ ;\ 0)$.

Ексцентриситет еліпса $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{5}}{6} = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

П р и к л а д 3 : Скласти рівняння параболи, симетричної відносно осі *Ох*, що проходить через точку *М (1; –4)* і початок координат.

Розв'язання:

Канонічне рівняння параболи, симетрична відносно осі *Ох*, вершина якої знаходиться в початку координат є $y^2 = 2px$. Так як парабола проходить через точку *М (1; –4)*, то координати точки М повинні задовольняти рівняння $y^2 = 2px$, тобто $(-4)^2 = 2p \cdot 1 \Rightarrow p = 8$. Звідси $y^2 = 16x$.

П р и к л а д 4 : Скласти рівняння гіперболи, в якої ексцентриситет $\varepsilon = \frac{5}{4}$, а уявна вісь $в = 3$. Знайти асимптоти та директриси гіперболи.

Розв'язання:

Оскільки ексцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$, то $c = a\varepsilon = \frac{5}{4}a$, і тому з рівності $c^2 = a^2 + в^2$ отримаємо $\left(\frac{5}{4}a\right)^2 = a^2 + 3^2 \Rightarrow a = 4$.

Отже, шукане рівняння гіперболи є таким: $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

Асимптотами цієї гіперболи є прямі $y=\frac{3}{4}x$, а директрисами – $x=\pm\frac{4}{\frac{5}{4}}=\pm\frac{16}{5}$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

2.21. Скласти рівняння кола з центром в точці *C (2; –3)* і радіусом *6 од*.

2.22. Скласти рівняння кола, що проходить через точку М (2; 6) і його центр співпадає з точкою *С (–1; 2)*.

2.23. Скласти рівняння кола, що проходить через точки *А (–1; 1)* і *В (1; –3)*, якщо центр лежить на прямій $2x-y+1=0$.

2.24. Скласти рівняння кола, що проходить через три точки *А (–1; 5)*, *В (–2; 2)* і *С (5; 5)*.

2.25. Скласти рівняння кола, якщо точки *А (3; 2)* і *В (–1;6)* є кінцями одного з діаметрів.

2.26. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого розміщені на осі абсцис симетрично початку координат. Знаючи, що:

1) його велика вісь дорівнює 10 одиниць, а відстань між фокусами $2c=8$;
2) його мала вісь дорівнює 24 одиниць, а відстань між фокусами $2c=10$;
3) відстань між фокусами $2c=6$ і ексцентриситет $\varepsilon=\frac{3}{5}$;
4) його велика вісь дорівнює 20 одиниць, а ексцентриситет $\varepsilon=\frac{3}{5}$;
5) його мала вісь дорівнює 10 одиниць, а ексцентриситет $\varepsilon=\frac{12}{13}$.

2.27. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якого розміщені на осі абсцис симетрично початку координат. Знаючи, що:

1) відстань між фокусами $2c=10$ і вісь $2в=8$;
2) відстань між фокусами $2c=6$ і ексцентриситет $\varepsilon=\frac{3}{2}$;
3) вісь $2a=16$ і ексцентриситет $\varepsilon=\frac{5}{4}$;
4) рівняння асимптот $y=\pm\frac{4}{3}x$ і відстань між фокусами $2c=20$;
5) точки *А (6; –1)* і В *(–8;* $2\sqrt{2}$ *)* знаходяться на гіперболі.

2.28. Скласти рівняння параболи, вершина якої знаходиться в початку координат. Знаючи, що:

1) парабола розміщена симетрично осі *Ох* і проходить через точку *М (9; 6)*;
2) парабола розміщена симетрично осі *Ох* і проходить через точку *Р (–1; 3)*;
3) парабола розміщена симетрично осі *Оу* і проходить через точку *А (1; 1)*;

3) парабола розміщена симетрично осі *Oy* і проходить через точку *K (4; –8)*.

2.29. Визначити, яка крива задається рівнянням та визначити її основні параметри: $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$.

2.30. Визначити, яка крива задається рівнянням та визначити її основні параметри: $x^2 + 4y^2 + 10x + 8y + 28 = 0$.

Індивідуальне завдання

1. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого розміщені на осі абсцис симетрично початку координат, знаючи, що відстань між фокусами $2c = 2n$ і ексцентриситет $\varepsilon = \frac{n}{20}$.

2. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якого розміщені на осі абсцис симетрично початку координат, знаючи, що відстань між фокусами $2c = 2n$ і ексцентриситет $\varepsilon = \frac{3n}{2}$.

3. Скласти рівняння параболи, симетричної відносно осі *Ox*, що проходить через точку *M (n; –2n)* і початок координат.

У вказаних завданнях *n* – остання цифра номера студента за списком.

Теми рефератів

1. Поверхні другого порядку: сфера, еліпсоїд, гіперболоїди, параболоїди.

2. Поверхні другого порядку: циліндричні та конічні поверхні, поверхні обертання.

РОЗДІЛ 3. ОСНОВИ ТЕОРІЇ ГРАНИЦЬ

§3.1. Функція. Основні елементарні функції.

ПРАКТИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

П р и к л а д 1 : Знайти значення функції $y = x^2 - 2x + 1$ в точці $x = 2$.

Розв'язання:

Так, як $x = 2$, то підставимо у функцію це значення:
$y(2) = 2^2 - 2 \cdot 2 + 1 = 4 - 4 + 1 = 1$.

П р и к л а д 2 : Знайти область визначення функції $y = \sqrt{6x - x^2 - 5}$.

Розв'язання:

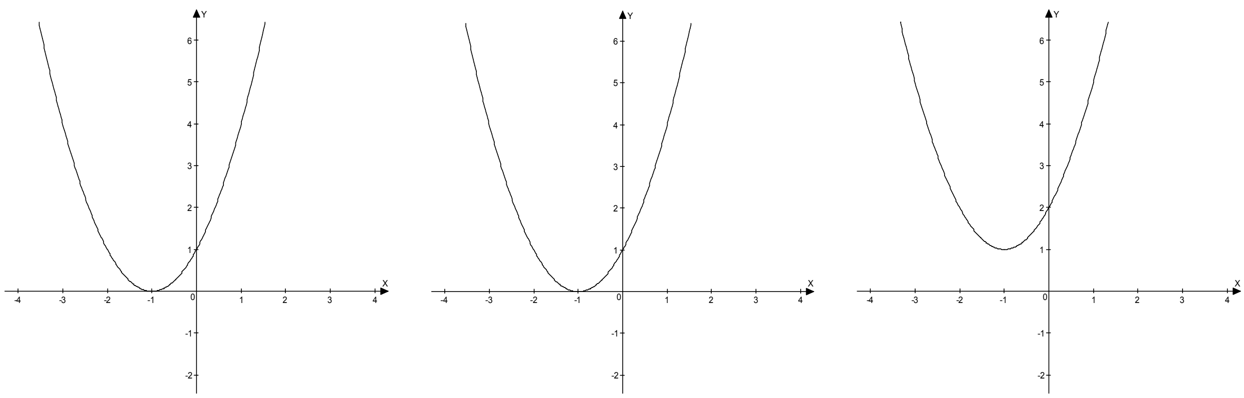
Так як аргумент знаходиться під знаком кореня, то функція буде мати дійсні значення тільки при таких значеннях *x*, при яких підкореневий вираз невід'ємний, тобто: $-x^2 + 6x - 5 \geq 0$, або $x^2 - 6x + 5 \leq 0$.

Одержуємо $(x-1)(x-5) \leq 0$. Методом інтервалів знаходимо, що $x \in [1;5]$.

П р и к л а д 3 : Користуючись графіком функції $y = x^2$, побудувати графік функції $y = x^2 + 2x + 2$.

Розв'язання:

Задану функцію представимо у вигляді $y = (x+1)^2 + 1$. Виходячи з графіка функції $y = x^2$ (рис. а), спочатку побудуємо графік функції $y = (x+1)^2$ перенесенням графіка $y = x^2$ відносно осі Ох вліво на 1 одиницю (рис. б). А потім $y = (x+1)^2$ перенесемо вгору на 1 одиницю (рис. в).



а) б) в)

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Знайти значення функції у вказаних точках:

3.1. $y = \dfrac{1}{x^2 - x}$ у точках –1; 0,5; 2;

3.2. $y = \sqrt{5 - 2x}$ у точках 0; 1; 2,5;

3.3. $y = arcsin\dfrac{x}{4}$ у точках –2; 4; 2;

3.4. $y = sin\dfrac{x}{2}$ у точках $\dfrac{\pi}{3}$; $\dfrac{\pi}{2}$; π.

3.5. $y = \dfrac{1}{x} + \lg x$ у точках 0,1; 1; 10.

Знайти область визначення функції

3.6. $y = \dfrac{1}{x^2 - x}$;

3.7. $y = \sqrt{5 - 2x}$;

3.8. $y = \dfrac{2x}{x^2 - 3x + 2}$;

3.9. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 4x}}$;

3.10. $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$;

3.11 $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}$;

3.12. $y = arcsin\dfrac{x}{4}$;

3.13. $y = \dfrac{1}{\lg x} + \sqrt{2 + x}$;

3.14. $y = \sqrt{3 - x} + arcsin\dfrac{3 - 2x}{5}$;

3.15. $y = \sqrt{x - 1} + \sqrt{1 - x} + \sqrt{x^2 + 1}$;

3.16. $y = \dfrac{1}{4 - x^2} + \lg\left(x^3 - x\right)$;

3.17. $y = \sqrt{sinx} + \sqrt{16 - x^2}$.

Користуючись графіком функції $y = x^2$, побудувати графіки функцій:

3.18. $y = 2x^2 + 2x + 2$;

3.19. $y = 2x^2 - 2x + 4$;

3.20. $y = -x^2 + 2x + 8$;

3.21. $y = -x^2 + 4x + 10$;

3.22. $y = x^2 + x + 1$;

3.23. $y = x^2 - 6x + 8$.

Користуючись графіком функції $y = sinx$, побудувати графіки функцій:

3.24. $y = sin\dfrac{x}{2}$;

3.25. $y = 2sin\dfrac{x}{2}$;

3.26. $y = 1 + 2sin\dfrac{x}{2}$;

3.27. $y = \dfrac{1}{2}sinx$;

3.28. $y = -\dfrac{1}{2}sinx$;

3.29. $y = 2 - \dfrac{1}{2}sinx$.

Побудувати графіки функцій:

3.30. $y = \begin{cases} 1 - x, & x \in (-\infty; 0] \\ 1, & x \in (0; \infty) \end{cases}$;

3.31. $y = \begin{cases} x^2, & x \in (-\infty; 2] \\ 4, & x \in (2; \infty) \end{cases}$;

3.32. $y=\begin{cases}x^2+1, & x\in(-\infty;0]\\ x^2-1, & x\in(0;\infty)\end{cases}.$

Індивідуальне завдання

Знайти область визначення функції:

а) $y=\dfrac{5}{x^2-(n-1)\cdot x-n}$; б) $y=\sqrt{x}+\sqrt{n^2-x^2}$;

в) $y=\dfrac{x}{\sqrt{n-x}}+\dfrac{1}{\sqrt{n+x}}$; г) $y=\dfrac{1}{n-x}+\lg\left(x^2-x\right)$.

Побудувати графіки функцій:

а) $y=x^2+nx+n+1$; б) $y=2cos(x-1)$.

де n – остання цифра номера студента за списком.

Теми рефератів

1. Поняття та властивості функції. Елементарні та неелементарні функції.
2. Основні елементарні функції, що використовуються в агрономічних дослідженнях.

§3.2. Границя функції. Застосування правил розкриття невизначеностей, утворених алгебраїчними виразами.

ПРАКТИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

П р и к л а д : Обчислити наступні границі:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5x+6}{7x^2+9x+4}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2+5x-8}{3x^2-5x+2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}}{x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{16x^2+10x+5}-4x)$.

Розв'язання:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5x+6}{7x^2+9x+4}=\left[\dfrac{3\cdot\infty^2+5\cdot\infty+6}{7\cdot\infty^2+9\cdot\infty+4}\right]=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right].$

Для розкриття невизначеності $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ необхідно чисельник і знаменник поділити на x^n, де $n-$ найбільше значення степеня. Найбільше значення степеня n=2, тому ділимо чисельник і знаменник на x^2:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^2}{x^2}+\frac{5x}{x^2}+\frac{6}{x^2}}{\frac{7x^2}{x^2}+\frac{9x}{x^2}+\frac{4}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}{7+\frac{9}{x}+\frac{4}{x^2}}=\left[\frac{3+\frac{5}{\infty}+\frac{6}{\infty^2}}{7+\frac{9}{\infty}+\frac{4}{\infty}}\right]=\frac{3+0+0}{7+0+0}=\frac{3}{7}.$$

Зауваження: $\dfrac{a}{0}=\infty$; $\dfrac{a}{\infty}=0$.

б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2+5x-8}{3x^2-5x+2}=\dfrac{3\cdot 1^2+5\cdot 1-8}{3\cdot 1^2-5\cdot 1+2}=\left[\dfrac{0}{0}\right].$

Для розкриття невизначеності $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ від раціональних дробів необхідно розкласти чисельник і знаменник на множники і однакові скоротити.

Розкладаємо квадратичні вирази на множники за теоремою Вієта і отримаємо:

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(3x+8)}{(x-1)(3x-2)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x+8}{3x-2}=\dfrac{3\cdot 1+8}{3\cdot 1-2}=\dfrac{11}{1}=11$, (скоротили на $x-1$).

