МІНІСТЕРСТВО АГРАРНОЇ ПОЛІТИКИ УКРАЇНИ

БІЛОЦЕРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

О.П. Мельниченко

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Конспекти лекцій та практичних занять для студентів денної та заочної форми навчання агрономічного факультету

Біла Церква 2011

УДК 517(075.8)

Затверджено методичною
комісією університету
Протокол № 1 від 16.09.2010р.

Мельниченко О.П. **Вища математика:** Конспекти лекцій та практичних занять для студентів денної та заочної форми навчання агрономічного факультету − Біла Церква.– 2011.– 66с.

Методичні рекомендації включають задачі і приклади до основних розділів вищої математики відповідно до програми загального курсу вищої математики для студентів агрономічного профілю денної форми навчання. Наведено необхідний довідковий матеріал, розв'язування типових прикладів та задач, набори завдань для самостійної роботи студентів.

Рецензент: кандидат фіз.-мат. наук Трофимчук М.І.

ЗМІСТ

ЛЕКЦІЯ 1.

Матриці та дії над ними

1. Поняття матриці.
2. Дії над матрицями.

1. Поняття матриці

Нехай задано множину чисел, розміщених у вигляді квадратної таблиці:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{або} \quad A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

Таку впорядковану множину називають матрицею *(m*x*n)*. Поняття матриці вперше ввели англійські математики У. Гамільтон і Д. Келі. Коротко матрицю позначають так: $A = (a_{ij})_{mn}$, або $A = \|a_{ij}\|_{mn}$. В цьому записі вказується кількість рядків i та стовбців j матриці.

Озн. Матрицею називається упорядкована по рядках та стовпцях таблиця елементів: букв, чисел, функцій тощо. Так, наприклад, сторінка газети є матрицею, оскільки вона має рядки тексту і стовпці у вигляді колонок тексту.

Матриці позначають великими латинськими літерами *A, B, C* тощо.

Числа a_{ij} називають елементами матриці.

Добуток числа рядків m на число стовбців n називають розміром матриці і позначають $m\text{x}n$.

Матриці мають однакові розміри, якщо у них однакова кількість рядків і стовбців.

Озн. Матриці *A* та *B* називають рівними між собою, якщо вони мають однакові розміри, а їх елементи, що знаходять на однакових місцях, рівні між собою. При цьому пишуть $A = B$.

Озн. Квадратною називають таку матрицю $A = (a_{ij})_{mn}$, в якій $m = n$, тобто кількість рядочків дорівнює кількості стовпчиків.

Наприклад, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Озн. Діагональною називають матрицю, по головній діагоналі якої розташовані елементи a_{ij}, а інші елементи є нулями, тобто $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}$.

Озн. Одиничною називають діагональну матрицю, по головній діагоналі якої розташовані одиниці, тобто $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Озн. Нульовою називають матрицю, всі елементи якої нулі: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

Властивість: Якщо до заданої матриці *A* додати нульову, то отримаємо задану матрицю *A*.

2. Дії над матрицями

Нехай задано матриці *A* та *B*: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -11 & 4 & 5 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Сума матриць.

Операція додавання матриць вводиться тільки для матриць однакового розміру. Сумою матриць $A = (a_{ij})_{mn}$ та $B = (b_{ij})_{mn}$ називається матриця $C = (c_{ij})_{mn}$, де $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. При цьому записують $C = A + B$.

<u>Приклад</u>:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+0 & -2+1 & 0+0 \\ 3+(-11) & 5+4 & -3+5 \\ 2+(-3) & 0+(-1) & -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -8 & 9 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Властивість: Для довільних матриць *A*, *B* та *C* однакових розмірів справджуються рівності: $A + B = B + A$; $(A + B) + C = A + (B + C)$.

2. Добуток матриці на число.

Добутком матриці $A = (a_{ij})_{mn}$ на число λ називається матриця $C = (c_{ij})_{mn}$, де $c_{ij} = \lambda a_{ij}$. При цьому записують $C = \lambda A$.

Приклад:

$$-4 \cdot A = \begin{pmatrix} -4\cdot 1 & -4\cdot(-2) & -4\cdot 0 \\ -4\cdot 3 & -4\cdot 5 & -4\cdot(-3) \\ -4\cdot 2 & -4\cdot 0 & -4\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 8 & 0 \\ -12 & -20 & 12 \\ -8 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Віднімання матриць.

Різницю матриць *А* та *В* розглядають, як суму матриць *А* та *–В*, при чому матриця *–В* утворена множенням матриці *В* на *–1*.

Властивості додавання та множення на число:

Для довільних матриць *А*, *В* однакових розмірів та довільних чисел μ і λ справджуються рівності:

1) $A + B = B + A$ – комутативність відносно додавання матриць;

2) $(A + B) + C = A + (B + C)$ – асоціативність відносно додавання матриць;

3) $A + 0 = A$; $A - A = 0$ – роль нульової матриці в діях над матрицями така, як числа нуль в діях над числами;

4) $(\lambda \cdot \mu)\cdot A = \lambda \cdot (\mu \cdot A)$ – асоціативність відносно множення чисел;

5) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ – дистрибутивність множення на число відносно додавання матриць;

6) $(\lambda + \mu)\cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$ – дистрибутивність множення на матрицю відносно додавання чисел.

4. Добуток матриць.

Операція множення матриць вводиться лише для узгоджених матриць.

Озн. Матриця називається узгодженою, якщо кількість стовпців першої дорівнює кількості рядків другої.

Якщо ця умова не виконується, тобто матриці неузгоджені, то множення таких матриць неможливе.

З узгодженості матриці *А* з матрицею *В* випливає узгодженість матриці *В* з матрицею *А*. Квадратні матриці одного порядку взаємно узгоджені.

Добутком матриці $A = (a_{ij})_{mn}$ на матрицю $B = (b_{ij})_{ns}$ називається матриця $C = (c_{ij})_{mn}$, де $c_{ij} = \overline{a_i} \cdot \overline{b_j}$ ($\overline{a_i}$ – *і-й* рядок першої матриці, $\overline{b_j}$ – *j-й* стовбець другої матриці). Тобто, щоб визначити елемент c_{24}, що стоїть в другому рядку і четвертому стовбці матриці $C = AB$, потрібно знайти суму добутків елементів другого рядка матриці A на відповідні елементи четвертого стовпці матриці B. При цьому записують $C = A \cdot B$.

Приклад:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -11 & 4 & 5 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + (-2) \cdot (-11) + 0 \cdot (-3) & 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 4 + 0 \cdot (-1) & 1 \cdot 0 + (-2) \cdot 5 + 0 \cdot 2 \\ 3 \cdot 0 + 5 \cdot (-11) + (-3) \cdot (-3) & 3 \cdot 1 + 5 \cdot 4 + (-3) \cdot (-1) & 3 \cdot 0 + 5 \cdot 5 + (-3) \cdot 2 \\ 2 \cdot 0 + 0 \cdot (-11) + (-1) \cdot (-3) & 2 \cdot 1 + 0 \cdot 4 + (-1) \cdot (-1) & 2 \cdot 0 + 0 \cdot 5 + (-1) \cdot 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 22 & -7 & -10 \\ -46 & 26 & 19 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Перевіримо чи справджується переставний закон множення для матриць:

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -11 & 4 & 5 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 & 0 \cdot (-2) + 1 \cdot 5 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot (-3) + 0 \cdot (-1) \\ -11 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 2 & -11 \cdot (-2) + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 0 & -11 \cdot 0 + 4 \cdot (-3) + 5 \cdot (-1) \\ -3 \cdot 1 - 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 & -3 \cdot (-2) - 1 \cdot 5 + 2 \cdot 0 & -3 \cdot 0 - 1 \cdot (-3) + 2 \cdot (-1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 5 & -3 \\ 11 & 42 & -17 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отже, переставний закон множення для матриць не справджується $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Властивості множення матриць:

Для довільних матриць A, B однакових розмірів та довільних чисел μ і λ справджуються рівності:

1) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ – асоціативність відносно множення матриць;

2) $A \cdot 0 = 0 \cdot A = 0$ – роль нульової матриці в діях над матрицями така, як числа нуль в діях над числами;

3) $(\lambda \cdot A) \cdot B = A \cdot (\lambda \cdot B) = \lambda \cdot (B \cdot A)$ – асоціативність відносно множення матриць і числа;

4) $C\cdot(A+B)=C\cdot A+C\cdot B$; $(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$ – дистрибутивність множення відносно додавання матриць;

6) $A\cdot E=E\cdot A=A$ – роль одиничної матриці в діях над матрицями така, як одиниці в діях над числами;

5. Піднесення матриці до степеня.