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}}{x}=\dfrac{\sqrt{4-0}-\sqrt{4+0}}{0}=\left[\dfrac{0}{0}\right].$

Для розкриття невизначеності $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ від ірраціональних дробів необхідно позбавитись від ірраціональності помноживши чисельник і знаменник на спряжений вираз. Спряженими називають такі ірраціональні вирази, які при множенні один на інший утворюють раціональні вирази:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}}{x}\cdot\frac{\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x}}{\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4-x-4-x}{x\cdot(\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x})}=\lim_{x\to 0}\frac{-2x}{x\cdot(\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x})}=\lim_{x\to 0}\frac{-2}{\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x}}=$$

$$=\frac{-2}{\sqrt{4}+\sqrt{4}}=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}.$$

г) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{16x^2+10x+5}-4x)=\left[\sqrt{\infty}-\infty\right]=[\infty-\infty].$

Для розкриття невизначеності $[\infty-\infty]$ необхідно вираз представити у вигляді дробу $\dfrac{a}{1}$; в утвореному дробі помножити чисельник і знаменник на спряжений вираз. В подальшому позбавитися утвореної невизначеності $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{16x^2+10x+5}-4x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{16x^2+10x+5}-4x}{1}\cdot\frac{\sqrt{16x^2+10x+5}+4x}{\sqrt{16x^2+10x+5}+4x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{16x^2+10x+5-16x^2}{\sqrt{16x^2+10x+5}+4x}=\lim_{x\to\infty}\frac{10x+5}{\sqrt{16x^2+10x+5}+4x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

Поділимо кожен елемент чисельника і знаменника на x, під коренем на x^2:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{10x+5}{\sqrt{16x^2+10x+5}+4x}=\lim_{x\to\infty}\frac{10+\frac{5}{x}}{\frac{\sqrt{16x^2+10x+5}}{x}+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{10+\frac{5}{x}}{\sqrt{\frac{16x^2+10x+5}{x^2}}+4}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{10+\frac{5}{x}}{\sqrt{16+\frac{10}{x}+\frac{5}{x^2}}+4}=\frac{10+\frac{5}{\infty}}{\sqrt{16+\frac{10}{\infty}+\frac{5}{\infty^2}}+4}=\frac{10+0}{\sqrt{16+0+0}+4}=\frac{10}{\sqrt{16}+4}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}\ .$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Обчислити наступні границі:

3.33. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x+1}$;

3.34. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\sqrt{x+2}-1\right)$;

3.35. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2+x-2}$;

3.36. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-8}{x^2+x-6}$;

3.37. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-x+8}{x^2+5x-6}$;

3.38. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+6x+3}{x^3+x+9}$;

3.39. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-8}{x^2+x-6}$;

3.40. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-x+8}{x^2+5x-6}$;

3.41. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-1}{\sqrt{9x^2-6x}}$;

3.42. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-1}{\sqrt{x}-1}$;

3.43. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-1}{\sqrt{4x}-1}$;

3.44. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x+2}{2x^3-2}$;

3.45. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+8x+22}{2x^3-2}$;

3.46. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x+4}{2x^2+3x-2}$;

3.47. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+6x+3}{5x^3+2x+1}$;

3.48. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^5-4x+3}{\sqrt{4x^{10}+4x^2}}$;

3.49. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^5-4x+3}{\sqrt{x^9+4x^2}}$;

3.50. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-7x}{\sqrt{x}-2x}$;

3.51. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-7x+9}{2x}$;

3.52. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^2-8}{3x^2+2x-6}$;

3.53. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^2-8}{3x^4+2x^2-6x}$;

3.54. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$;

3.55. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4}$;

3.56. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2+x-2}$;

3.57. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^4-1}$;

3.58. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{\sqrt{x}-2}$;

3.59. $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{9-x}{3-\sqrt{x}}$;

3.60. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4x+3}{x-1}$;

3.61. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+3x+2}{2x^2+3x-2}$;

3.62. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{\sqrt{x}-1}$;

3.63. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2+x-6}$;

3.64. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-5}{2-\sqrt{x-1}}$;

3.65. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{1-\sqrt{x^2+1}}$;

3.66. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+2}{\sqrt{x+6}-2}$;

3.67. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{x+3}}{x}$;

3.68. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x+2}-3}{7-x}$;

3.69. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}$;

3.70. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+16}-4}{x^2}$;

3.71. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-x)$;

3.72. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2-2})$;

3.73. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})$;

3.74. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^4+1}-\sqrt{4x^2-2})$;

3.75. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^3+3}-\sqrt{4x^2-x})$.

3.76. $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{4x^2-x})$.

Індивідуальне завдання

Обчислити наступні границі:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{nx^2-4x+5}{2x^2+(n-1)\cdot x-2}$;

б) $\lim\limits_{x\to n}\dfrac{x^2-2xn+n^2}{n^2-xn}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{n-x}-\sqrt{n+x}}$;

г) $\lim\limits_{x\to -\infty}(nx-\sqrt{x^2-4x})$;

де n – остання цифра номера студента за списком.

Теми рефератів

1. Нескінченно малі та нескінченно великі послідовності.
2. Основні теореми про границі послідовності.

§3.3. Дві визначні та три необхідні границі.

ПРАКТИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

П р и к л а д : Обчислити наступні границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{3x}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x+2}\right)^{2x-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+7x)}{3x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7^x-5^x}{x}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+12x)^4-1}{5x}$.

Розв'язання:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{3x}$. Скористаємося першою визначною границею: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\, x}{x}=1$. Введемо заміну $7x=y\Rightarrow y\to 0$ при $x\to 0$.

Маємо: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{3x}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin y}{3\cdot\dfrac{y}{7}}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{7}{3}\cdot\dfrac{\sin y}{y}=\dfrac{7}{3}\cdot 1=\dfrac{7}{3}$.

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x+2}\right)^{2x-1}$. Безпосередня підстановка $x=\infty$ дає невизначеність $\left[1^{\infty}\right]$, тому скористаємося другою визначною границею: $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^{an+в}=e^a$, $e\approx 2{,}72$.

Введемо заміну $1+\dfrac{1}{n}=\dfrac{x-3}{x+2}$. Зведемо до спільного знаменника і виразимо x через n: $x=-5n-2$. При чому, якщо $x\to\infty$, то $n\to-\infty$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^{2x-1}=\lim_{n\to-\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2\cdot(-5n-2)-1}=\lim_{n\to-\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-10n-4-1}=e^{-10}=\frac{1}{e^{10}}.$$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+7x)}{3x}$. Безпосередня підстановка $x=0$ дає невизначеність $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, тому скористаємося першою необхідною границею: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$.

Введемо заміну $7x=y\Rightarrow x=\dfrac{1}{7}y$. Якщо $x\to 0$, то $y\to 0$, тоді:

$$\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{3\cdot\dfrac{y}{7}}=\lim_{y\to 0}\frac{7}{3}\cdot\frac{\ln(1+y)}{y}=\frac{7}{3}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}=\frac{7}{3}\cdot 1=\frac{7}{3}.$$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7^x-5^x}{x}$. Безпосередня підстановка $x=0$ дає невизначеність $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, тому скористаємося другою необхідною границею: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$.

Виносимо в чисельнику за дужки множник 5^x:

$$\lim_{x\to 0}\frac{7^x-5^x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{5^x\left(\left(\frac{7}{5}\right)^x-1\right)}{x}=\lim_{x\to 0}5^x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{7}{5}\right)^x-1}{x}=1\cdot\ln\frac{7}{5}=\ln 7-\ln 5.$$

д). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+12x)^4-1}{5x}$. Безпосередня підстановка $x=0$ дає невизначеність $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, тому скористаємося третьою необхідною границею: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^a-1}{x}=a$

Введемо заміну: $12x=y \Rightarrow x=\dfrac{y}{12}$. Якщо $x\to 0$, то $y\to 0$, тоді:

$$\lim_{y\to 0}\frac{(1+y)^4}{5\cdot\frac{y}{12}}=\lim_{y\to 0}\frac{12}{5}\cdot\frac{(1+y)^4-1}{y}=\frac{12}{5}\lim_{y\to 0}\frac{(1+y)^4-1}{y}=\frac{12}{5}\cdot 4=\frac{48}{5}.$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Обчислити наступні границі:

3.77. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{14x}{\sin 7x}$;

3.78. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctgx}{\arcsin 9x}$;

3.79. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg4x}{\arcsin 5x}$;

3.80. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin(x-\pi)}{x-180^0}$;

3.81. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{cos4x-cos2x}{x^2}$;

3.82. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{5x^2}$;

3.83. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{1}{5x}\right)^x$;

3.84. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x-3}{x+2}\right)^{2x}$;

3.85. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2+2}\right)^{3x^2}$;

3.86. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{4}{6x+5}\right)^{2x}$;

3.87. $\lim\limits_{x\to 0}(3x+3)^{\frac{5}{x}}$;

3.88. $\lim\limits_{x\to 0}(2x-10)^{\frac{5}{2x}}$

3.89. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{tg(2x-6)}{3x-9}$;

3.90. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{5x-3}{5x+3}\right)^{6x-2}$;

3.91. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+5x)}{10x}$;

3.92. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{6x}$;

3.93. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin^2 x)}{tg^2x}$;

3.94. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1-\dfrac{9}{3x-1}\right)^{6-4x}$;

3.95. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_4(1+9x)}{5x}$;

3.96. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-2^x}{2x}$;

3.97. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^x-7^x}{x}$;

3.98. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\lg x}{6-6x}$;

3.99. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8^x-2^x}{x}$;

3.100. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+2x)^3-1}{4x}$;

3.101. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+15x)^4-1}{15x}$; **3.102.** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{5^{3-x}-1}{2x-6}$;

3.103. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+3x)^7-1}{9x}$; **3.104.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-1)^5-1}{4-2x}$.

Індивідуальне завдання

Обчислити наступні границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctgnx}{\arcsin 2x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{nx}\right)^{2x-n}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+nx)}{(n+1)x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{n^x-(n+3)^x}{x}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+nx)^6-1}{5x}$;

де n – остання цифра номера студента за списком.

Теми рефератів

1. Число e.
2. Порівняння нескінченно малих величин.

§3.4. Неперервність та розриви функцій.

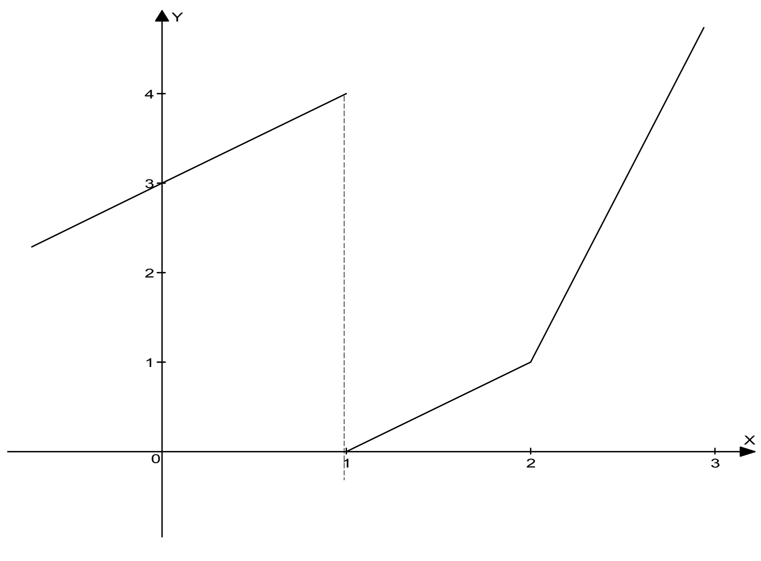
ПРАКТИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

П р и к л а д 1 : Дослідити на неперервність функцію і побудувати її графік:

$$y=\begin{cases} x+3, & x<1 \\ x-1, & x\in[1;2] \\ 4x-7, & x>2 \end{cases}.$$

Розв'язання:

Зайдемо границі справа та зліва в точках $x=1$ та $x=2$.



Для точки $x=1$: $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 1-0}(x+3) = 4$, $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 1+0}(x-1) = 0$. Лівостороння та правостороння границі мають різні значення ($4 \neq 1$). Отже, функція має розрив у точці $x=1$.

Для точки $x=2$: $\lim\limits_{x\to 2+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 2+0}(4x-7) = 1$; $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 2-0}(x-1) = 1$. Лівостороння та правостороння границі мають однакові значення ($1=1$). Отже, функція неперервна в точці $x=2$.

П р и к л а д 2 : Дослідити на неперервність функцію і побудувати її графік:

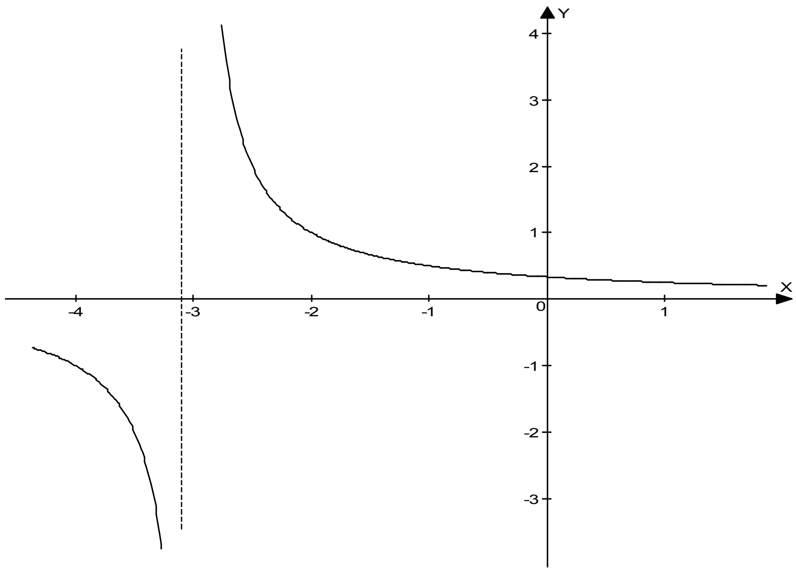
$$y = \frac{1}{3+x}, \text{ при } x \in R.$$

Розв'язання:

Так як $x \neq 3$, то знайдемо границі справа та зліва в точці розриву $x = 3$:

$$\lim_{x\to -3+0} f(x) = \lim_{x\to -3+0}\left(\frac{1}{3+x}\right) = \frac{1}{0} = \infty; \quad \lim_{x\to -30} f(x) = \lim_{x\to -3+0}\left(\frac{1}{3+x}\right) = \frac{1}{-0} = -\infty.$$

Отже, маємо розрив II роду.



ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Дослідити на неперервність функції та побудувати їх графіки:

3.105. $f(x) = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ x^2, \quad x \in (0;1); \\ 1, x \ge 1 \end{cases}$

3.106. $f(x) = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ \frac{1}{2}x, \quad x \in (0;1); \\ 1, x \ge 1 \end{cases}$

3.107. $f(x) = \begin{cases} 0, x \le -1 \\ \frac{1}{4}(x+1)^2, x \in (-1;1); \\ 1, x \ge 1 \end{cases}$

3.108. $f(x) = \begin{cases} 0, x \le \frac{1}{2} \\ 2x-6, \ x \in \left(\frac{1}{2};1\right); \\ 1, x \ge 1 \end{cases}$

3.109. $f(x)=\begin{cases} 0, x \le 2 \\ x^2-4x+4, x \in (2;3); \\ 1, x \ge 3 \end{cases}$

3.110. $f(x)=\begin{cases} 0, x \le 1 \\ 2(x-1), x \in (1;2); \\ 1, x \ge 2 \end{cases}$

3.111. $f(x)=\begin{cases} 0, x \le \frac{1}{2} \\ (2x-1)^2, x \in \left(\frac{1}{2};1\right); \\ 1, x \ge 1 \end{cases}$

3.112. $f(x)=\begin{cases} -2, x \le \frac{1}{2} \\ 4x-4, \ x \in \left(\frac{1}{2};1\right); \\ 1, x \ge 1 \end{cases}$

3.113. $y = x + \frac{1}{x-1}$, *при* $x \in [0;2]$;

3.114. $y = \frac{3x^2 - x}{x}$, *при* $x \in R$;

3.115. $y = \frac{1}{1-x^2}$, *при* $x \in [-2;2]$;

3.116. $y = x - \frac{1}{x+1}$, *при* $x \in [-2;2]$;

3.117. $y = x^2 - \frac{1}{x-1}$, *при* $x \in R$;

3.118. $y = x + \frac{1}{x+2}$, *при* $x \in R$;

3.119. $y = x + \frac{1}{x+4}$, *при* $x \in [-8;6]$;

3.120. $y = \frac{1}{9-x^2}$, *при* $x \in [0;10]$;

3.121. $y = \frac{x^2+x+1}{x-1}$, *при* $x \in [-1;3]$;

3.122. $y = \frac{x^2+2x+1}{x+1}$, *при* $x \in R$;

3.123. $y = \frac{1}{x^3+3x^2-4x}$, *при* $x \in R$;

3.124. $y = \frac{x^3-3x^2+3x-1}{x-1}$, *при* $x \in R$.

Індивідуальне завдання

Обчислити наступні границі:

а) $f(x)=\begin{cases} 0, x \le -1 \\ n \cdot (x+1)^2, x \in (-1;0); \\ n, x \ge 0 \end{cases}$

б) $y = \frac{1}{nx - x^2}$, *при* $x \in R$.

де *n* – остання цифра номера студента за списком.

Теми рефератів

1. Властивості функцій, неперервних в точці.
2. Одностороння границя. Скачок функції.

РОЗДІЛ 4. ДИФЕРЕНЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

§4.1. Основні правила та формули диференціювання.

ПРАКТИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

П р и к л а д : Знайти похідні вказаних функцій:

а) $y=4x^3-\frac{1}{2}x^2+7$; б) $y=\sqrt[7]{x^3}+\frac{4}{5x^{13}}$; в) $y=\cos x\cdot\log_9 x$;

г) $y=\frac{\arcsin x}{\ln x}$; д) $y=\sqrt{tg\left(x^3-4x\right)}$.

Розв'язання:

Для знаходження похідних функцій користуємося таблицею похідних (Табл. 1 додатку).

а) $y=4x^3-\frac{1}{2}x^2+7$.

$$y'=4\cdot3\cdot x^{3-1}-\frac{1}{2}\cdot2\cdot x^{2-1}+0=12x^2-x;$$

б) $y=\sqrt[7]{x^3}+\frac{4}{5x^{13}}$.

Скористаємося властивостями степеня $\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}$, $\frac{1}{a^m}=a^{-m}$, отримаємо: $y=\sqrt[7]{x^3}+\frac{4}{5x^{13}}=x^{\frac{3}{7}}+\frac{4}{5}x^{-13}$.

Тоді похідна функції $y'=\frac{3}{7}\cdot x^{\frac{3}{7}-1}+\frac{4}{5}\cdot(-13)\cdot x^{-13-1}=\frac{3}{7}x^{-\frac{4}{7}}-\frac{52}{5}x^{-14}=\frac{3}{7\sqrt[7]{x^4}}-\frac{52}{5x^{14}}$.

в) $y=\cos x\cdot\log_9 x$.

Скористаємося формулою похідної добутку: $(uv)'=u'v+uv'$, тоді $y'=(\cos x)'\cdot\log_9 x+\cos x\cdot(\log_9 x)'=-\sin x\cdot\log_9 x+\cos x\cdot\frac{1}{x\ln 9}$

г) $y=\frac{\arcsin x}{\ln x}$.

Скористаємося формулою похідної частки: $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$, тоді

$$y=\frac{(\arcsin x)'\cdot\ln x-\arcsin x\cdot(\ln x)'}{\ln^2 x}=\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\ln x-\arcsin x\cdot\frac{1}{x}}{\ln^2 x}.$$

д) $y=\sqrt{tg\left(x^3-4x\right)}$.

Враховуючи, що функція складена, то її похідна дорівнюватиме: $y' = \frac{1}{2\sqrt{tg\left(x^3 - 4x\right)}} \cdot \frac{1}{\cos^2\left(x^3 - 4x\right)} \cdot \left(3x^2 - 4\right).$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Знайти похідні вказаних функцій:

4.1. $y = 4x^5 - \frac{1}{2}x^2 + 2$;

4.2. $y = \frac{1}{4}x^8 - x^2 + \sqrt{x}$;

4.3. $y = 4x^3 - x^2 + x$;

4.4. $y = 4x^6 - x^7 + 3x$;

4.5. $y = x^2 - \frac{1}{5}x^5$;

4.6. $y = 2x^3 - \frac{1}{4}x^2 - 4$;

4.7. $y = 4x^2 - 7x + 2$;

4.8. $y = 2x^3 - x^2 + \frac{1}{x}$;

4.9. $y = 2x^7 - \frac{1}{6}x^6 - 2$;

4.10. $y = x^3 - \frac{1}{7}x^7$;

4.11. $y = \sqrt[4]{x^3} + \frac{2}{x^3}$;

4.12. $y = \sqrt[3]{x^5} + \frac{6}{x^3}$;

4.13. $y = \sqrt[6]{x^5} + \frac{3}{x^6}$;

4.14. $y = \sqrt[7]{x^6} + \frac{4}{x^7}$;

4.15. $y = \sqrt[6]{x^7} + \frac{2}{x^6}$;

4.16. $y = \sqrt[7]{x^8} + \frac{1}{3x^3}$;

4.17. $y = \sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{x^4}$;

4.18. $y = \sqrt[5]{x^3} + \frac{6}{x^7}$;

4.19. $y = \sqrt[8]{x^7} + \frac{9}{x^8}$;

4.20. $y = \sqrt[5]{x^6} + \frac{3}{x^5}$.

Знайти похідні функцій, користуючись формулою добутку:

4.21. $y = e^x \cdot \sin x$;

4.22. $y = e^x \cdot \sqrt[3]{x}$;

4.23. $y = cosx \cdot \ln x$;

4.24. $y = cosx \cdot \log_2 x$;

4.25. $y = x \cdot \log_7 x$;

4.26. $y = arccosx \cdot \log_5 x$;

4.27. $y = \sin x \cdot 3^x$;

4.28. $y = ctgx \cdot \sqrt{x}$;

4.29. $y = tgx \cdot \sqrt[3]{x}$;

4.30. $y = e^x \cdot \ln x$.

Знайти похідні функцій, користуючись формулою частки:

4.31. $y = \frac{\sqrt{x}}{tgx}$;

4.32. $y = \frac{x^6 - 25}{\sqrt{x}}$;

4.33. $y = \frac{arctgx}{x}$;

4.34. $y = \frac{tgx}{\sqrt{x}}$;

4.35. $y=\dfrac{x}{\ln x}$;

4.36. $y=\dfrac{x^2}{\sin x}$;

4.37. $y=\dfrac{e^x}{\cos x}$;

4.38. $y=\dfrac{e^x-5}{\arccos x}$;

4.39. $y=\dfrac{5x}{\cos x}$;

4.40. $y=\dfrac{4x^4-9x^2}{\sqrt{x}}$.

Знайти похідні складених функцій:

4.41. $y=5^{\arcsin 4x}$;

4.42. $y=\sqrt{\ln 2^x}$;

4.43. $y=\sqrt{\cos x}$;

4.44. $y=\sqrt{\sin x}$;

4.45. $y=\sqrt{e^{3x}}$;

4.46. $y=\sqrt{x^2-x}$;

4.47. $y=\sqrt{4x^2-3}$;

4.48. $y=\ln\sqrt{x}$;

4.49. $y=\ln\sqrt{e^x}$;

4.50. $y=2^{\sin 4x}$.

4.51. $y=arctg^2 x$;

4.52. $y=\ln^3 x$;

4.53. $y=\cos^4(2x+5)$;

4.54. $y=\ln arctg x^5$;

4.55. $y=\sin^2\cos x$;

4.56. $y=\sqrt{\sin\sqrt{x}}$;

4.57. $y=\dfrac{3}{\ln^6 2x}$;

4.58. $y=\ln arctg\sqrt{x^2+4}$;

4.59. $y=\sqrt{\ln\arccos 2^x}$;

4.60. $y=\sin\sqrt{\ln 8^x}$;

4.61. $y=\sqrt[5]{\log_{12}(6x+5)}$;

4.62. $y=7^{arctg(\arcsin x-3)}$.

Знайти похідні вказаних функцій:

4.63. $y=\sqrt{\dfrac{x}{x+4}}$;

4.64. $y=\sqrt{\dfrac{\ln^2 x-x}{4x}}$;

4.65. $y=\dfrac{4x^4-9x^2}{\sqrt{x^3-6x-9}}$;

4.66. $y=\dfrac{9x^2-16}{\sqrt{x^3+x^2-2x+4}}$;

4.67. $y=\dfrac{(3x-2)^2(3x+2)}{\ln\sqrt{x-8}}$;

4.68. $y=\dfrac{25x^4-16}{\sqrt{3x^2-8x+4}}$;

4.69. $y=\dfrac{16x^2-20x-15}{\sqrt[3]{x^3-4x}}$;

4.70. $y=\dfrac{4x^6-25}{\sqrt{x^4+2x+5}}$.

Індивідуальне завдання

Знайти похідні вказаних функцій:

а) $y=2x^n-\dfrac{1}{n}x^{2n}-4n$;

б) $y=\sqrt[n]{x^{n-1}}+\dfrac{6}{x^n}-nx$;

в) $y = ctg(nx-4)\cdot\sqrt{x^2+nx-n}$; г) $y = \dfrac{x^{2n}-(n-2)x}{\sin^n x}$.

де n – остання цифра номера студента за списком.

Теми рефератів

1. Означення похідної. Залежність між неперервністю та диференційованістю функцій.
2. Означення похідної. Застосування похідної до розв'язування прикладних задач.

§4.2. Особливі випадки диференціювання.

ПРАКТИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

П р и к л а д : Знайти похідну від вказаних функцій:

а) $\sin(x+y)+\ln(x-y)=4$; б) $\begin{cases} x=\cos(t^2+1) \\ y=\sin(t^2+1) \end{cases}$;

в) $y=(x^3+3x^2+4)^{\sin 4x}$; г) $y=\log_{\sin x}(1+\sqrt{x})$.

Розв'язання:

а) $\sin(x+y)+\ln(x-y)=4$.

Дана функція задана неявно, тому знаходимо похідну від лівої та правої частини, пам'ятаючи, що y є деякою функцією від x:

$$(\sin(x+y)+\ln(x-y))' = 4' \Rightarrow$$

$$(\sin(x+y))' + (\ln(x-y))' = 0 \Rightarrow \cos(x+y)\cdot(1+y') + \frac{1-y'}{x-y} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(x+y)+\frac{1}{x-y}+y'(\cos(x+y)-\frac{1}{x-y})=0 \Rightarrow y' = -\frac{\cos(x+y)+\dfrac{1}{x-y}}{\cos(x+y)-\dfrac{1}{x-y}}.$$

б) $\begin{cases} x=\cos(t^2+1) \\ y=\sin(t^2+1) \end{cases}$ – функція задана параметрично, тобто у вигляді $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$, тому її похідна обчислюється за формулою: $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{-\sin(t^2+1)\cdot 2t}{\cos(t^2+1)\cdot 2t} = -tg(t^2+1).$$

в) $y=(x^3+3x^2+4)^{\sin 4x}$.

Функція задана у вигляді $f(x)=u(x)^{v(x)}$, тому прологарифмуємо функцію зліва та справа за основою e:

$\ln y = \ln\left(x^3+3x^2+4\right)^{\sin 4x}$, або $\ln y = \sin 4x \cdot \ln\left(x^3+3x^2+4\right)$;

Для знаходження похідної скористаємося формулою добутку:

$$y' \cdot \frac{1}{y} = 4\cos 4x \cdot \ln\left(x^3+3x^2+4\right) + \sin 4x \cdot \frac{1}{x^3+3x+4} \cdot \left(3x^2+6x\right);$$

Тоді шукана похідна:

$$y' = 4\cos 4x \cdot \left(x^3+3x^2+4\right)^{\sin 4x} \cdot \ln\left(x^3+3x^2+4\right) + \sin 4x \cdot \frac{3x^2+6x}{x^3+3x+4} \cdot \left(x^3+3x^2+4\right)^{\sin 4x}.$$

г) $y = \log_{\sin x}(1+\sqrt{x})$. Перейдемо до нової основи логарифма (наприклад *e*), скориставшись формулою: $\log_a b = \dfrac{\ln b}{\ln a}$, тоді

$$y = \log_{\sin x}(1+\sqrt{x}) = \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\ln\sin x} \Rightarrow y' = \frac{(\ln(1+\sqrt{x}))' \cdot \ln\sin x - \ln(1+\sqrt{x}) \cdot (\ln\sin x)'}{(\ln\sin x)^2} =$$

$$\frac{\dfrac{1}{1+\sqrt{x}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln\sin x - \ln(1+\sqrt{x}) \cdot \dfrac{1}{\sin x} \cdot \cos x}{\ln^2 \sin x} =$$

$$\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \sin x \ln\sin x - \cos x(1+\sqrt{x})\ln(1+\sqrt{x})}{(1+\sqrt{x}) \cdot \sin x \cdot \ln^2 \sin x}.$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Знайти похідні функцій, заданих неявно:

4.71. $y^2x^2 + x = 3y$;

4.72. $x^2 + xy^3 + x = 3y$;

4.73. $e^y - xy = 4y^5$;

4.74. $\sin(x-y) + ctg(x+y) = 2x$;

4.75. $\ln(x^2+xy) + x = 3y$;

4.76. $e^{xy} - xy = tg(4y)$;

4.77. $\arcsin(x-y) + arctg(x+y) = 2$;

4.78. $\sin\ln(x^2+x) + xy = 3$;

4.79. $\dfrac{\cos(x^2-y^3)}{tg(xy+\frac{x}{y})} = 12xy$;

4.80. $e^{xy} - xy + \ln(xy) = tg(xy)$.