Піднесення матриці до степеня *n* розглядають, як множення матриці саму на себе *n* раз.

Приклад:

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1&-2&0\\3&5&-3\\2&0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-2&0\\3&5&-3\\2&0&-1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot1-2\cdot3+0\cdot2 & 1\cdot(-2)-2\cdot5+0\cdot0 & 1\cdot0-2\cdot(-3)+0\cdot(-1)\\ 3\cdot1+5\cdot3-3\cdot2 & 3\cdot(-2)+5\cdot5-3\cdot0 & 3\cdot0+5\cdot(-3)-3\cdot(-1)\\ 2\cdot1+0\cdot3-1\cdot2 & 2\cdot(-2)+0\cdot5-1\cdot0 & 2\cdot0+0\cdot(-3)-1\cdot(-1)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-5&-12&6\\12&19&-12\\0&-4&1\end{pmatrix}.$$

6. Транспонування матриць.

Щоб транспонувати матрицю $A=(a_{ij})_{mn}$ необхідно створити матрицю $A^T=(a_{ji})_{nm}$, тобто рядочки замінити стовбцями.

Приклад:

$$A^T=\begin{pmatrix}1&-2&0\\3&5&-3\\2&0&-1\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}1&3&2\\-2&5&0\\0&-3&-1\end{pmatrix}.$$

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 1.

Матриці та дії над ними

№1. Для матриць *A* та *B*: $A=\begin{pmatrix}1&2\\4&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5&-2\\7&-3\end{pmatrix}$, знайти матриці:

а) $A+B$; б) $-4A$; в) A^T; г) $A\cdot B$; д) $B\cdot A$; е) A^2.

№2. Виконати множення матриць $A\cdot B$ та $B\cdot A$, якщо $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & 1\\ 3 & -6\end{pmatrix}$ і $B=\begin{pmatrix}1 & -3 & -4\\ 4 & 7 & 2\end{pmatrix}$.

№3. Для матриць $A=\begin{pmatrix}1 & 11\\ 3 & -7\end{pmatrix}$ та $B=\begin{pmatrix}9 & 2\\ 8 & 1\end{pmatrix}$ знайти матриці:

а) $2A+\frac{1}{2}B$; б) $2AB-B$; в) $2BA+4A$.

№4. Для матриць A та B: $A=\begin{pmatrix}0 & -3 & 1\\ 1 & -4 & 2\\ 2 & -1 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 11 & 9\\ 1 & 0 & 2\\ 4 & 3 & 5\end{pmatrix}$, знайти матриці:

а) $A+B$; б) $-4A$; в) A^T; г) $A\cdot B$; д) $B\cdot A$; е) A^2.

№5. Для матриць A та B: $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -3\\ 4 & 5 & -4\\ 3 & -2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 4\\ 1 & 5 & 2\\ -4 & 1 & 3\end{pmatrix}$, знайти матриці:

а) $2A+\frac{1}{2}B$; б) $2AB-B$; в) $2BA+4A$.

№6. Для матриць $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -5\end{pmatrix}$ та $B=\begin{pmatrix}9 & -2\\ 7 & 3\end{pmatrix}$ перевірити, чи справджуються формули скороченого множення:

а) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$; б) $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

Виконати дії в наступних прикладах:

№7. $\left(\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & -3\\ -4 & 1\end{pmatrix}\right)^2$;

№8. $\left(\begin{pmatrix}5 & -6\\ 3 & 7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}9 & -11\\ 4 & 7\end{pmatrix}\right)^2$;

№9. $\begin{pmatrix}1 & -8 & 5\\ -3 & 4 & 2\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}^2-\begin{pmatrix}1 & -8 & 5\\ -3 & 4 & 2\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}$;

№10. $\begin{pmatrix} 2 & -7 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} 2 & -7 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}^T$;

№11. $\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 6 & -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$;

№12. $\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$;

№13. $\begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$;

№14. $\begin{pmatrix} -7 & 5 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -7 & 5 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 9 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$;

ЛЕКЦІЯ 2.

Визначники. Мінори. Алгебраїчні доповнення

1. Визначник та методи його розкриття
2. Властивості визначників
3. Мінори. Алгебраїчні доповнення

1. Визначник та методи його розкриття

Озн. Визначником (детермінантом) порядку n називається число, одержане в результаті певних обчислень квадратної матриці $A = (a_{ij})_{nn}$ того ж порядку. Позначається Δ або $\det A$. Поняття визначника ввів В. Лейбніц.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

На відміну від матриці визначник обмежується справа та зліва одинарною лінією. Матриця − це таблиця, а визначник − це число.

Щоб обчислити визначник другого порядку, від добутку елементів головної діагоналі потрібно відняти добуток елементів допоміжної діагоналі:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

<u>Приклад:</u> $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 4 \cdot 1 = 6 - 4 = 2.$

Розглядання квадратної системи з трьох рівнянь вказує на правило обчислення визначників третього порядку, яке відрізняється від правила обчислення визначників другого порядку і має три рівносильних варіанти.

$$\Delta = \left|\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ \hline a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array}\right| = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} +$$

$$+ a_{33}a_{12}a_{21}).$$

Обчислюючи визначник третього порядку, знизу необхідно дописати два перших рядки, в результаті одержимо три головні і три допоміжні діагоналі:

2. Крім приписування знизу двох перших рядків, можна приписати два перших стовпці, що також дає три головні і три допоміжні діагоналі:

$$\Delta = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right| = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} +$$

$$+ a_{12}a_{21}a_{33}).$$

3. Для розкриття визначника третього порядку можна також застосувати правило трикутників:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31}) -$$

$$(a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{21}a_{12}a_{33})$$

Правило розкриття визначника 3-го порядку ще називають ***правилом Сарюса***.

Приклад : $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 6 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 4 \cdot 5 \cdot 5 + 2 \cdot (-3) \cdot (-2) + (-3) \cdot 3 \cdot 6 -$

$-(-2) \cdot 5 \cdot 6 - (-3) \cdot 3 \cdot 4 - 2 \cdot (-3) \cdot 5 = 100 + 12 - 54 + 60 + 36 + 30 = 184.$

2. Властивості визначників

1. Значення визначника не змінюється, якщо всі його рядки замінити відповідними стовбцями.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Для доведення цієї властивості досить застосувати правило трикутників і порівняти одержані результати. Доведемо цю властивість для визначника третього порядку:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11};$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}.$$

Отже, $\Delta_1 = \Delta_2$, тобто властивість справджується.

2. Перестановка двох рядків визначника рівносильна множенню його на –1.

Тобто, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{1} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Перевіримо дану властивість на прикладі:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 3 + 20 - 12 - 5 - 8 = 6; \ \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 5 + 12 - 20 - 8 - 3 = -6.$$

3. Якщо визначник має два однакових рядки, або стовпці, то він дорівнює нулю. Тобто, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$.

Перевіримо дану властивість на прикладі:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 5 + 20 - 20 - 5 - 8 = 0; \ \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 5 + 4 - 6 - 5 - 4 = 0.$$

4. Якщо всі елементи якого-небудь рядка, або стовпця визначника містять спільний множник, то його можна винести за знак визначника. Тобто,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & ka_{33} \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Перевіримо дану властивість на прикладі:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 8 & 4 \\ 5 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 32 + 20 + 20 - 80 - 20 - 8 = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 5 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 16 + 10 + 10 - 40 -$$

$$-10 - 4 = -36.$$

5. Якщо всі елементи деякого рядка, або стовпця визначника дорівнюють нулю, то сам визначник дорівнює нулю.

Тобто, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix} = 0$.

6. Якщо відповідні елементи двох рядків визначника пропорційні, то визначник дорівнює нулю. Тобто, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$.

Перевіримо дану властивість на прикладі:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 5 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 20 + 20 - 20 - 20 - 8 = 0.$$

7. Якщо кожен елемент деякого рядка визначника є сумою двох доданків, то визначник може бути зображений у вигляді суми двох визначників, у яких один у згаданому рядку має перші з заданих доданків, а інший другі; елементи, що знаходяться на решті місць у всіх трьох визначниках одні й ті самі. Тобто,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & b_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

8. Якщо до елементів деякого рядка визначника додати відповідні елементи іншого рядка, помножені на довільний спільний множник, то значення визначника при цьому не зміниться. Тобто, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + ka_{13} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} + ka_{23} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} + ka_{33} & a_{33} \end{vmatrix}$.