Знайти похідні функцій, заданих параметрично:

4.81. $\begin{cases} x = t^2 + t \\ y = t^3 - 4 \end{cases}$;

4.82. $\begin{cases} x = 3t^2 + t - 4 \\ y = t^3 + 6t - 7 \end{cases}$;

4.83. $\begin{cases} x = \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{2}t^3 - 11 \\ y = t^2 - 9t - 3 \end{cases}$;

4.84. $\begin{cases} x = \ln\left(t^2+1\right) \\ y = \log_2\left(t^2+1\right) \end{cases}$;

4.85. $\begin{cases} x = \cos\left(t^2+t\right) - \sin t \\ y = \sin\left(t+1\right) + \cos 4t \end{cases}$;

4.86. $\begin{cases} x = e^t - 7\sin t \\ y = e^{-t} + \frac{1}{4}\cos 4t \end{cases}$.

Знайти похідні вказаних функцій:

4.87. $y=(1+\cos x)^{x^2-4}$;

4.88. $y=(x^2+3x)^{x^2-4}$;

4.89. $y=\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{x^2-4}$;

4.90. $y=(e^{-x}+\cos 7x)^x$;

4.91. $y=\left(4-\frac{4}{\sqrt{x}}\right)^{e^{3x}}$;

4.92. $y=\left(1+\frac{1}{2}x^2\right)^{4x^{-1}}$;

4.93. $y=(x-4)^{x+4}$;

4.94. $y=(\log_x 7)^{tgx}$.

Знайти похідні логарифмічних функцій:

4.95. $y=\log_x(x^3+x^2)$;

4.96. $y=\log_{\sin 4x}(x^3+3x^2+4)$;

4.97. $y=\log_{\sqrt{x+5x^2}}\left(3+\frac{4}{\sqrt{x}}\right)$;

4.98. $y=\log_{(x-2x^2)}\left(x+\frac{1}{2}x^2\right)$;

4.99. $y=\log_{\sqrt{4x-3}}\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right)$;

4.100. $y=\log_{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

Індивідуальне завдання

Знайти похідні вказаних функцій:

а) $x^{2n}+\sqrt[n]{xy^2}+e^x=ny$;

б) $\begin{cases} x=\frac{1}{2n}t^n+\sqrt[n]{t}-4t \\ y=t^3+nt-\frac{1}{x^n} \end{cases}$;

в) $y=(x^{n-2}+nx)^{n^x-4}$;

г) $y=\log_{\sqrt[n]{x}}\frac{(n+2)x}{\sin x}$.

де n – остання цифра номера студента за списком.

Теми рефератів

1. Означення диференціала. Механічний та геометричний зміст диференціалу.
2. Параметричне завдання функції. Циклоїда.

§4.3. Диференціал функції. Застосування диференціалу до наближеного обчислення функції.

ПРАКТИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

П р и к л а д 1 : Знайти наближено значення функції $y=\sqrt[3]{5x^2+10x+5}$ при $x=4{,}03$.

Розв'язання:

Значення функції обчислимо за формулою: $y \approx y(x_0) + y'(x_0) \cdot \Delta x$.
Нехай $x_0 = 4$, тоді $\Delta x = x - x_0 = 0{,}03$.

$y(x_0) = \sqrt[3]{5 \cdot 4^2 + 10 \cdot 4 + 5} = \sqrt[3]{125} = 5$**;**

$y' = \dfrac{10x + 10}{3\sqrt[3]{(5x^2 + 10x + 5)}}$; $y'(4) = \dfrac{10 \cdot 4 + 10}{3\sqrt[3]{(5 \cdot 4^2 + 10 \cdot 4 + 5)}} = \dfrac{50}{3 \cdot 25} = \dfrac{2}{3}$;

$y \approx y(x_0) + y'(x_0) \cdot \Delta x = 5 + \dfrac{2}{3} \cdot 0{,}03 = 5{,}01$.

П р и к л а д 2 : Знайти наближено $\sin 63^\circ$.

Розв'язання:

Значення функції обчислимо за формулою: $y \approx y(x_0) + y'(x_0) \cdot \Delta x$.

Нехай $y = \sin x$, $x = 63^\circ$, $x = 60^\circ$, тоді $\Delta x = x - x_0 = 3^\circ = \dfrac{3 \cdot 3{,}14}{180} = 0{,}052$.

$y(x_0) = \sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866$**;**

$y'(60^\circ) = \cos 60^\circ = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$;

$\sin 60^\circ \approx y(x_0) + y'(x_0) \cdot \Delta x = 0{,}866 + 0{,}5 \cdot 0{,}052 = 0{,}892$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Знайти наближено значення функцій:

4.101. $y = \sqrt[5]{4x^2 - 2x - 1}$, $x = 0{,}98$;

4.102. $y = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2 + 3x + 2}$, $x = 1{,}99$;

4.103. $y = \dfrac{1}{\sqrt{2x^2 + 10x - 8}}$, $x = 1{,}04$;

4.104. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 9x - 1}}$, $x = 1{,}24$;

4.105. $y = \sqrt[3]{9x^2 + 8x + 10}$, $x = 1{,}12$;

4.106. $y = \sqrt{7x^3 + 12x^2 + 9x - 3}$, $x = 0{,}95$;

4.107. $\sqrt[3]{129}$;

4.108. $\sqrt{53}$;

4.109. $1{,}005^8$;

4.110. $\sqrt[5]{31}$;

4.111. $\sin 44^\circ$;

4.112. $tg 47^\circ$;

4.113. $ctg 85^\circ$;

4.114. $\sin 65^\circ$;

4.115. $\cos 29^\circ$;

4.116. $\cos 62^\circ$;

4.117. $4{,}03^5$;

4.118. $1{,}11^3$.

Індивідуальне завдання

Знайти наближено значення функцій:

а) $y = \sqrt[n]{5x^2 - 3x - 1}$, $x = 1 - 0{,}001 \cdot n$; б) $\sin(n^\circ)$ та $\cos(30 + n)^\circ$.

де *n* – остання цифра номера студента за списком.

Теми рефератів

1. Теорема Лагранжа та її економічний зміст.
2. Формула Тейлора та її застосування в економічних задачах.

§4.4. Застосування похідної до дослідження динаміки функції

ПРАКТИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

П р и к л а д : Дослідити функцію і побудувати її графік: $y=\dfrac{x}{x^2-1}$.

Розв'язання:

1. Елементарні дослідження:

Область визначення функції : $x\in(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;\infty)$.

Точки перетину графіка функції з осями координат:

$(0;0)$ − єдина точка перетину з віссю абсцис та ординат.

Функція непарна, так як: $y(-x)=\dfrac{-x}{(-x)^2-1}=-\dfrac{x}{x^2-1}$. Отже графік функції симетричний відносно початку координат.

2. Дослідження точок розриву:

$$\lim_{x\to-1+0}\frac{x}{x^2-1}=\frac{-1}{-0}=\infty;\ \lim_{x\to-1-0}\frac{x}{x^2-1}=\frac{-1}{0}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to1+0}\frac{x}{x^2-1}=\frac{1}{0}=\infty;\ \lim_{x\to1-0}\frac{x}{x^2-1}=\frac{1}{-0}=-\infty.$$

Отже, $x=-1$ і $x=1$ − вертикальні асимптоти.

3. Знаходження похилих асимптот:

Похилі асимптоти визначатимемо за формулою: $y=kx+b$. Для цього знайдемо невідомі коефіцієнти k і b:

$$k=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2-1}=\left[\frac{0}{\infty}\right]=0.$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}=\frac{0}{1}=0.$$

Тоді рівняння асимптоти набуватиме вигляду: $y=0$.

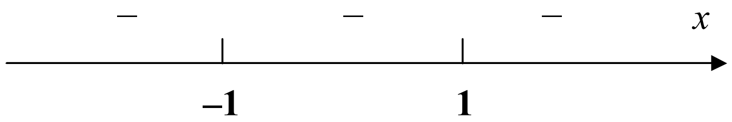
4. Дослідження функції на монотонність:

Знайдемо першу похідну функції:

$$y'=\frac{(x^2-1)-x\cdot2x}{(x^2-1)^2}=\frac{x^2-2x^2-1}{(x^2-1)^2}=\frac{-1-x^2}{(x^2-1)^2}=-\frac{1+x^2}{(x^2-1)^2}.$$

Прирівняємо першу похідну до нуля: $-\dfrac{1+x^2}{\left(x^2-1\right)^2}=0$.

Так як рівняння не має розв’язків, то критичних точок першого роду не має. Тому на числовій осі *0X* позначаємо лише точки розриву функції:



Отже, функція спадає на всій області визначення.

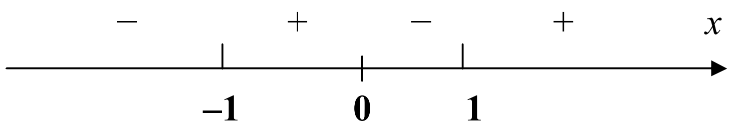
5. Дослідження на опуклість та ввігнутість:

Знайдемо другу похідну функції:

$$y''=\frac{-2x\cdot\left(x^2-1\right)^2+\left(1+x^2\right)\cdot 2\left(x^2-1\right)\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^4}=\frac{2x\cdot\left(x^2-1\right)\cdot\left(-x^2+1-2+2x^2\right)}{\left(x^2-1\right)^4}=$$

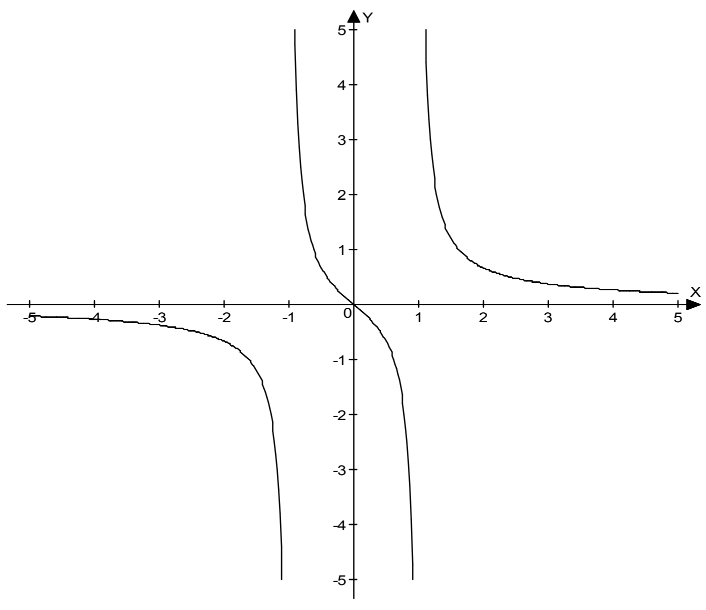
$$=\frac{2x\cdot\left(x^2+3\right)}{\left(x^2-4\right)^3}.$$

Прирівняємо другу похідну до нуля: $\dfrac{2x\cdot\left(x^2-2x-1\right)}{\left(x^2-4\right)^3}=0$, $x=0$ − критична точка другого роду. Визначимо знаки другої похідної на отриманих інтервалах:



Отже, функція опукла вниз на проміжках: $x\in\left(-1;0\right)\cup\left(1;\infty\right)$, опукла вгору − $x\in\left(-\infty;-1\right)\cup\left(0;1\right)$. Точка (0; 0) – точка перегину.

6. Побудова графіка функції:



ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Знайти екстремуми функцій:

4.119. $y = x^2 - 2x + 3$;

4.120. $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$;

4.121. $y = x^3 - 9x^2 + 15x + 3$;

4.122. $y = -x^4 + 2x^2$;

4.123. $y = x^4 - 8x^2 + 2$;

4.124. $y = \frac{(x-2)(3-x)}{x^2}$;

4.125. $y = (x-2)^3(2x+1)$;

4.126. $y = cosx \cdot sinx$, $x \in (0; \pi)$.

Знайти інтервали монотонності та екстремуми функцій:

4.127. $y = 4x^2 - 6x$;

4.128. $y = 1 + x - x^3$;

4.129. $y = 4x^4 - 2x^2 + 2$;

4.130. $y = x + \frac{1}{x}$;

4.131. $y = x^2(4-x)^2$;

4.132. $y = \frac{x}{1+x^2}$.

Знайти найбільше та найменше значення функції на зазначеному проміжку:

4.133. $y = 4x^4 - 2x^2 + 5$, $[-2;2]$;

4.134. $y = x + \sqrt{x}$, $[0;4]$;

4.135. $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$, $[-1;2]$;

4.136. $y = x^3 - 3x^2 + 6x - 2$, $[-1;1]$.

Дослідити функцію і побудувати її графік:

4.137. $y = \frac{x^2 + x}{x+2}$;

4.138. $y = \frac{4x^2 - x}{x+2}$;

4.139. $y = \frac{x+2}{x^2 - 1}$;

4.140. $y = \frac{x^2}{x+5}$;

4.141. $y = \frac{x^2 - 1}{x}$;

4.142. $y = \frac{3x}{x^2 - 4}$;

4.143. $y = \frac{x^2}{x^2 - 9}$;

4.144. $y = \frac{x-1}{x^2}$;

4.145. $y = \frac{x}{(x+2)^2}$;

4.146. $y = \frac{x}{(x-2)^2}$.

Індивідуальне завдання

Дослідити функцію та побудувати її графік: $y = \frac{Nx}{(N-10)^2 - (-1)^N x^2}$, N – остання цифра номера студента за списком.

Теми рефератів

1. Економічний зміст похідної. Еластичність.
2. Задачі про найбільші та найменші значення величини.

РОЗДІЛ 5. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

§5.1. Частинні похідні функції багатьох змінних.

ПРАКТИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

П р и к л а д : Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ функцій:

а) $z = 4xy^3 + 2\sqrt{x}y^2 + 7y$; б) $z = e^x \cdot \sqrt{y}$; в) $z = \frac{\sqrt{x^2 + 3y}}{sinxy}$.

Розв'язання:

а) $z = 4xy^3 + 2\sqrt{x}y^2 + 7y$;

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4 \cdot 1 \cdot y^3 + 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot y^2 + 0 = 4y^3 + \frac{y^2}{\sqrt{x}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 4 \cdot x \cdot 3y^2 + 2\sqrt{x} \cdot 2y + 7 = 12xy^2 + 4y\sqrt{x} + 7.$$

б) $z = e^x \cdot \sqrt{y}$;

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^x \cdot \sqrt{y}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = e^x \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

в) $z = \frac{\sqrt{x^2 + 3y}}{sinxy}$;

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+3y}} \cdot sinxy - \sqrt{x^2+3y} \cdot ycosxy}{sin^2 xy} = \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+3y}} \cdot sinxy - \sqrt{x^2+3y} \cdot ycosxy}{sin^2 xy};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\frac{3}{2\sqrt{x^2+3y}} \cdot sinxy - \sqrt{x^2+3y} \cdot xcosxy}{sin^2 xy}.$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ функцій:

5.1. $z = 4x^3y^2 - 12xy^3 - \sqrt{xy}$;

5.2. $z = x^3y + 2x^2y^2 - \sqrt{x+y}$;

5.3. $z = 3x^2y^3 + 2x^3y^2 + \sqrt{2x}$;

5.4. $z = 4x^4y^3 + \frac{1}{2}x^3y^2 + \sqrt{3+y}$;

5.5. $z = x^4y^3 + xy^2 + cosx$;

5.6. $z = xy^3 + x^{10}y^2 + sinx$;

5.7. $z = \ln y^3 + xy^2 + sin2x$;

5.8. $z = \ln^2 y + x^4y^2 + siny^2$;

5.9. $z = 2\log_2 x + 3\sqrt{x}y^2 + 6y$;

5.10. $z = \log_3 y + 3xy^2 + 10x$;

5.11. $z=\sqrt{x}\cdot\sin y$;

5.12. $z=\sqrt{x+2}\cdot\cos y$;

5.13. $z=\sqrt{x^2-xy^5}$;

5.14. $z=\dfrac{x}{y}$;

5.15. $z=\dfrac{xy}{x^2+y}$;

5.16. $z=\dfrac{\ln y}{x+10}$;

5.17. $z=\dfrac{\ln y}{xy}$;

5.18. $z=\dfrac{\ln y}{\sqrt{x}}$;

5.19. $z=\dfrac{cosx}{\sqrt{y}}$;

5.20. $z=\dfrac{arccosx}{\sqrt{y}}$;

5.21. $z=e^{xy}\cdot\sqrt{2y}$;

5.22. $z=\dfrac{x^2+2e^x}{3y}$;

5.23. $z=\dfrac{x^2+2e^y}{4y}$;

5.24. $z=\dfrac{\ln y}{x+y}$;

5.25. $z=\sqrt{4x-3}\cdot sin^3 y$;

5.26. $z=\sqrt{2x}\cdot cosy^3$;

5.27. $z=\dfrac{arcsinx}{x+y}$;

5.28. $z=\dfrac{x^2y^3}{x^2+y^3}$;

5.29. $z=\ln(xy)\cdot sin(2x+4y)$;

5.30. $z=3xy^5\cdot\log_3 y^5$.

Індивідуальне завдання

Знайти частинні похідні $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функцій:

а) $z=2x^n y^{n+2}-\dfrac{1}{ny}x^{2n}-4y\sqrt{x}$;

б) $z=e^{nx}-\sqrt[n]{y}$;

в) $z=tg(nx-4y)\cdot\sqrt{x^3+nx^2-n}$;

г) $z=\dfrac{x^{2n}-(n-2)x}{\sin^n y}$.

де n – остання цифра номера студента за списком.

Теми рефератів

1. Геометричний зміст частинних похідних.
2. Диференціювання неявної функції декількох змінних.

§5.2. Градієнт функції та похідна функції у напрямку вектора.

ПРАКТИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

П р и к л а д : Знайти градієнт функції $z=\dfrac{2x^2-3}{4y^3}$ в точці A *(-1; 1)* та похідну в точці A в напрямі вектора $\vec{a}$ *(-12; -5)*.

Розв'язання:

Обчислимо частинні похідні функції в точці A_0:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2\cdot 2x-0}{4y^3}=\frac{4x}{4y^3}=\frac{x}{y^3}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{A(-1;1)}=\frac{-1}{1^3}=-1;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-3\cdot\frac{2x^2-0}{4y^4}=\frac{6x^2}{4y^4}=\frac{3x^2}{2y^4}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{A(-1;1)}=\frac{3\cdot(-1)^2}{2\cdot 1^4}=\frac{3}{4}.$$

Тоді градієнт функції можна записати у вигляді: $\overline{gradz}=\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_A\cdot\vec{i}+\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_A\cdot\vec{j}$.

Тобто: $\overline{gradz}=-1\cdot\vec{i}+\frac{3}{4}\cdot\vec{j}$.

Для запису похідної в точці A в напрямі вектора $\vec{a}$ використаємо формулу:
$$\frac{\partial z}{\partial\vec{a}}=\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_A\cdot\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_A\cdot\cos\beta .$$

Для цього зайдемо напрямлені косинуси:
$$\cos\alpha=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^{\ 2}+a_y^{\ 2}}}=\frac{-12}{\sqrt{144+25}}=\frac{-12}{13};\ \cos\beta=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^{\ 2}+a_y^{\ 2}}}=\frac{-5}{\sqrt{144+25}}=-\frac{5}{13}.$$

Тоді, $\frac{\partial z}{\partial\vec{a}}=-1\cdot\left(-\frac{12}{13}\right)+\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{5}{13}\right)=\frac{12}{13}-\frac{15}{52}=\frac{48-15}{52}=\frac{33}{52}$.

Відповідь: $\overline{gradz}=-1\cdot\vec{i}+\frac{3}{4}\cdot\vec{j}$; $\frac{\partial z}{\partial\vec{a}}=\frac{33}{52}$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

5.31. Задано функцію $z=x^3y^2+4\sqrt{x}-2\sqrt[3]{y}$ і точку *A (1; 1)*. Знайти градієнт функції в точці *A*.

5.32. Задано функцію $z=\frac{x}{y}+2\sqrt{xy}-\sqrt[3]{x+y}$ і точку *A (1; 4)*. Знайти градієнт функції в точці *A*.

5.33. Задано функцію $z=\left(\frac{x-1}{y^2}\right)^2$ і точку *A (2; –3)*. Знайти градієнт функції в точці *A*.

5.34. Задано функцію $z=\left(\frac{x^2}{4-y}\right)^{-1}$ і точку *A (–1; 0,5)*. Знайти градієнт функції в точці *A*.

5.35. Задано функцію $z=cos(xy)$ і точку *A* $(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$. Знайти градієнт функції в точці *A*.

5.36. Задано функцію $z = sin(2x + y)$ і точку A $(-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2})$. Знайти градієнт функції в точці A.

5.37. Задано функцію $z = \left(3x^2 + 4y^2\right)^2$ і точку A *(2; 3)*. Знайти градієнт функції в точці A.

Для вектора $\vec{a}$ знайти напрямлені косинуси:

5.38. $\vec{a}$ *(1; –1)*;

5.39. $\vec{a}$ *(–2; 1,5)*;

5.40. $\vec{a}$ *(0; 7)*;

5.41. $\vec{a}$ *(5; 1)*;

5.42. $\vec{a}$ *(–6; –8)*;

5.43. $\vec{a}$ *(–5; –12)*.

5.44. Задано функцію $z = \frac{3x}{y^2}$, точку A *(3; 4)* і вектор $\vec{a}$ *(6; 8)*. Знайти похідну в точці A в напрямі вектора $\vec{a}$.

5.45. Задано функцію $z = \frac{2x^3}{y^2}$, точку A *(1; 4)* і вектор $\vec{a}$ *(–6; 8)*. Знайти градієнт функції в точці A та похідну в точці A в напрямі вектора $\vec{a}$.

5.46. Задано функцію $z = \left(\frac{x^2}{4 - y}\right)^3$ і точку A *(–1; 0)*. Знайти градієнт функції в точці A.

5.47. Задано функцію $z = \ln x^3 y^2$, точку A *(1; 1)* і вектор $\vec{a}$ *(2; –1)*. Знайти градієнт функції в точці A та похідну в точці A в напрямі вектора $\vec{a}$.

5.48. Задано функцію $z = \ln(x^3 + y^2)$, точку A *(1; 1)* і вектор $\vec{a}$ *(–2; 1)*. Знайти градієнт функції в точці A та похідну в точці A в напрямі вектора $\vec{a}$.

5.49. Задано функцію $z = \arccos\left(\frac{x}{y^2}\right)$, точку A *(1; 2)* і вектор $\vec{a}$ *(12; –5)*. Знайти градієнт функції в точці A та похідну в точці A в напрямі вектора $\vec{a}$.

5.50. Задано функцію $z = arctg\left(\frac{x^2}{y}\right)$, точку A *(1; 2)* і вектор $\vec{a}$ *(12; 5)*. Знайти градієнт функції в точці A та похідну в точці A в напрямі вектора $\vec{a}$.

5.51. Задано функцію $z = \ln\left(3x^2 + 4y^2\right)$, точку A *(1; 3)* і вектор $\vec{a}$ *(3; 4)*. Знайти градієнт функції в точці A та похідну в точці A в напрямі вектора $\vec{a}$.

5.52. Задано функцію $z = \ln\left(3x + y^2\right)$, точку A *(2; 3)* і вектор $\vec{a}$ *(3; –4)*. Знайти градієнт функції в точці A та похідну в точці A в напрямі вектора $\vec{a}$.

5.53. Задано функцію $z=\dfrac{\ln x}{y^2}$, точку *A (1; –2)* і вектор $\vec{a}$ *(6; –8)*. Знайти градієнт функції в точці *A* та похідну в точці *A* в напрямі вектора $\vec{a}$.

5.54. Задано функцію $z=\dfrac{\ln x}{2y}$, точку *A (1; 2)* і вектор $\vec{a}$ *(6; 8)*. Знайти градієнт функції в точці *A* та похідну в точці *A* в напрямі вектора $\vec{a}$.

Індивідуальне завдання

Задано функцію $y=x^n y^n-\dfrac{1}{x^{2n}y}-\dfrac{y\sqrt{x}}{n}$, точку *A (1; –1)* і вектор $\vec{a}$ *(n; –n)*. Знайти градієнт функції в точці *A* та похідну в точці *A* в напрямі вектора $\vec{a}$.

Теми рефератів

1. Частинні похідні вищих порядків.
2. Повні диференціали вищих порядків.

§5.3. Застосування функції двох змінних до знаходження наближеного значення функції.

ПРАКТИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

П р и к л а д : Для функції $z=2x^2y^2-4\sqrt{x+y}+x^5y$ обчислити наближене значення в точці *A (–0,97; 2,09)* за допомогою диференціалу.

Розв'язання:

Наближене значення функції $z=2x^2y^2-4\sqrt{x+y}+x^5y$ при $x=-0{,}97$, $y=2{,}09$ обчислимо за формулою

$$z\approx z(x_0,y_0)+\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(x_0y_0)}\cdot\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(x_0y_0)}\cdot\Delta y.$$

Нехай $x_0=-1$, $y_0=2$, тоді:

$\Delta x=x-x_0=-0{,}97-(-1)=0{,}03$; $\Delta y=y-y_0=2{,}09-2=0{,}09$.

Обчислимо значення функції в точці A_0 з координатами $x_0=-1$, $y_0=2$:

$z(x_0;y_0)=2\cdot(-1)^2\cdot 2^2-4\sqrt{-1+2}+(-1)^5\cdot 2=8-4-2=2$.

Обчислимо частинні похідні функції в точці A_0:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=4xy^2-\frac{4}{2\sqrt{x+y}}+5x^4y=4xy^2-\frac{2}{\sqrt{x+y}}+5x^4y;$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{A(-1;1)}=4\cdot(-1)\cdot 2^2-\frac{2}{\sqrt{-1+2}}+5\cdot(-1)^4\cdot 2=-16-2+10==-8;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 4x^2 y - \frac{4}{2\sqrt{x+y}} + x^5 = 4x^2 y - \frac{2}{\sqrt{x+y}} + x^5;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{A(-1;1)} = 4 \cdot (-1)^2 \cdot 2 - \frac{2}{\sqrt{-1+2}} + (-1)^5 = 8 - 2 - 1 = 5.$$

Тоді наближене значення функції:

$$z \approx z(x_0, y_0) + \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(x_0 y_0)} \cdot \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(x_0 y_0)} \cdot \Delta y = 2 + (-8) \cdot 0{,}03 + 5 \cdot 0{,}09 = 2{,}21.$$

Відповідь: $z \approx 2{,}21$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

5.55. Для функції $z = x^2 + y^2 + xy$ обчислити наближене значення в точці *A (1,02; 1,95)* за допомогою диференціалу.

5.56. Для функції $z = 2x^2 + y^2 + 3xy$ обчислити наближене значення в точці *A (1,96; -1,03)* за допомогою диференціалу.

5.57. Для функції $z = x^2 - 5y + 3xy$ обчислити наближене значення в точці *A (3,95; 1,03)* за допомогою диференціалу.

5.58. Для функції $z = x^y$ обчислити наближене значення в точці *A (0,96; 1,01)* за допомогою диференціалу.

5.59. Для функції $z = 4x - 5\sqrt{xy} + 2x^2 y^3$ обчислити наближене значення в точці *A (–2,97; 1,04)* за допомогою диференціалу.

5.60. Для функції $z = \ln(x+y)$ обчислити наближене значення в точці *A (–0,02; 1,05)* за допомогою диференціалу.

5.61. Для функції $z = \sqrt[3]{y+x}$ обчислити наближене значення в точці *A (0,03; 125,01)* за допомогою диференціалу.

5.62. Для функції $z = 4x^6 y^3 - 2\sqrt{x} + 2xy$ обчислити наближене значення в точці *A (0,97; 1,01)* за допомогою диференціалу.