3. Мінори. Алгебраїчні доповнення

Озн. Мінором M_{ik}, що відповідає елементу a_{ik} матриці (1), називається визначник, який відповідає матриці, утвореній з матриці (1) викреслюванням i-го рядка та k-го стовбця.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

З визначника порядку n можна знайти n^2 мінорів (за числом елементів визначника).

Озн. Алгебраїчним доповненням A_{ik}, що відповідає елементу a_{ik} матриці (1), називається відповідний мінор, взятий зі знаком «плюс», якщо сума його індексів парна, і зі знаком «мінус», якщо сума його індексів непарна: $A_{ik} = (-1)^{i+k} \cdot M_{ik}$.

Приклад: Дано матрицю $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 6 & -3 & 5 \end{pmatrix}$.

Обчислити мінори M_{12} і M_{22} та алгебраїчні доповнення A_{12} і A_{22}.

$M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 18 = -8$; $M_{22} = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 20 - (-12) = 32$;

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot (2 \cdot 5 - 3 \cdot 6) = -(10 - 18) = 8;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^4 \cdot (4 \cdot 5 - 6 \cdot (-2)) = 20 - (-12) = 32.$$

Практичне заняття 2.

Визначники. Мінори. Алгебраїчні доповнення

Обчислити визначники в наступних завданнях:

№15. $\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 7 & 12 \end{vmatrix}$;

№16. $\begin{vmatrix} 9 & 0 \\ 14 & 1 \end{vmatrix}$;

№17. $\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$;

№18. $\begin{vmatrix} -7 & 1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix}$;

№19. $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 3 \\ 7 & 3 & 5 \end{vmatrix}$; **№20.** $\begin{vmatrix} 4 & 7 & 3 \\ -9 & 6 & 2 \\ 8 & 5 & 1 \end{vmatrix}$;

№21. $\begin{vmatrix} -5 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \\ 8 & 3 & 5 \end{vmatrix}$; **№22.** $\begin{vmatrix} 1 & -4 & 7 \\ -2 & 5 & -8 \\ 3 & -6 & 9 \end{vmatrix}$;

№23. $\begin{vmatrix} -5 & 9 & 2 \\ -6 & -5 & 3 \\ 7 & -1 & 0 \end{vmatrix}$; **№24.** $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & 2 \\ 13 & 7 & 4 \end{vmatrix}$;

Обчислити мінори та алгебраїчні доповнення в наступних завданнях:

№25. $\begin{vmatrix} 4 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & -5 \\ 3 & 11 & 2 \end{vmatrix}$; **№26.** $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 14 & 3 & 0 \\ 6 & -2 & 1 \end{vmatrix}$;

Лекція 3.

Системи лінійних рівнянь

1. Обернена матриця.
2. Системи лінійних рівнянь
3. Матричний метод розв’язування системи лінійних рівнянь
4. Метод Крамера

1. Обернена матриця.

Нехай задано матрицю $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$. Поставимо задачу знайти матрицю $\frac{1}{A} = A^{-1}$.

Озн. Квадратна матриця виду $A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{n1} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$ називається оберненою до матриці А.

Озн. Зведена матриця A^* складається з алгебраїчних доповнень шляхом транспонування: алгебраїчні доповнення, знайдені для даного рядка, записуються відповідним стовпцем: $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{n1} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$.

Теорема 3: Для існування оберненої матриці A^{-1} необхідно і достатньо, що матриця A була не виродженою.

<u>Приклад:</u> Знайти матрицю, обернену до заданої: $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Обчислимо визначник матриці А і алгебраїчні доповнення всіх елементів:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -68.$$

$A_{11} = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -17;$ $\quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -5;$ $\quad A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 9;$

$A_{21} = -\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -17;$ $\quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7;$ $\quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 32 \end{vmatrix} = 1;$

$A_{31} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 17;$ $\quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -11;$ $\quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -21.$

Обернена матриця має вигляд:

$$A^{-1} = -\frac{1}{68} \cdot \begin{pmatrix} -17 & -17 & 17 \\ -5 & 7 & -11 \\ 9 & 1 & -21 \end{pmatrix}.$$

Матриця A^{-1} знайдена правильно, тому що $A \cdot A^{-1} = E$, тобто:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{68}\right) \cdot \begin{pmatrix} -17 & -17 & 17 \\ -5 & 7 & -11 \\ 9 & 1 & -21 \end{pmatrix} =$$

$$=-\frac{1}{68}\begin{pmatrix} 2\cdot(-17)+5\cdot(-5)-1\cdot 9 & 2\cdot(-17)+5\cdot 7-1\cdot 1 & 2\cdot 17+5\cdot(-11)-1\cdot(-21) \\ 3\cdot(-17)-3\cdot(-5)+4\cdot 9 & 3\cdot(-17)-3\cdot 7+4\cdot 1 & 3\cdot 17-3\cdot(-11)+4\cdot(-21) \\ 1\cdot(-17)+2\cdot(-5)+3\cdot 9 & 1\cdot(-17)+2\cdot 7+3\cdot 1 & 1\cdot 17+2\cdot(-11)+3\cdot(-21) \end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{68}\cdot\begin{pmatrix} -68 & 0 & 0 \\ 0 & -68 & 0 \\ 0 & 0 & -68 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Безпоседнім обчисленням легко переконатися, що для оберненої матриці справджуються рівності: $AA^{-1}=A^{-1}A=E$.

Квадратна матриця може мати обернену тоді і тільки тоді, якщо вона не вироджена. Крім того, для не виродженої квадратної матриці А існує єдина обернена матриця.

2. Системи лінійних рівнянь

Озн. Лінійним називається рівняння, у якому невідомі величини мають перший степінь і між собою не перемножуються.

Система лінійних рівнянь має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{22}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}=b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \qquad (1.)$$

Коефіцієнти при невідомих утворюють матрицю, яка складається з m рядків та n стовпців.

Вільні члени утворюють матрицю-стовпець:

$$B=\begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{Vmatrix}$$

Усі невідомі $x_1;x_2;\ldots x_n$ також можна записати у вигляді матриці-стовпця:

$$X=\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{Vmatrix}$$

Взагалі під час запису системи лінійних рівнянь необов’язково писати в i-му стовпці невідому x_i (крім неї, там інших невідомих просто немає) чи знак «дорівнює» перед вільними членами, тому систему записують у спрощеному вигляді.

$$\left\| \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array} \right\|$$

Знак «дорівнює» замінено вертикальною лінією, а знак матриці вказує на наявність системи рівнянь у матричному вигляді.

Озн. Система називається однорідною, якщо всі її вільні члени дорівнюють нулю, і неоднорідною, якщо хоч один з них відмінний від нуля.

Множина чисел $(a_1, a_2, \dots a_n)$ називається розв’язком системи, якщо при підстановці цих чисел в кожне рівняння системи отримаємо рівність.

Озн. Система називається сумісною, якщо вона має розв’язок.

3. Матричний метод розв’язування системи лінійних рівнянь

Теорема: Якщо визначник системи (1.) відмінний від нуля, то система сумісна і має розв’язок, що визначається формулою: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} A^* \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$,

де Δ – головний визначник системи,

A^* – зведена матриця, $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ – стовбець вільних елементів.

<u>Приклад:</u> Розв’язати систему лінійних рівнянь матричним методом:

$$\begin{cases} 2x + 7y + z = -17, \\ 7x + 3y + 5z = 8, \\ 3x + 2y + 6z = 9. \end{cases}$$

Обчислимо головний визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 7 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 6 + 1 \cdot 7 \cdot 2 + 7 \cdot 5 \cdot 3 - 1 \cdot 3 \cdot 3 - 2 \cdot 5 \cdot 2 - 7 \cdot 7 \cdot 6 =$$

$$= 36 + 14 + 105 - 9 - 20 - 294 = -168.$$

Так як $\Delta \neq 0$, то система має єдиний розв’язок.