5.63. Для функції $z = x^4 y^2 - 3\sqrt{y} + 2xy$ обчислити наближене значення в точці *A (–0,99; 1,05)* за допомогою диференціалу.

5.64. Для функції $z = 2x^2 y^3 - 3\sqrt{x+3} + 2y$ обчислити наближене значення в точці *A (0,98; –1,04)* за допомогою диференціалу.

5.65. Для функції $z = cos(2x+y)$ обчислити за допомогою диференціалу наближене значення в точці *A (4°; 92°)*.

5.66. Для функції $z = sin(2x+y)$ обчислити за допомогою диференціалу наближене значення в точці *A (47°; 91°)*.

5.67. Для функції $z = sin(xy)$ обчислити за допомогою диференціалу наближене значення в точці *A (3°; 32°)*.

5.68. Для функції $z = arcsin(x+xy)$ обчислити за допомогою диференціалу наближене значення в точці *A (0,03; 0,99)*.

5.69. Для функції $z = arccos\frac{x}{y}$ обчислити за допомогою диференціалу наближене значення в точці *A (4,1; 4,2)*

5.70. Для функції $z = tg(x+2y)$ обчислити за допомогою диференціалу наближене значення в точці *A (29°; 92°)*.

Індивідуальне завдання

Для функції $z = 4x^{n-10}y - \frac{n}{x^{n-10}} + x\sqrt{y} + 2xy^3$ обчислити наближене значення в точці *A (–1,001n; 1+0,001n)* за допомогою диференціалу (*n* – номер студента за списком).

Теми рефератів

1. Прикладні задачі, що зводяться до використання функцій багатьох змінних.
2. Екстремум функції двох змінних.

§5.4. Екстремум функції двох змінних

ПРАКТИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

П р и к л а д 1: Дослідити на екстремум функцію

$$z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20.$$

Розв'язання:

Знаходимо частинні похідні функції:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y + 9; \ \frac{\partial z}{\partial y} = -x + 2y - 6.$$

Розглянемо систему двох рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} 2x - y + 9 = 0 \\ 2y - x - 6 = 0 \end{cases}.$$

Розв'язком цієї системи будуть числа $x = -4$, $y = 1$. Тобто критична точка має координати $M_0(-4;1)$.

Обчислимо частинні похідні другого порядку в точці M_0:

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{M_0(-1;4)} = 2; \ C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big|_{M_0(-1;4)} = 2; \ B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\Big|_{M_0(-1;4)} = -1.$$

Тоді: $\Delta = A \cdot C - B^2 = 4 - 1 = 3$>0. Так як A>0, то існує мінімум функції в точці $M_0(-4;1)$, $z_{\min} = z(-4;1) = -1$.

П р и к л а д 2: Дослідити на умовний екстремум функцію $z = x^2 + y^2$, при $x + y = 1$.

Розв'язання:

Функція Лагранжа буде мати вигляд: $L = (x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 1)$.

Запишемо необхідні умови екстремуму:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x + \lambda = 0\,;\ \frac{\partial L}{\partial y} = 2y + \lambda = 0\,;\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x + y - 1 = 0\,.$$

Звідки отримуємо $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$. Тобто критична точка має координати $M_0\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, $\lambda = -1$.

$L = (x, y) = x^2 + y^2 - (x + y - 1)$.

Тоді частинні похідні першого та другого порядку дорівнюють:

$L'_x = 2x - 1$, $L'_y = 2y - 1$, $L''_{xx} = 2 = A$, $L''_{yy} = 2 = C$, $L''_{xy} = 0 = B$.

$\Delta = A \cdot C - B^2 = 4 > 0$. Так як A>0, то існує мінімум функції: $z_{\min} = z\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Дослідити на екстремум функції двох змінних:

5.71. $z = -800 - x^2 - y^2 + 40x + 60y$;

5.72. $z = 250 - x^2 - y^2 + 20x + 100y$;

5.73. $z = -1800 - x^2 - y^2 + 80x + 60y$;

5.74. $z = -2100 - x^2 - y^2 + 40x + 100y$;

5.75. $z = -1700 - x^2 - y^2 + 40x + 80y$;

5.76. $z = -1500 - x^2 - y^2 + 20x + 80y$;

5.77. $z = -2000 - x^2 - y^2 + 100x + 40y$;

Дослідити на умовний екстремум:

5.78. $z = x + y$; при $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{2}$;

5.79. $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, при $x + y = 2$;

5.80. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$, при $x + y + 3 = 0$.

Індивідуальне завдання

Дослідити на екстремум функції двох змінних $z = 10n - x^2 - y^2 + nx + 10ny$.

Теми рефератів

1. Заміна прямокутних координат полярними для функції двох змінних.
2. Метод найменших квадратів.

РОЗДІЛ 6. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ
§6.1. Невизначений інтеграл. Основні методи інтегрування.

ПРАКТИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

П р и к л а д: Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int\left(5x^3-\frac{1}{4}x^4+2x-1\right)dx$; б) $\int(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^5}-\frac{7}{x^3})dx$; в) $\int\cos(9x-4)dx$;

г) $\int\frac{\ln x}{x}dx$; д) $\int\ln x\cdot dx$.

Розв'язання:

Для знаходження невизначеного інтегралу користуємося таблицею інтегралів (Табл. 2 додатку).

а) $\int\left(5x^3-\frac{1}{4}x^4+2x-1\right)dx=5\int x^3dx-\frac{1}{4}\int x^4dx+2\int xdx-\int dx=$

$=\frac{5x^{3+1}}{3+1}-\frac{x^{4+1}}{4(4+1)}+\frac{2x^{1+1}}{1+1}-x+C=\frac{5x^4}{4}-\frac{x^5}{20}+x^2-x+C.$

б) $\int(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^5}-\frac{7}{x^3})dx=\int\sqrt{x}dx+\int\sqrt[3]{x^5}dx-\int\frac{7}{x^3}dx=\int x^{\frac{1}{2}}dx+\int x^{\frac{5}{3}}dx-7\int x^{-3}dx=$

$=\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+\frac{x^{\frac{5}{3}+1}}{\frac{5}{3}+1}-7\int x^{-3}dx=\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+\frac{x^{\frac{5}{3}+1}}{\frac{5}{3}+1}-7\cdot\frac{x^{-3+1}}{-3+1}+C=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+\frac{x^{\frac{8}{3}}}{\frac{8}{3}}-7\frac{x^{-2}}{-2}+C=$

$7\cdot\frac{x^{-2}}{-2}+C=\frac{2}{3}\cdot\sqrt{x^3}+\frac{3}{8}\cdot\sqrt[3]{x^8}+\frac{7}{2}\cdot\frac{1}{x^2}+C.$

в) $\int\cos(9x-4)dx=\left|\begin{array}{l}9x-4=t\\ 9dx=dt\\ dx=\frac{1}{9}dt\end{array}\right|=\int\cos t\cdot\frac{1}{9}dt=\frac{1}{9}\int\cos t\cdot dt=\frac{1}{9}\sin t+C=$

$=\frac{1}{9}\sin(9x-4)+C.$

(В даному випадку користувалися заміною змінної).

г) $\int\frac{\ln x}{x}dx=\left|\ln x=t\Rightarrow\frac{dx}{x}=dt\right|\Rightarrow\int t\cdot dt=\frac{1}{2}t^2+C=\frac{1}{2}\ln^2x+C.$

(В даному випадку користувалися заміною змінної).

д) $\int\ln xdx=\left|\begin{array}{c}\ln x=u;\frac{dx}{x}=du\\ dx=dv;x=v\end{array}\right|=x\ln x-\int x\cdot\frac{1}{x}\cdot dx=x\ln x-\int dx+C=x\cdot\ln x-x+C.$

(В даному випадку користувалися формулою інтегрування частинами: $\int u\cdot dv=u\cdot v-\int v\cdot du.$*)*

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Знайти невизначені інтеграли:

6.1. $\int (10x^2 + 2x + \frac{3}{x})dx$;

6.2. $\int (10x + \frac{1}{7} + \cos x)dx$;

6.3. $\int (\frac{1}{5}x + 5 + \cos x)dx$;

6.4. $\int (10x^5 - x + \frac{3}{x})dx$;

6.5. $\int \left(2x^7 - \frac{1}{6}x^6 - 2\right)dx$;

6.6. $\int \left(4x^2 - 7x + 2\right)dx$;

6.7. $\int (3x^2 + 4x + \frac{5}{x})dx$;

6.8. $\int (10x^4 + 12x + \sin x)dx$;

6.9. $\int (4x^3 + 2x^2 + \frac{1}{x})dx$;

6.10. $\int (\frac{1}{3}x^2 + 3x + \frac{4}{x})dx$;

6.11. $\int (\sqrt[4]{x} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^{11}}})dx$;

6.12. $\int (7x^2 + \frac{1}{\sqrt[9]{x^5}} + 6)dx$;

6.13. $\int (\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^5}})dx$;

6.14. $\int (\sqrt[7]{x} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^7}})dx$;

6.15. $\int (\sqrt[9]{x} - \frac{1}{\sqrt[7]{x^{12}}})dx$;

6.16. $\int (\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt[5]{x^6}})dx$;

6.17. $\int (\sqrt[11]{x} - \frac{1}{\sqrt[6]{x^5}})dx$;

6.18. $\int \left(3\sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{x^4} + 1\right)dx$;

6.19. $\int \left(4\sqrt[7]{x^8} + \frac{1}{3x^3} + 2\right)dx$;

6.20. $\int (\sqrt[7]{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - 2x)dx$.

Знайти невизначені інтеграли, користуючись заміною змінних:

6.21. $\int \cos(4x + 1)dx$;

6.22. $\int \frac{dx}{1 - 3x}$;

6.23. $\int e^{6-4x}dx$;

6.24. $\int 4^{\frac{x}{4}+1}dx$;

6.25. $\int \frac{dx}{\sin^2(3 - 4x)}$;

6.26. $\int \frac{dx}{(3 - 4x)^2 + 1}$;

6.27. $\int cos(8x + 3)dx$;

6.28. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 9x^2}}$;

6.29. $\int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{3}}$;

6.30. $\int \frac{dx}{3 - 8x}$;

6.31. $\int \frac{x^4}{x^5 + 1}dx$;

6.32. $\int \frac{e^x}{e^{2x} + 1}dx$;

6.33. $\int x^2\sqrt{x^3-4}dx$;

6.34. $\int \frac{1}{x\ln x}dx$;

6.35. $\int \frac{e^x}{e^x+1}dx$;

6.36. $\int \frac{\ln^2 x}{x}dx$;

6.37. $\int \frac{1}{x\ln^2 x}dx$;

6.38. $\int \frac{x^3}{x^4+1}dx$;

6.39. $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}dx$;

6.40. $\int \frac{\ln x}{x}dx$.

Знайти невизначені інтеграли, користуючись формулою інтегрування частинами.

6.41. $\int xe^x dx$;

6.42. $\int x^2\ln x dx$;

6.43. $\int (x-2)cosxdx$;

6.44. $\int (6+x)sinxdx$;

6.45. $\int \sqrt{x}\ln x dx$;

6.46. $\int \frac{\ln x}{x^2}dx$;

6.47. $\int \frac{x}{\sin^2 x}dx$;

6.48. $\int x^2 cosxdx$;

6.49. $\int (x+3)^2 e^{2x}dx$;

6.50. $\int (4-x)^2 sin5xdx$.

Індивідуальне завдання

Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int (5x^n+2x^{n-1}+\frac{n}{x^n})dx$;

б) $\int (\sqrt[n]{x}-\frac{n-1}{\sqrt[3]{x^{n+3}}}+nx)dx$;

в) $\int \frac{(n-1)dx}{\sqrt[n+1]{x+n}}$;

г) $\int (n-x)^2 e^{\frac{x}{n}}dx$.

де n – номер студента за списком.

Теми рефератів

1. Первісна функції.
2. Геометричний зміст інтегрування.

§6.2. Інтегрування виразів, що містять в знаменнику квадратний тричлен. Інтегрування раціональних дробів.

ПРАКТИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

П р и к л а д: Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{dx}{x^2+4x+8}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-6x-9x^2}}$; в) $\int \frac{2x-17}{(2x+5)(x-3)}dx$.

Розв'язання:

Для прикладів а) та б) виділимо із квадратного тричлена повний квадрат:

а) $\int \frac{dx}{x^2+4x+8}$.

$x^2+4x+8 = x^2+2\cdot 2\cdot x+2^2-2^2+8=(x+2)^2+4=(x+2)^2+2^2$. Тоді:

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+8} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+2^2} = \frac{1}{2} arctg \frac{x+2}{2} + C.$$

б) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-6x-9x^2}}$.

$2-6x-9x^2 = -(9x^2+6x-2) = -((3x)^2+2\cdot 3x+1-1-2) = -(3x+1)^2+3 =$
$= \sqrt{3}^2-(3x+1)^2$. Тоді:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2-6x-9x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\sqrt{3}^2-(3x+1)^2}} = \frac{1}{3} arcsin \frac{3x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

в) $\int \frac{2x-17}{(2x+5)(x-3)} dx$.

Нехай,

$$\frac{2x-17}{(2x+5)(x-3)} \equiv \frac{A}{2x+5} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3)+B(2x+5)}{(2x+5)(x-3)} = \frac{Ax-3A+2Bx+5B}{(2x+5)(x-3)} =$$
$$= \frac{(A+2B)x+(5B-3A)}{(2x+5)(x-3)} \Rightarrow \begin{cases} A+2B=2 \\ 5B-3A=-17 \end{cases}.$$

Розв’язавши отриману систему, маємо $A=4$, $B=-1$. Тобто дріб можна представити у вигляді суми дробів: $\frac{2x-17}{(2x+5)(x-3)} = \frac{4}{2x+5} + \frac{-1}{x-3}$. А заданий інтеграл у вигляді суми інтегралів:

$$\int \frac{2x-17}{(2x+5)(x-3)} dx = \int \frac{4dx}{2x+5} + \int \frac{-dx}{x-3} = 4\int \frac{dx}{2x+5} - \int \frac{dx}{x-3} = \frac{4}{2} \ln|2x+5| - \ln|x-3| + \ln|C| =$$
$$= \ln|2x+5|^2 - \ln|x-3| + \ln|C| = \ln\left|\frac{C(2x+5)^2}{x-3}\right|.$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Знайти невизначені інтеграли:

6.51. $\int \frac{dx}{x^2-7x+10}$;

6.52. $\int \frac{dx}{4x^2+4x+5}$;

6.53. $\int \frac{dx}{9x^2+6x+4}$;

6.54. $\int \frac{4x-1}{4x^2-4x+5} dx$;

6.55. $\int \frac{x-2}{x^2-7x+12} dx$;

6.56. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}}$;

6.57. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-6x-9x^2}}$;

6.58. $\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$.