Обчислимо алгебраїчні доповнення до кожного елемента матриці за формулою: $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot 6 - 5 \cdot 2 = 18 - 10 = 8;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -(7 \cdot 6 - 5 \cdot 3) = -(42 - 15) = -27;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = 14 - 9 = 5;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -(7 \cdot 6 - 1 \cdot 2) = -(42 - 2) = -40;$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 1 \cdot 3 = 12 - 3 = 9;$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(2 \cdot 2 - 7 \cdot 3) = -(4 - 21) = 17;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 7 \cdot 5 - 1 \cdot 3 = 35 - 3 = 32;$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = -(2 \cdot 5 - 1 \cdot 7) = -(10 - 7) = -3;$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 7 \cdot 7 = 6 - 49 = -43.$$

Запишемо зведену матрицю: $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -40 & 32 \\ -27 & 9 & -3 \\ 5 & 17 & -43 \end{pmatrix}$.

Тоді стовбець невідомих елементів $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ дорівнює: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} A^* \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} =$

$$= \frac{1}{-168} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 40 & 32 \\ -27 & 9 & -3 \\ 5 & 17 & -43 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -17 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{-168} \cdot \begin{pmatrix} 8 \cdot (-17) - 40 \cdot 8 + 32 \cdot 9 \\ (-27) \cdot (-17) + 9 \cdot 8 + (-3) \cdot 9 \\ 5 \cdot (-17) + 17 \cdot 8 + (-43) \cdot 9 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{-168} \cdot \begin{pmatrix} -136 - 320 + 288 \\ 459 + 72 - 27 \\ -85 + 136 - 387 \end{pmatrix} = \frac{1}{-168} \cdot \begin{pmatrix} -168 \\ 504 \\ -336 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Отже, {1; –3; 2} – шуканий розв’язок системи лінійних рівнянь.

Відповідь: {1; –3; 2}.

4. Метод Крамера

Теорема: Якщо визначник системи (1.) відмінний від нуля, то система сумісна і має розв’язок, що визначається формулами: $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta}$; $y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta}$; $z = \dfrac{\Delta_z}{\Delta}$.

Приклад: Розв’язати систему лінійних рівнянь за правилом Крамера:

$$\begin{cases} 2x + 7y + z = -17, \\ 7x + 3y + 5z = 8, \\ 3x + 2y + 6z = 9. \end{cases}$$

Розв’язання:

З попередніх обчислень головний визначник системи дорівнює $\Delta = -168$. Обчислимо додаткові визначники, замінюючи по черзі перший, другий та третій стовбець головного визначника стовбцем вільних елементів:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -17 & 7 & 1 \\ 8 & 3 & 5 \\ 9 & 2 & 6 \end{vmatrix} = (-17)\cdot 3\cdot 6 + 8\cdot 2\cdot 1 + 7\cdot 5\cdot 9 - 1\cdot 3\cdot 9 - 2\cdot 5\cdot(-17) - 8\cdot 7\cdot 6 =$$

$$= -306 + 16 + 315 - 27 + 170 - 336 = -168;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & -17 & 1 \\ 7 & 8 & 5 \\ 3 & 9 & 6 \end{vmatrix} = 2\cdot 8\cdot 6 + 7\cdot 9\cdot 1 + 3\cdot(-17)\cdot 5 - 1\cdot 8\cdot 3 - 2\cdot 5\cdot 9 - 7\cdot 6\cdot(-17) =$$

$$= 96 + 63 - 255 - 24 - 90 + 714 = 504;$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 7 & -17 \\ 7 & 3 & 8 \\ 3 & 2 & 9 \end{vmatrix} = 2\cdot 3\cdot 9 + 7\cdot 8\cdot 3 + 7\cdot 2\cdot(-17) - (-17)\cdot 3\cdot 3 - 2\cdot 2\cdot 8 - 7\cdot 7\cdot 9 =$$

$$= 54 + 168 - 238 + 153 - 32 - 441 = -336.$$

Визначимо корені системи рівнянь за формулами Крамера:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-168}{-168} = 1; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{504}{-168} = -3; \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-336}{-168} = 2.$$

Отже, {1; –3; 2} – шуканий розв’язок системи лінійних рівнянь.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 3.

Системи лінійних рівнянь

Для заданих матриць знайти обернені матриці:

№27. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$;

№28. $\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$;

№29. $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$;

№30. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$;

Розв’язати систему лінійних рівнянь:

№31. $\begin{cases} 4x - 3y - 2z = 9, \\ 2x + 5y + 3z = -7, \\ 6x - 3y + 5z = 5; \end{cases}$

№32. $\begin{cases} x + 2y - 3z = 7, \\ 3x - y - 4z = 13, \\ 4x + y + 2z = 0; \end{cases}$

№33. $\begin{cases} 2x + y - z = 0, \\ x - y - 3z = 13, \\ 3x - 2y + 4z = -15; \end{cases}$

№34. $\begin{cases} x + y - 2z = 4, \\ 2x - 3y + z = 3, \\ 3x - 2y + 6z = 0; \end{cases}$

№35. $\begin{cases} 5x - 3y + 6z = 6, \\ 2x - y - 3z = 8, \\ x + 4y - 2z = 9; \end{cases}$

№36. $\begin{cases} x - y + z = 3, \\ 2x + y + z = 11, \\ x + y + 2z = 8; \end{cases}$

№37. $\begin{cases} 2x - 3y - 4z = -5, \\ x + 5y - 5z = -6, \\ 8x - 2y + 4z = -10; \end{cases}$

№38. $\begin{cases} 2x + 2y + z = 1, \\ 3x + y + 2z = -2, \\ 4x - y - 7z = 7; \end{cases}$

№39. $\begin{cases} x - 8y + 3z = 1, \\ 2x - 6y + z = 4, \\ 0{,}1x - 2y + z = 0; \end{cases}$

№40. $\begin{cases} x - 5y + z = 4, \\ 2x - y + 3z = 14, \\ 3x + 5y + z = 8; \end{cases}$

ЛЕКЦІЯ 4.

Елементи аналітичної геометрії на площині.

1. Системи координат:

   а) декартова система координат;

   б) полярна система координат.

2. Відстань між двома точками.

3. Поділ відрізка пополам.

4. Площа трикутника.

5. Кутовий коефіцієнт прямої.

6. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом, яка проходить через задану точку.

7. Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки.

8. Рівняння прямої у загальному вигляді.

9. Координати точки перетину прямих.

10. Кут між двома прямими.

11. Умова паралельності прямих.

12. Умова перпендикулярності прямих.

13. Відстань від точки до прямої

Аналітична геометрія – це наука, яка вивчає методи розв’язування геометричних задач методами аналізу. Основи аналітичної геометрії заклав французький математик Р. Декарт.

1. Системи координат

Основою аналітичної геометрії є система координат. Систем координат існує багато, але найбільш розповсюджені прямокутна, або декартова система та полярна системи.

а) **Декартова система.** На площині розглядають два взаємно перпендикулярні вектори: горизонтально розташований вектор Ox (вісь Ox) та вертикально розташований вектор Oy (вісь Oy). Точка O є початком координат. Обидві осі мають однаковий або різний масштаб, за допомогою якого для кожної точки на осях знаходиться відстань від початку координат.

Декартова система дозволяє розв’язувати дві задачі:

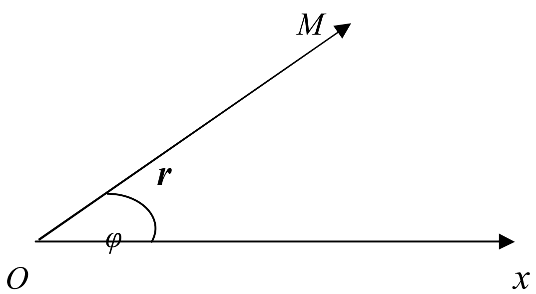
а) знаходження координат невідомої точки шляхом проведення перпендикулярів на осі координат;

б) знаходження місця відомої точки на площині як перетину перпендикулярів, побудованих на осях у точках, що відповідають координатам шуканої точки.

Координатна система дає можливість кожній точці площини поставити у відповідність два числа – координати точки. Перше число є проекцією точки на вісь *Ox*, а друге – проекцією на вісь *Oy*. Ці координати можуть бути відомими або невідомими. Якщо координати точки *M* невідомі, то цю точку позначають $M(x;y)$. Якщо ж вони відомі, то позначають $M(x_1; y_1)$ або $M(x_M; y_M)$, тобто x та y мають при собі числові, або буквені індекси.

б) **Полярна система**: Ця система складається з деякої точки *O*, що називається полюсом, та горизонтальної осі *Ox*, що називається полярною віссю.

Будь-яка точка *M* лежить на прямій $OM=r$, яка називається радіус-вектором і утворює з полярною віссю кут φ, який в полярній системі є аргументом.



Величини r і φ називаються полярними координатами. Точка *M* в полярних координатах записується у вигляді $M(r; \varphi)$. Форми запису координат у декартовій і полярній системах співпадають, тому завжди вживають додаткові пояснення щодо системи координат.

2. Відстань між двома точками

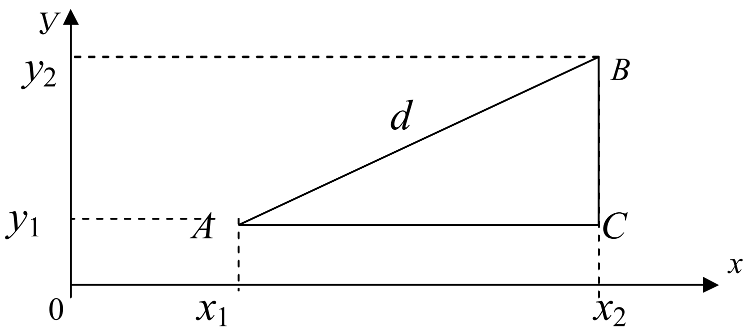
Нехай задано відрізок *AB* з координатами кінців відрізка $A(x_1; y_1)$ та $B(x_2; y_2)$.

З трикутника *ABC* маємо: $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}$. Звідси:

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \tag{1}$$

<u>Приклад:</u> Знайти довжину відрізка *AB*, якщо *A*(3; 5) і *B*(7; 8).

$$d=\sqrt{(7-3)^2+(8-5)^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5.$$



3. Поділ відрізка пополам

Нехай задано відрізок *AB* з координатами кінців відрізка $A(x_1; y_1)$ та $B(x_2; y_2)$. Точка *C* є серединою відрізка *AB*. Тоді координати точки *C* можна визначити за формулами:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2};\ y=\frac{y_1+y_2}{2} \tag{2}$$

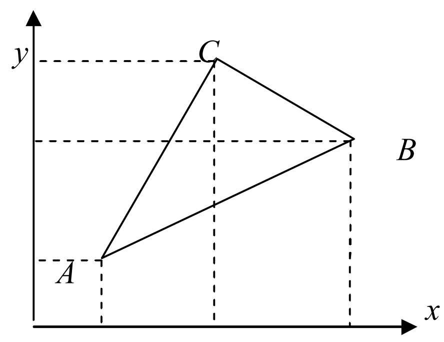
Приклад: Знайти середину відрізка *AB*, якщо *A*(3; 5) і *B*(7; 8).

$$x_c=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{3+7}{2}=5;\ y_c=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{5+8}{2}=6{,}5.$$

Отже, координати точки *C* (5; 6,5).

4. Площа трикутника

Нехай задано трикутник *ABC* з координатами вершин $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ та $C(x_3; y_3)$.



Тоді площа трикутника обчислюється за такою схемою:

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1-y_1x_2-y_2x_3-y_3x_1) \tag{3}$$

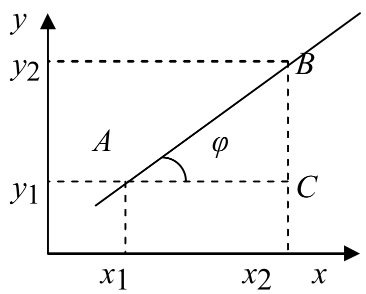
Приклад: Обчислити площу трикутника $A(2;7)$, $B(12;1)$, $C(6;15)$.

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 12 & 1 \\ 6 & 15 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\left(2+180+42-84-6-30\right)=34\textit{кв.од.}$$

За подібною схемою обчислюється площа будь-якого многокутника, але для правильного обходу точок необхідно мати рисунок.

5. Кутовий коефіцієнт прямої

Озн. Рівнянням прямої називається такий математичний зв'язок між змінними x та y, взятими зі шкали дійсних чисел, при якому кожному значенню x відповідає одне і тільки одне значення y.



З $_\Delta ABC$ видно, що $tg\varphi=\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

Озн. В аналітичній геометрії тангенс кута нахилу прямої до осі Ox називається кутовим коефіцієнтом прямої і позначається через k. Отже:

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}. \tag{4}$$

Приклад: Знайти кутовий коефіцієнт прямої AB, якщо $A(6;\,8)$; $B(-10;\,12)$.

$k=\dfrac{-10-6}{12-8}=\dfrac{-16}{4}=-4$. Пряма нахилена до осі Ox під тупим кутом.

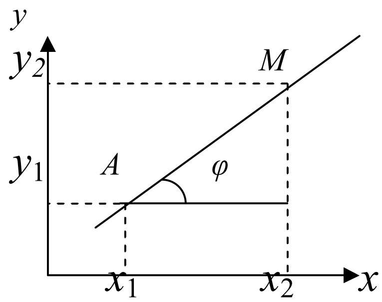
6. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом, яка проходить через задану точку

Виберемо на прямій довільну точку *M* з невідомими координатами x та y. Тоді для кутового коефіцієнта можемо записати:

$$k = \frac{y - y_1}{x - x_1} \Rightarrow y - y_1 = k(x - x_1).$$

Отже, рівняння прямої з відомим кутовим коефіцієнтом, яка проходить через одну задану точку, має канонічний вигляд:

$$y - y_1 = k(x - x_1) \tag{5}$$



<u>Приклад:</u> Записати рівняння прямої, що проходить через точку *A*(2; 4) з заданим кутовим коефіцієнтом $k = 3$.

Згідно формули (5) одержимо: $y - 4 = 3(x - 2)$.

7. Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки

Використаємо рівняння прямої через одну задану точку $y - y_1 = k(x - x_1)$.

При відомих координатах точок *A* і *B* маємо:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \text{ Тоді } y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \Rightarrow \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Отже, рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки, має вигляд:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \tag{6}$$

Рівняння (6) завдяки відсутності кутового коефіцієнта і необхідності користуватись таблицею тангенсів відноситься до найбільш вживаних на практиці.

Приклад: Записати рівняння прямої, що проходить через точки A та B з координатами $A(2;\,3)$; $B(6;\,8)$.

$$\frac{y-3}{8-3}=\frac{x-2}{6-2} \qquad \Rightarrow \frac{y-3}{5}=\frac{x-2}{4}.$$

8. Рівняння прямої у загальному вигляді

Алгебраїчна форма рівняння першого порядку має вигляд:

$$Ax+By+C=0. \tag{7}$$

До цієї форми зводиться будь-яке з попередніх рівнянь.

З рівняння у загальному вигляді можемо отримати рівняння прямої, яка відтинає на осі ординат відомий відрізок, а також кутовий коефіцієнт прямої:

$$By=-Ax-C \Rightarrow y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}, \text{ звідки}$$

$$k=-\frac{A}{B} \tag{8}$$

Висновок. Якщо рівняння задане в загальному вигляді, то тангенс кута нахилу прямої визначається відношенням коефіцієнта при x до коефіцієнта при y, взятому з оберненим знаком;

Приклад: Знайти кутовий коефіцієнт прямої, що задана рівнянням $3x-4y-12=0$.

З формули (8) маємо: $k=\frac{3}{-4}=\frac{3}{4}$.

9. Координати точки перетину прямих

Якщо рівняння прямих, що перетинаються в точці $A(x_0;y_0)$, задані в загальному вигляді, то точка перетину цих прямих є точкою, координати якої є такими, що задовольняють обидва рівняння і знаходяться з розв’язування системи рівнянь:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2=0 \end{cases} \tag{9}$$

Приклад: Знайти точку перетину прямих, що задаються рівняннями $3x+5y-8=0$ та $7x-4y-3=0$.

Координати точки перетину прямих знаходимо із системи рівнянь:

$$\begin{cases} 3x+5y=8 \\ 7x-4y=3 \end{cases}.$$

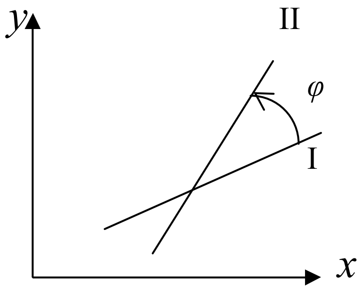
Систему обчислимо методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} = -12-35=-47;$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -32-15=-47; \ \Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 9-56=-47.$$

З формул Крамера маємо: $x_0 = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = 1$; $y_0 = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} = 1$. Отже, $A(1;\ 1)$.