6.59. $\int \frac{5x-7}{(x+1)(x-2)}dx$;

6.60. $\int \frac{21-x}{(x-5)(x+3)}dx$;

6.61. $\int \frac{17x+13}{(2x+1)(3x+2)}dx$;

6.62. $\int \frac{x+3}{(2x-1)(3x+2)}dx$

6.63. $\int \frac{3x-4}{x^2-x}dx$;

6.64. $\int \frac{x-9}{x^2+6x+5}dx$;

6.65. $\int \frac{-14x-18}{(x+1)(x+2)(x-3)}dx$;

6.66. $\int \frac{x^2+5x+8}{(x+4)(x+3)}dx$;

6.67. $\int \frac{2x^2-4x+1}{x(5x-1)}dx$;

6.68. $\int \frac{2x^2+x-4}{x(x+2)}dx$.

Індивідуальне завдання

Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{dx}{x^2+nx+2n}$;

б) $\int \frac{nx+5}{(x+n)(nx-2)}dx$;

де n – номер студента за списком.

Теми рефератів

1. Розклад многочленна на множники.
2. Обчислення сталої інтегрування за заданими умовами.

§6.3. Інтегрування деяких тригонометричних виразів.

ПРАКТИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

П р и к л а д: Знайти інтеграли:

а) $\int sin3xcos7xdx$;

б) $\int \frac{dx}{2sinx-cosx}$;

в) $\int sin^2xdx$;

г) $\int sin^3xcos^2xdx$.

Розв'язання:

а) $\int sin3xcos7xdx = \frac{1}{2}\int (sin(3-7)x + sin(3+7)x)dx = \frac{1}{2}\int (sin(-4)x + sin10x)dx =$

$= -\frac{1}{2}\int sin4xdx + \int sin10xdx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}cos4x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10}cos10x + C = \frac{1}{8}cos4x - \frac{1}{20}cos10x +$
$+C$;

б) Використаємо універсальну тригонометричну підстановку $t = tgx$. Звідки $sinx = \frac{2t}{1+t^2}$, $cosx = \frac{1-t^2}{1+t^2}$; $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$. Тоді:

$$\int \frac{dx}{2sinx - cosx} = \int \frac{\frac{2dx}{1+t}}{2\frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{\frac{2dx}{1+t}}{\frac{4t-1+t^2}{1+t^2}} = 2\int \frac{dt}{t^2+4t-1} = 2\int \frac{dt}{(t+2)^2 - 5} =$$

$$= 2\frac{1}{2\sqrt{5}} \ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}+2-\sqrt{5}}{tg\frac{x}{2}+2+\sqrt{5}}\right| + C = \frac{1}{\sqrt{5}} \ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}+2-\sqrt{5}}{tg\frac{x}{2}+2+\sqrt{5}}\right| + C;$$

в) $\int sin^2 xdx = \int \frac{1}{2}(1-cos2x)dx = \frac{1}{2}\left(\int dx - \int cos2xdx\right) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}sin2x\right) + C = \frac{x}{2} -$

$= \frac{x}{2} - \frac{sin2x}{4} + C$;

г) $\int sin^3 xcos^2 xdx = \int sin^2 xsinxcos^2 xdx = \int \left(1-cos^2 x\right)\cdot cos^2 xd(cosx) =$

$= \int cos^2 xd(cosx) - \int cos^4 xd(cosx) = \frac{sin^3 x}{3} - \frac{sin^4 x}{4} + C$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Знайти невизначені інтеграли:

6.69. $\int sin2xsin\frac{2x}{3}dx$;

6.70. $\int sin6xcos2xdx$;

6.71. $\int cos\frac{x}{2}cos\frac{x}{3}dx$;

6.72. $\int sin3xsin5xdx$;

6.73. $\int sin5xsin2xdx$;

6.74. $\int cos5xcos2xdx$;

6.75. $\int sin2xcos5xdx$;

6.76. $\int cosxcos3xdx$;

6.77. $\int \frac{dx}{sinx}$;

6.78. $\int \frac{dx}{5+4sinx}$;

6.79. $\int \frac{dx}{2+3cosx}$;

6.80. $\int \frac{dx}{3sinx+2cosx+1}$;

6.81. $\int \frac{dx}{1+cosx}$;

6.82. $\int \frac{dx}{2+sinx}$;

6.83. $\int sin^2 2xdx$;

6.84. $\int cos^2 4xdx$;

6.85. $\int cos^4 xdx$;

6.86. $\int sin^3 2xdx$;

6.87. $\int cos^5 xdx$;

6.88. $\int \frac{cos^3 x}{sin^4 x}dx$;

6.89. $\int \frac{sin^3 x}{cos^2 x}dx$;

6.90. $\int sin^4 xcos^3 xdx$;

6.91. $\int sin^3 xcos^3 xdx$;

6.92. $\int sin^5 xcos^4 xdx$.

Індивідуальне завдання

Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int sin(n+1)xsin(n+3)xdx$; б) $\int sin^n xcos^{n+1}xdx$;

де n – номер студента за списком.

Теми рефератів

1. Розв'язування інтегралів виду $R(sin^2 x, cos^2 x)dx$.
2. Розв'язування інтегралів виду $R(tgx, ctgx)dx$.

§6.4. Визначений інтеграл. Формула Ньютона-Лейбніца.

ПРАКТИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

П р и к л а д: Знайти інтеграли:

а) $\int_{-1}^{7}\frac{dx}{\sqrt{3x-4}}$; б) $\int_{2}^{5}\frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$;

в) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{2+cosx}$; г) $\int_{0}^{1}arcsinxdx$.

Розв'язання:

а) $$\int_{-1}^{7}\frac{dx}{\sqrt{3x-4}}=\int_{-1}^{7}(3x+4)dx=\frac{1}{3}\frac{(3x+4)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\Bigg|_{-1}^{7}=\frac{2}{3}\sqrt{3x+4}\Bigg|_{-1}^{7}=\frac{2}{3}\left(\sqrt{25}-\sqrt{1}\right)=2\frac{2}{3};$$

б) $$\int_{2}^{5}\frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}=\int_{2}^{5}\frac{dx}{9-(x-2)^2}=arcsin\frac{x-2}{3}\Bigg|_{2}^{5}=arcsin1-arcsin0=\frac{\pi}{2};$$

в) Скористаємося універсальною тригонометричною підстановкою $t=tgx$. Знайдемо $cosx=\frac{1-t^2}{1+t^2}$; $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$ і нові межі інтегрування $t_1=0$ при $x_1=0$, та $t_2=1$ при $x_2=\frac{\pi}{2}$. Тоді:

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{2+cosx}=\int_{0}^{1}\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}=2\int_{0}^{1}\frac{dt}{t^2+3}=\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{t}{\sqrt{3}}\Bigg|_{0}^{1}=\frac{2}{\sqrt{3}}\,arctg\frac{1}{\sqrt{3}}-$$

$$-\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{6}-\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot 0=\frac{\pi}{3\sqrt{3}};$$

г) Виконаємо інтегрування частинами:

$$\int_0^1 arcsinxdx = \left| \begin{matrix} u = arcsinx, & dv = dx \\ du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, & v = x \end{matrix} \right| = xarcsinx\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = 1 \cdot arcsin1 -$$

$$0 \cdot arcsin0 + \sqrt{1-x^2}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1.$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Знайти визначені інтеграли:

6.93. $\int_{-2}^{3} \left(2x^3 + x^2 - 5\right)dx$;

6.94. $\int_{-2}^{2} \left(x^3 + 4x\right)dx$;

6.95. $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3}$;

6.96. $\int_{2}^{-13} \frac{dx}{\sqrt[5]{(3-x)^4}}$;

6.97. $\int_{4}^{9} \frac{(x-1)dx}{\sqrt{x}+1}$;

6.98. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2+4x+5}$;

6.99. $\int_{2}^{3} \frac{xdx}{x^2+1}$;

6.100. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{cos^2 x}$;

6.101. $\int_{0}^{2} \frac{x+3}{x^2+4}dx$;

6.102. $\int_{1}^{2} \frac{xdx}{x^2+5x+4}$;

6.103. $\int_{0}^{\pi} sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2}dx$;

6.104. $\int_{0}^{\pi} cos\frac{3x}{2}cos\frac{x}{2}dx$;

6.105. $\int_{-0,5}^{1} \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}$;

6.106. $\int_{0}^{\sqrt{3}-1} \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$;

6.107. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+cosx}$;

6.108. $\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{sin\frac{1}{x}dx}{x^2}$;

6.109. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{sinxdx}{cos^2 x}$;

6.110. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} sin^2 xdx$;

6.111. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{cosx - cos^3 x}dx$;

6.112. $\int_{2}^{3} \frac{dx}{2x^2+3x-2}$.

6.113. $\int_{1}^{2} x\ln xdx$;

6.114. $\int_{0}^{1} xe^{-x}dx$;

6.115. $\int_{1}^{2} x\ln(x+1)dx$;

6.116. $\int_{0}^{1} x^2e^{-2x}dx$;

6.117. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2-1)sin2xdx$; **6.118.** $\int_0^{\frac{\pi}{3}} xcosxdx$.

Індивідуальне завдання

Знайти визначені інтеграли:

а) $\int_{-1}^{1} \left(2x^{n-10}+x^{n-2}-3e^{nx}\right)dx$; б) $\int_{1-n}^{1} \frac{(2x+n)dx}{x^2+nx+n}$;

де n – номер студента за списком.

Теми рефератів

1. Економічний зміст визначеного інтегралу
2. Застосування визначеного інтегралу до знаходження середнього часу, затраченого на виготовлення виробу.

§6.5. Геометричне застосування визначеного інтегралу.

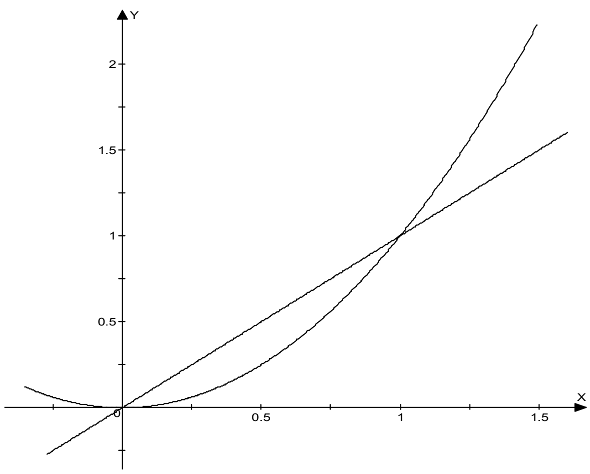
ПРАКТИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

П р и к л а д: За допомогою визначеного інтеграла знайти площу фігури, обмежену лініями $y=x^2,\ \ y=x$. Зобразити фігуру в системі координат.

Розв'язання:

Побудуємо фігуру, площу якої необхідно знайти та визначимо площу обмеженої кривими фігури. Точки перетину кривих $x=0$ та $x=1$, тому межі інтегрування: від 0 до 1:

$$S=\int_0^1 xdx-\int_0^1 x^2dx=\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1-\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}(кв.од.)$$



ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Обчислити площу фігур, що обмежені лініями. Зробити малюнки:

6.119. Параболою $y=x^2$ і прямою $y=x$.

6.120. Параболою $y=x^2-4$ і прямою $y=1$.

6.121. Параболою $y = x^2 - 4x$ і прямою $y = 0$.

6.122. Параболою $y = x^2 - 4x + 4$ і прямою $y = 4$.

6.123. Параболою $y = 4 - x^2$ і прямою $y = 1$.

6.124. Параболою $y = 2x - \frac{1}{4}x^2$ і прямою $4y = x + 6$.

6.125. Параболою $y = x^2 - 2$ і прямою $y = x$.

6.126. Параболою $y = 2x^2$ з прямими $x = 1$, $x = 2$ та віссю Ox.

6.127. Прямою $x = 4$, параболою $y = 3x^2 - 6x$ і віссю Ox на відрізку $[0;4]$.

6.128. Параболою $y = (x+2)^2$, прямою $y = 4 - x$ та віссю Ox.

6.129. Гіперболою $xy = 3$ і прямою $x + y = 4$.

6.130. Параболами $x^2 - 3y = 4$ і $x^2 + y = 8$.

6.131. Параболою $y = 5x - 2x^2$ та прямою $y = 2x - 2$.

6.132. Параболами $x = 4 - y^2$ і $x = y^2 - 2y$.

6.133. Параболами $x = 8 - y^2$ і $x = y^2$.

6.134. Параболою $x = 2y^2 + 6y$ і прямою $x - y + 2 = 0$.

Індивідуальне завдання

Обчислити площу фігури, що обмежена параболою $y = n - (x-1)^2$ і прямою $y = n - 4$ (n – номер студента за списком). Зробити малюнок.

Теми рефератів

1. Наближені обчислення визначеного інтеграла: формула прямокутників та формула трапецій.
2. Наближені обчислення визначеного інтеграла: формула Сімпсона.

РОЗДІЛ 7. ДИФЕРЕНЦІЙНІ РІВНЯННЯ

§7.1. Рівняння з відокремлюваними змінними.

ПРАКТИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

П р и к л а д: Розв'язати диференціальні рівняння:

а) $xdx + ydy = 0$; б) $\sqrt{x}y' = y^2x^3$.

Розв'язання:

а) $xdx + ydy = 0$.

В заданому рівнянні змінні відокремлені. Інтегруючи обидві частини рівняння одержимо: $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = \frac{C}{2}$, або $x^2 + y^2 = C$ – загальний розв'язок рівняння.

б) $\sqrt{x}y' = y^2x^3$.

Так як $y' = \frac{dx}{dy}$, то рівняння набуватиме виду: $\sqrt{x}\frac{dx}{dy} = y^2x^3$.