10. Кут між двома прямими



Кут між прямими знаходимо за годинниковою стрілкою від прямої I до прямої II. Із тригонометричних формул відомо: $tg(\beta-\alpha)=\dfrac{tg\beta - tg\alpha}{1+tg\alpha\cdot tg\beta}$, де β і α – кути нахилу прямих I і II. Оскільки $tg\alpha=k_1$,а $tg\beta=k_2$, то:

$$tg\varphi = \frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}. \qquad (10)$$

Приклад: Знайти кут між прямими $3x+5y-8=0$ та $7x-4y-3=0$.

З формули (8) маємо: $k_1=-\dfrac{3}{5}$ і $k_2=-\dfrac{7}{4}$.

Тоді $tg\varphi = \dfrac{-7/4-(-3/5)}{1+(-7/4)\cdot(-3/5)} = \dfrac{3/5-7/4}{1+21/20} = \dfrac{(12-35)/20}{41/20} = \dfrac{-23}{41}$.

З тригонометричних таблиць маємо $\varphi \approx 151^\circ$

11. Умова паралельності прямих

Якщо прямі паралельні, то кут між ними φ=0. Тоді з умови $\dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} = 0$ маємо: $k_2 - k_1 = 0$. Отже, якщо прямі паралельні, то

$$k_1 = k_2. \tag{11}$$

<u>Приклад:</u> Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку A(1; 2) і паралельна прямій $2x + 3y - 8 = 0$.

Так, як прямі паралельні, то їх кутові коефіцієнти рівні $k_1 = k_2 = -\dfrac{2}{3}$, тоді за рівнянням (5): $y - y_1 = k(x - x_1)$, тобто $y - 2 = -\dfrac{2}{3}(x - 1)$.

12. Умова перпендикулярності прямих

Якщо для прямих, що перетинаються, $tg\varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$, то $ctg\varphi = \dfrac{1 + k_1 k_2}{k_2 - k_1}$. Для перпендикулярних прямих $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, тобто $ctg\dfrac{\pi}{2} = 0$, а значить,

$1 + k_1 k_2 = 0 \Rightarrow k_2 = \dfrac{-1}{k_1}$. Отже, якщо прямі перпендикулярні, то: $k_2 = -\dfrac{1}{k_1}$ (12)

<u>Приклад:</u> Знайти рівняння перпендикуляра до прямої $3x - 4y + 1 = 0$, який проходить через точку $A(2; 7)$.

З умови перпендикулярності $k_2 = -\dfrac{1}{k_1} = -\dfrac{1}{-\frac{3}{4}} = \dfrac{4}{3}$, тоді за рівнянням (5):

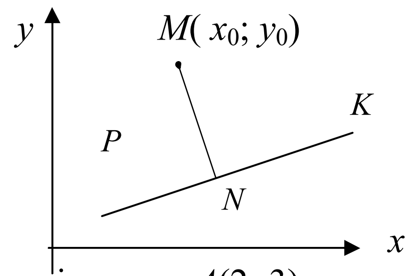
$y - y_1 = k(x - x_1)$, тобто $y - 7 = \dfrac{4}{3}(x - 2)$.

13. Відстань від точки до прямої

Відстань від точки до прямої знаходиться за перпендикуляром, тому спочатку треба знайти рівняння перпендикуляра *MN*, далі розв'язати систему рівнянь *MN* та *PK* і знайти координати точки *N*, після чого знайти довжину відрізка *MN*.

Виконавши вказані дії, одержимо формулу для відстані від точки M до прямої PK:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{13}$$



Приклад: Знайти відстань від точки $A(2; 3)$ до прямої $3x+4y+7=0$.

Згідно формулі (13) знаходимо: $d = \frac{|3\cdot 2 + 4\cdot 3 + 7|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{25}{\sqrt{25}} = 5$.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 4.

Елементи аналітичної геометрії на площині

41. Які з точок *M (3; 5)*, *N (2; 7)*, *P (–1; –3)*, *Q (–2; 0)*, *R (3; –5)* лежать на прямій $y = 2x - 1$.

42. Загальне рівняння прямої $3x - 4y + 12 = 0$ представити у вигляді:

а) з кутовим коефіцієнтом; б) у відрізках на осях; в) побудувати пряму.

43. Знайти рівняння сторін трикутника, вершини якого є точки *A (1; –1), B (3; 5;), C (–7; 11)*.

44. Знайти кути трикутника, сторони якого задано рівняннями: $5x - 2y - 11 = 0$; $x + 2y + 5 = 0$; $x - 2y + 1 = 0$.

45. Знайти площу трикутника, сторони якого задано рівняннями: $5x - 2y - 11 = 0$; $x + 2y + 5 = 0$; $x - 2y + 1 = 0$.

46. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку M_0 *(2; 5)* паралельно прямій $3x - 4y + 15 = 0$.

47. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку P_0 *(5; –1)* паралельно прямій $3x - 7y + 14 = 0$.

48. Задана пряма $2x + 3y + 4 = 0$. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку *M (2; 1)*:

1) паралельно заданій прямій;

2) перпендикулярно до заданої прямої.

49. Знайти відстань між двома паралельними прямими: $3x+4y-12=0$, $3x+4y+13=0$.

50. Знайти точку *M*, яка симетрична точці *P(–6; 13)* відносно прямої $2x-3y-3=0$.

51. Знайти точку *К*, яка симетрична точці *P(8; –9)* відносно прямої, що проходить через точки *A (3; –4), B (–1; –2)*.

52. Задано три вершини паралелограма *A (–3; 1), B (3; 3), C (4; –1)*. Знайти координати четвертої вершини.

53. Задано вершини трикутника *A (12; –4), B (0; 5), C (–12; –11)*. Знайти:

а) довжини сторін;

б) рівняння сторін;

в) рівняння висоти, що проведена з вершини B;

г) довжину цієї висоти;

д) рівняння медіани, що проведена з вершини A;

е) точку перетину висоти, що проведена з вершини B, та медіани, що проведена з точки A;

ж) кут C;

з) площу трикутника.

Лекція 5.

Функція. Основні елементарні функції

1. Поняття функції.
2. Способи завдання функцій.
3. Класифікація елементарних функцій: лінійна функція, обернена пропорційність, квадратична функція.
4. Монотонні функції.
5. Парні та непарні функції.
6. Періодичні функції.
7. Перетворення графіка функцій.

1. Поняття функції.

Вивчаючи те чи інше явище, ми, як правило, оперуємо кількома величинами, які пов’язані між собою так, що зміна деяких з них приводить до зміни інших. Такий взаємозв'язок у математиці виражається за допомогою *функції*. Цей термін вперше ввів Г. Лейбніц.

Приклади:

1. Під час вільного падіння тіла пройдений шлях S залежить від зміни часу t. Зв'язок між змінними величинами S і t задається формулою: $S = \frac{gt^2}{2}$, де g – прискорення при вільному падінні (стала величина). Величина S залежить від зміни величини, тобто шлях S є функцією часу.

2. Довжина l кола діаметра d визначається за формулою $l = \pi d$, де π – стала величина. Змінна l залежить від змінної величини d, тобто довжина кола l є функцією діаметра d.

Спільним у цих прикладах є те, що зв'язок між змінними величинами описується певним правилом (залежністю, законом, відповідністю) так, що кожному значенню однієї величини відповідає єдине значення другої.

Дамо тепер означення функції. Якщо кожному числу x з деякої числової множини X за певним правилом поставлене у відповідність єдине число y, то кажуть, що y є функція від x і пишуть $y = f(x)$. Це означення належить М.І.Лобачевському і Л. Діріхле.

Озн. Функцією називають відповідність між елементами двох множин x та y, при якій кожному елементові першої множини x відповідає не більше одного елемента y другої множини. Наприклад: $y = x^3$, $y = \frac{1}{x}$, $y = 4x + 2$.

Змінна x називається незалежною змінною, або аргументом, а змінна $\boldsymbol{y}$ – залежною змінною, або функцією; під символом $y = f(x)$ розуміють те правило, за яким кожному x відповідає y, або ті операції, які треба виконати над аргументом, щоб дістати відповідне значення функції.

Приклад:

Знайти значення функції $y = x^2 - 2x + 1$ в точці $x = 2$.

Так, як $x = 2$, то підставимо у функцію це значення: $y(2) = 2^2 - 2 \cdot 2 + 1 = 1$.

Множина *X* називається областю визначення функції. Множина *У* усіх чисел *у,* таких, що *у = f(x)* для кожного $x \in X$ називається множиною значень функції.

Озн. Множина всіх тих елементів з *X*, для яких є відповідні елементи множини *У*, називається областю визначення, а множина всіх тих елементів з *У*, що відповідають елементам з *X*, − областю значень даної функції.

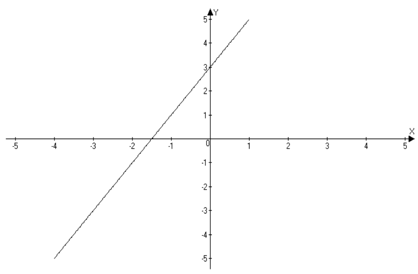
Приклад:

Для функції *у = х + 4* область визначення – всі дійсні числа: $x \in R$. Область значень – це також множина всіх дійсних чисел: $y \in R$.

Для функції $y = \dfrac{4}{x}$ область визначення $x \in (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$, область значень $y \in (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$.

Озн. Графіком функції *f* називається множина точок (*x;y*) на координатній площині, таких, що перебігають всю множину D(*f*), а *y = f(x).*

Приклад: Побудувати графік функції $y = 2x + 3$.



2. Способи завдання функцій.

Основними способами завдання функції є аналітичний, графічний і табличний спосіб.

При *аналітичному способі* завдання функції відповідність між аргументом і функцією задається формулою (аналітичним виразом), де зазначено, які дії потрібно виконати над значенням аргументу та сталими числами, щоб дістати відповідне значення функції.

При *графічному способі* завдання функції $y = f(x)$ відповідність між змінними x і y задається графіком – множиною точок $(x; y)$ площини, координати яких задовольняють рівність $y = f(x)$. Залежно від того, яку задано функцію, графік її може складатись з однієї суцільної лінії, кількох ліній, дискретної множини точок площини тощо.

Графічним способом завдання функції широко користуються при дослідженнях, пов'язаних з використанням таких самописних приладів, як барограф (для запису змін атмосферного тиску), осцилограф (для запису змін електричного струму або напруги), електрокардіограф (для запису електричних явищ, пов'язаних з діяльністю серця), термограф (для запису змін температури повітря) тощо. Криві (їх називають відповідно барограма, осцилограма, електрокардіограма, термограма), що їх виписують прилади, задають цілком певну функцію, властивості якої характеризують перебіг того чи іншого процесу.

Табличний спосіб завдання функції $y = f(x)$ полягає в тому, що відповідність між змінними x та y задається у вигляді таблиці.

Табличний спосіб досить часто використовується при проведенні експериментів, коли задають певну сукупність $x_1, x_2 \ldots, x_n$ значень аргументу і дослідним шляхом знаходять відповідні значення функції: $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Якщо функція задана аналітично, то для неї можна побудувати таблицю, тобто табулювати функцію. Табулюються, як правило, функції які виражаються складною формулою, але часто зустрічаються в практиці Такими є, наприклад, таблиці логарифмів, тригонометричні таблиці тощо.

Крім розглянутих існують й інші способи задання функції. Так, функцію можна задати словесним описом залежності між змінними.

3. Класифікація елементарних функцій:

Лінійна функція.

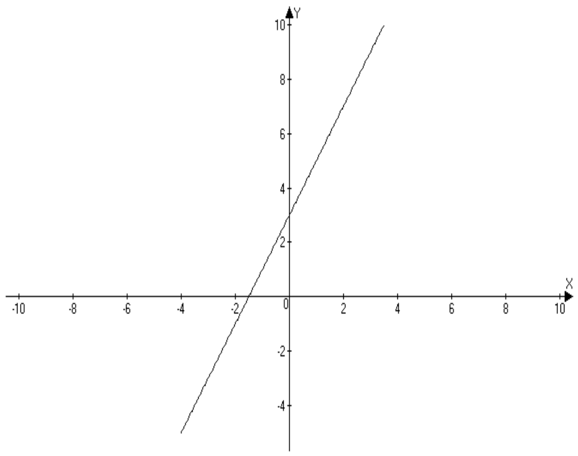
Озн. Лінійною називають функцію, яку можна задати формулою $y = ax + b$, де x – аргумент, a і b – будь-які числа.

1. Область визначення: $x \in (-\infty;+\infty)$.

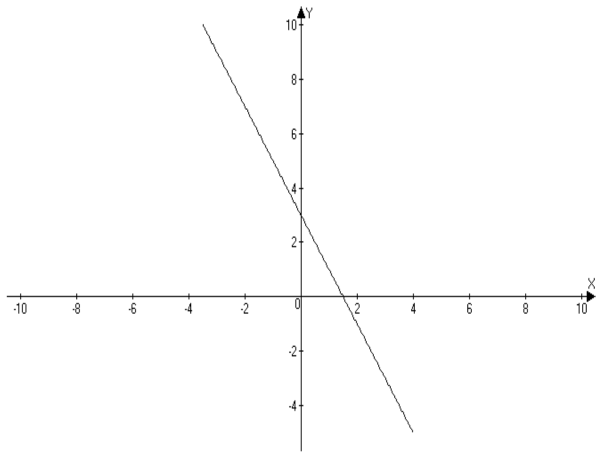
2. Область значень: $y \in (-\infty;+\infty)$.

3. При a > 0 функція зростає, при a < 0 – спадає.

Графіком функції є пряма:

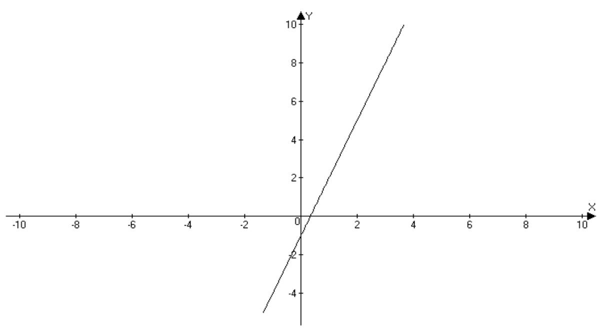


$a > 0$



$a < 0$

Для побудови графіка необхідно мати дві точки. Наприклад, для функції $y = 3x - 1$, задамо $x = 0$, тоді $y = 3 \cdot 0 - 1 = -1$. Маємо точку з координатами $(0; -1)$. Першу координату називають абсцисою, а другу – ординатою. Відповідно і вісь *X* називають віссю абсцис, а вісь *У* – ординат. Аналогічно задамо другу точку: $x = 1$, тоді $y = 3 \cdot 1 - 1 = 2$. Отримали другу точку $(1; 2)$. Через дані точки можна побудувати пряму: $y = 3x - 1$.

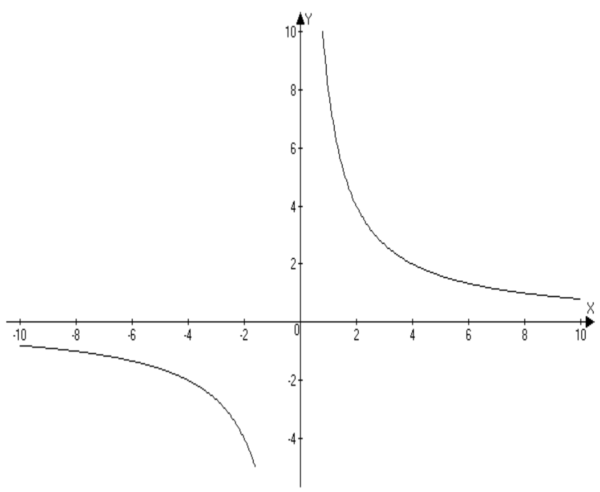


Можна зробити висновок, що зі збільшенням ординати, абсциса також збільшується. Причому, якщо збільшити ординату на одиницю, то й абсциса збільшиться на одиницю. Якщо зменшити ординату на 13, наприклад, то й абсциса зменшиться на 13. Тобто лінійна функція є функцією прямої пропорційності.