Відокремимо змінні, помноживши ліву та праву частину виразу на $\frac{dy}{x^3}$, тобто:

$$\frac{\sqrt{x}}{x^3}dx = y^2dy,$$

Дане рівняння є рівнянням з відокремленими змінними: $x^{-\frac{5}{2}}dx = y^2dy$. Інтегруючи обидві частини рівняння одержимо:

$$\int x^{-\frac{5}{2}}dx = \int y^2dy,$$

$$\frac{x^{-\frac{3}{2}}}{-\frac{3}{2}} + C = \frac{y^3}{3} \Rightarrow y = \sqrt[3]{C - \frac{2}{x\sqrt{x}}}$$ – загальний розв'язок рівняння.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь:

7.1. $y' = e^{-2x}$; **7.2.** $y' = sin5x$;

7.3. $y' = \frac{1}{x^2+4}$; **7.4.** $y' = \frac{1}{sin^2 2x}$;

7.5. $\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y^2}$ **7.6.** $y' = e^{x+y}$

7.7. $y' = \sqrt[3]{x^5y^2}$; **7.8.** $y' = y\sqrt[4]{xy}$;

7.9. $\sqrt{x^3}y' = y^2x$; **7.10.** $\sqrt[3]{x}y' = y^2$;

7.11. $\sqrt{xy}\,y' = y^2$;

7.12. $y' = y\sqrt[5]{x^3y^2}$;

7.13. $y' = y\sqrt[3]{xy^2}$

7.14. $\sqrt[3]{x}\,y' = \sqrt[4]{y}\,x$

7.15. $y' = y\sqrt[4]{x^3y}$;

7.16. $y' = \sqrt[3]{x^8y}$;

7.17. $x\sqrt{1+y^2}\,dx + y\sqrt{1+x^2}\,dy + 0$;

7.18. $xyy' = 1 - x^2$;

7.19. $y' = 10^{2x+y}$;

7.20. $y' = (2y+1)ctgx$.

Індивідуальне завдання

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

а) $y' = \dfrac{x^n}{e^{2n-3y}}$;

б) $\sqrt[n]{x}\,y' = y^{n-2}$;

де n – номер студента за списком.

Теми рефератів

1. Геометричний зміст диференціального рівняння першого порядку.
2. Частинний і загальний розв'язок диференціального рівняння першого порядку.

§7.2. Однорідні диференційні рівняння.

ПРАКТИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

П р и к л а д: Розв'язати диференціальне рівняння: $y' = \dfrac{y}{x} + tgx$.

Розв'язання:

Дане рівняння є однорідним, тому скористаємося заміною $y = xu$, тоді похідна $y' = u + xu'$. Підставимо покладену заміну у задане рівняння:

$u + xu' = \dfrac{xu}{x} + tg\dfrac{xu}{x}$, або $u + xu' = u + tgu$;

$ctgudu = \dfrac{dx}{x}$ – рівняння є диференційним з відокремлюваними змінними.

Інтегруючи обидві частини рівняння одержимо:

$\ln|sinu| = \ln|x| + \ln C$;

$\ln|sinu| = \ln|Cx|$;

$sinu = Cx \Rightarrow u = arcsin(Cx)$.

Так як $y = xu$, то $y = xarcsin(Cx)$ – загальний розв'язок рівняння.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Розв'язати диференціальні рівняння:

7.21. $(x+y)dx - (x-y)dy = 0$;

7.22. $xdx - ydy = ydy$;

7.23. $\left(x^2+xy+y^2\right)dx = x^2dy$;

7.24. $xy' = y+\sqrt{y^2-x^2}$;

7.25. $xy' = y\ln\frac{y}{x}$;

7.26. $y' = \frac{y^2}{x^2}-2$;

7.27. $y' = \frac{2xy}{x^2-y^2}$;

7.28. $y' = \frac{y}{x}+\frac{x}{y}$;

7.29. $xy'-y=\sqrt{y^2+x^2}$;

7.30. $y^2+x^2y' = xyy'$.

Індивідуальне завдання

Розв'язати диференціальне рівняння:
$\left(x^n+y^n\right)dx-\left(x^n-y^n\right)dy=0$, де n – номер студента за списком.

Теми рефератів

1. Розв'язування фізичних задач за допомогою диференційних рівнянь.
2. Теорема Коші про існування та єдність розв'язку диференціального рівняння першого порядку.

§7.3. Лінійні диференційні рівняння.

ПРАКТИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

П р и к л а д: Розв'язати диференціальне рівняння: $y' = 2y + x$.

Розв'язання:

Дане рівняння є лінійним, так як y і y' у однаковому степені (першому). Тому скористаємося заміною $y = uv$ і $y' = u'v + uv'$. Тоді:

$u'v + uv' = 2uv + x$,

$v(u'+2u) = x - uv'$,

$$\begin{cases} u' + 2u + 0, \\ x - uv' = 0, \end{cases}$$

Розв'яжемо окремо перше рівняння системи:

$u' + 2u = 0$,

$\frac{du}{dx} + 2u = 0, \quad \Big| \cdot \frac{dx}{u}$,

$\frac{du}{u} + 2dx = 0$,

$\int \frac{du}{u} + 2\int dx = 0$,

$\ln u + 2x = 0 \Rightarrow u = e^{-2x}$.

Отриманий вираз підставимо в друге рівняння системи:

$x - uv' = 0 \Rightarrow x - e^{-2x}v' = 0$,

$$x - e^{-2x} \cdot \frac{dv}{dx} = 0, \quad \Bigg| \cdot \frac{dx}{e^{-2x}},$$

$xe^{2x}dx - dv = 0$,

$\int xe^{2x}dx - \int dv = 0$.

Обчислимо частинами перший інтеграл:

$$\int xe^{2x}dx = \begin{vmatrix} u = x & dv = e^{2x}dx \\ du = dx & \frac{e^{2x}}{2} = v \end{vmatrix} = \frac{xe^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2}x}{2}dx = \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C.$$

Тоді, $\frac{xe^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C = v$.

З поставленої умови: $y = uv = e^{-2x}(\frac{xe^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C) = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} + \frac{C}{e^{2x}}$ – загальний розв'язок диференціального рівняння.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Розв'язати диференціальні рівняння:

7.31. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$;

7.32. $xy' = y\ln y$;

7.33. $xy' - 2y = 2x^4$;

7.34. $(2x+1)y' = 4x + 2y$;

7.35. $y' + y = x$;

7.36. $(xy + e^x)dy - xdy = 0$;

7.37. $x^2y' + xy + 1 = 0$;

7.38. $y = x(y' - xcosx)$;

7.39. $2y = x(xy' - 1)\ln x$;

7.40. $y' - y = e^x$.

Індивідуальне завдання

Розв'язати диференціальне рівняння:

$y' - \frac{y}{n} = e^{nx}$, де n – номер студента за списком.

Теми рефератів

1. Економічні задачі, що зводяться до диференційних рівнянь.
2. Системи лінійних диференційних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

РОЗДІЛ 7. РЯДИ

§ 8.1. Ряд геометричної прогресії. Необхідна умова збіжності ряду.

ПРАКТИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

П р и к л а д 1: Обчислити суму заданого ряду:

а) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots$; б) $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{3\cdot 2^{n-1}}+\ldots$.

Розв'язання:

а) Для знаходження суми ряду $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots$ скористаємося тотожністю: $\frac{1}{k\cdot(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$. Тоді сума може бути представлена у вигляді: $S=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$.

Тоді $\lim\limits_{x\to\infty}S=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$. Тобто ряд збігається і його сума дорівнює 1.

б) Для ряду $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{3\cdot 2^{n-1}}+\ldots$ винесемо спільний множник $\frac{1}{3}$ за дужки: $\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots\right)$. В дужках одержали ряд, що являє собою нескінченну прогресію, знаменник якої $q=\frac{1}{2}$. Тоді $S=\frac{b_1}{1-q}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$. Отже, сума заданого ряду $S=\frac{1}{3}\cdot 2=\frac{2}{3}$.

П р и к л а д 2: Чи виконується необхідна ознака збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n^2+1}$.

Розв'язання:

Знайдемо границю загального члена $U_n=\frac{2n}{n^2+1}$ при необмеженому зростанні його номера *n*: $\lim\limits_{x\to\infty}U_n=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2n}{n^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{2n}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}}=\frac{0}{1}=0$.

Отже, необхідна умова збіжності $\lim\limits_{x\to\infty}U_n=0$ виконується.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Записати можливий загальний член ряду:

8.1. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots;$

8.2. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots;$

8.3. $\frac{1}{10}+\frac{2}{100}+\frac{3}{1000}+\frac{4}{10000}+\ldots;$

8.4. $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\ldots;$

8.5. $sin\alpha+\frac{sin2\alpha}{2}+\frac{sin3\alpha}{3}+\frac{sin4\alpha}{4}+\ldots;$

8.6. $cos\alpha+\frac{cos2\alpha}{2}+\frac{cos3\alpha}{6}+\frac{cos4\alpha}{24}+\ldots;$

8.7. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 9}+\ldots;$

8.8. $\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{9\cdot 7}+\frac{1}{14\cdot 11}+\ldots;$

8.9. $1{,}1-1{,}02+1{,}003-1{,}0004+\ldots$

8.10. $1+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}+\ldots;$

Обчислити суму заданого ряду:

8.11. $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots;$

8.12. $3-\frac{3}{2}+\frac{3}{4}-\frac{3}{8}+\frac{3}{16}-\ldots;$

8.13. $1{,}1-1{,}02+1{,}003-1{,}0004+\ldots;$

8.14. $\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\frac{1}{10000}+\ldots;$

8.15. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\ldots;$

8.16. $1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27}+\frac{16}{81}+\ldots;$

8.17. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots;$

8.18. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots;$

8.19. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots$

8.20. $3-\frac{1}{2\cdot 1}+\frac{1}{3\cdot 2}+\frac{1}{4\cdot 3}+\ldots;$

Перевірити, чи виконується необхідна ознака збіжності рядів:

8.21. $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}+\frac{6}{7}+\ldots+\frac{2n}{2n+1};$

8.22. $1+\frac{3}{4}+\frac{5}{9}+\ldots+\frac{2n-1}{n^2};$

8.23. $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{10}+\ldots+\frac{n}{1+n^2};$

8.24. $\frac{1}{1001}+\frac{2}{2001}+\ldots+\frac{n}{1000n+1};$

8.25. $\sqrt{2}+\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{4}{3}}+\ldots+\sqrt{\frac{n+1}{n}};$

8.26. $\frac{1}{2}+\frac{1}{9}+\frac{1}{28}+\ldots+\frac{1}{1+n^3};$

8.27. $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2n+1};$

8.28. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2n-1};$

8.29. $\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}$

8.30. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\ldots+\frac{1}{n+n!};$

Індивідуальне завдання

1. Обчислити суму заданого ряду:

$$\frac{1}{N\cdot(N+1)}+\frac{1}{(N+1)\cdot(N+2)}+\frac{1}{(N+2)\cdot(N+3)}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}+\ldots$$

2. Перевірити виконання необхідної ознаки збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Nn}{n^N+1}$, де N – номер студента за списком.

Теми рефератів

1. Найпростіші дії над рядам.
2. Множення рядів.

§ 8.2. Ознаки збіжності рядів.

ПРАКТИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

П р и к л а д: Дослідити ряди на збіжність:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2^n}$; б) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^n n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(2n-3)^2}}$.

Розв'язання:

а) Дослідимо заданий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2^n}$ на збіжність за ознакою Даламбера. Для цього обчислимо границю:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(n+1)^3}{2^{n+1}}:\frac{n^3}{2^n}\right)=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(n+1)^3}{n^3}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}<1.$$

Отже, ряд збігається.

б) Для дослідження ряду $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^n n}$ використаємо радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt[n]{U^n}=\lim_{x\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{\ln^n n}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\ln n}=0<1.$$

Отже, ряд збігається.

в) Для дослідження ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(2n-3)^2}}$ використаємо радикальну ознаку Коші. Маємо $f(x)=\frac{1}{(2x-3)^{\frac{2}{3}}}$. Знайдемо невласний інтеграл:

$$\int_2^{\infty}\frac{dx}{(2x-3)^{\frac{2}{3}}}=\lim_{b\to\infty}\int_2^{b}\frac{dx}{(2x-3)^{\frac{2}{3}}}=\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot 3(2x-3)^{\frac{1}{3}}\right)\Bigg|_2^b=\frac{3}{2}\,(\lim_{b\to\infty}\sqrt[3]{2b-3}-1)=\frac{3}{2}\cdot\infty=\infty.$$

Невласний інтеграл розбігається. Отже, розбігається і заданий ряд.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Користуючись ознакою Даламбера, дослідити на збіжність ряди:

8.31. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$;

8.32. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2^n(2n+1)}$;

8.33. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n}$;

8.34. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$;

8.35. $\sum_{n=1}^{\infty} ntg\frac{\pi}{2^{n+1}}$;

8.36. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{2^n\cdot n!}$;

8.37. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 sin\frac{\pi}{2^n}$;

8.38. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(2n)!}$;

Користуючись ознакою радикальною ознакою Коші, дослідити на збіжність ряди:

8.39. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$;

8.40. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$;

8.41. $\sum_{n=1}^{\infty} sin^n\frac{\pi}{2^n}$;

8.42. $\sum_{n=1}^{\infty} arctg^n\frac{1}{n}$.

Користуючись ознакою інтегральною ознакою Коші, дослідити на збіжність ряди:

8.43. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3+n^2}$;

8.44. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n\ln^2 n}$;

8.45. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$;

8.46. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}$;

8.47. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3+n^2}$;

8.48. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n\ln n}$.

Індивідуальне завдання

Дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Nn-N}{N^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{Nn+1}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(Nn+1)(Nn+3)}$;

Де N – номер студента за списком.

Теми рефератів

1. Степеневі ряди
2. Застосування рядів до наближених обчислень.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ:

1. Шеченко Р.Л. Основи вищої математики. − Біла Церква, 2005.

2. Валєєв К.Г., Джалладова І.А. Вища математика, ч. І. − К., 2001.

3. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. − М.: Физматгиз, 1959.

4. Натансон И.П. Краткий курс высшей математики. − М.: Физматгиз, 1963.

5. Барковський В.В., Барковська Н.В. Математика для економістів. − К., 1999.

6. Маркович Э.С. Курс высшей математики с элементами теории вероятностей и математической статистики. − М.: Физматгиз, 1972.

7. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. − М.: Наука, 1986.