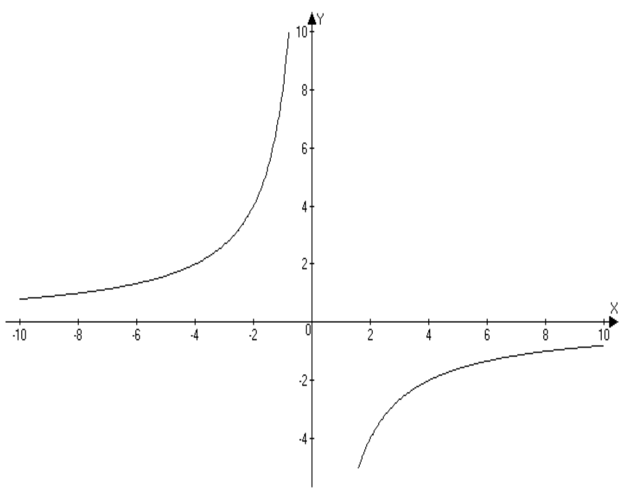
Обернена пропорційність.

Озн. Змінну y називають обернено пропорційною до змінної x, якщо відповідні значення цих змінних зв'язані рівністю $y = \frac{k}{x}$, де k – якесь дійсне число, відмінне від нуля. Число k називають коефіцієнтом оберненої пропорційності. Жодна з змінних не може набувати значення 0.

1. Область визначення: $x \in (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$.
2. Область значень: $y \in (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$.
3. При *k>0* функція спадає, при *k<0* – зростає на всій області визначення.



k>0



k<0

Графіком цієї функції $y = \frac{k}{x}$ є крива, що складається з двох гілок. Цю криву називають гіперболою.

Зауважимо, що графіками функцій $y = \frac{1}{x} + 3$, $y = \frac{3}{x-2}$, $y = \frac{x+3}{x-2}$ теж є гіперболи, однак вони – необернено пропорційні. Це приклади дробово-раціональних функцій. Обернена пропорційність є найпростішим випадком дробово-раціональних функцій.

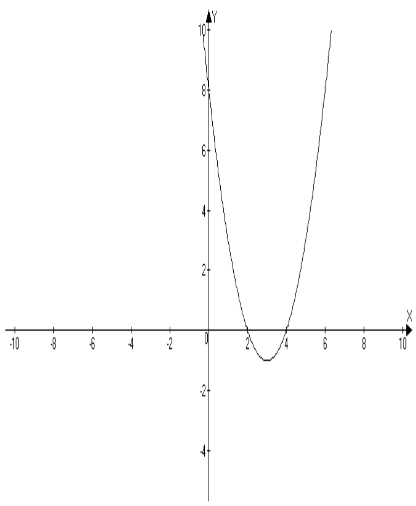
Квадратична функція.

Озн. Квадратичною називають функцію, яку можна задати формулою $y=ax^2+bx+c$, де x – змінна, $a \neq 0$, b і c – числа.

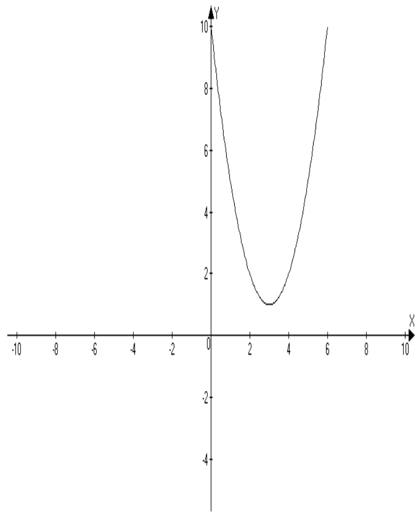
1. Область визначення: $x \in (-\infty;+\infty)$.

2. Область значень: $y \in (-\infty;+\infty)$.

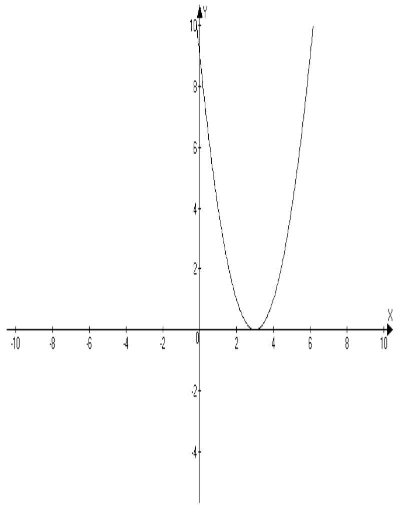
Графіком квадратичної функції є парабола, її гілки напрямлені вгору, якщо a>0, гілки напрямлені вниз, якщо $a < 0$. Вершина цієї параболи має координати $\left(-\frac{b}{2a};c-\frac{b^2}{4a}\right)$.



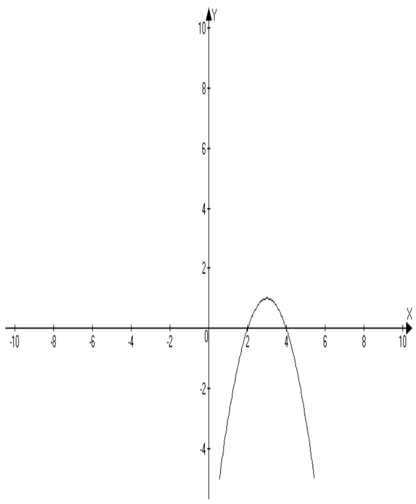
a>0, D>0



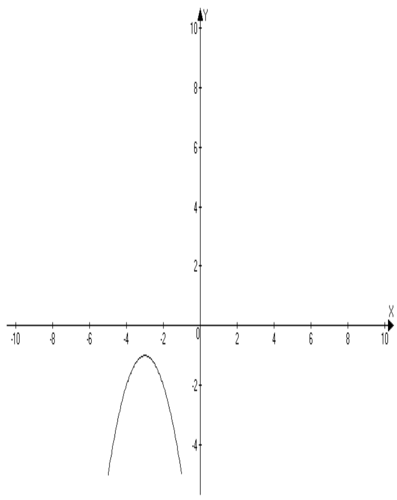
a>0, D<0



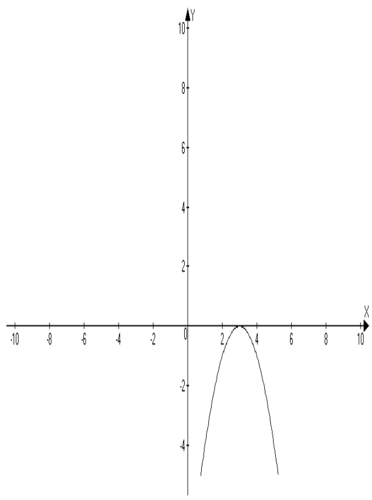
a>0, D=0



a<0, D>0



a<0, D<0



a<0, D=0

Якщо дискримінант квадратного тричлена ax^2+bx+c додатній, парабола перетинає вісь абсцис у двох точках, що є коренями рівняння: $ax^2+bx+c=0$. Якщо дискримінант дорівнює 0, то графік функції дотикається до осі абсцис, причому абсциса дотику є коренем рівняння $ax^2+bx+c=0$. Якщо дискримінант від'ємний, то графік функції не перетинає вісь абсцис.

4. Монотонні функції.

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на множині A. Якщо для двох довільних різних значень x_1 і x_2 аргументу, взятих із множини A, з нерівності $x_1 < x_2$ випливає, що:

а) $f(x_1) < f(x_2)$, то функція називається зростаючою;

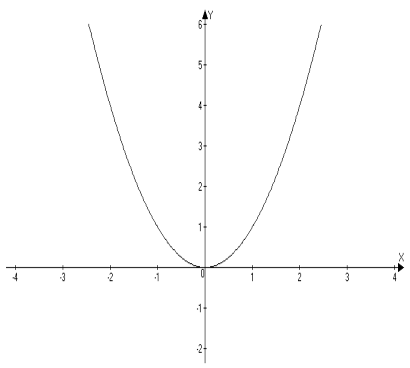
б) $f(x_1) \leq f(x_2)$, то функція називається неспадною;

в) $f(x_1) > f(x_2)$, функція називається спадною;

г) $f(x_1) \geq f(x_2)$, функція називається незростаючою.

Нехай функція не є монотонною в усій своїй області визначення, але цю область можна розбити на деяке (скінченне чи нескінченне) число проміжків, які не перетинаються і на кожному з яких функція монотонна. Такі проміжки називаються *проміжками монотонності функції.*

Так, функція $y = x^2$ не є монотонною на всій числовій осі, але має два проміжки монотонності: $(-\infty;0)$ та $(0;+\infty)$; на першому з них функція спадає, а на другому – зростає.



5. Парні та непарні функції.

Нехай функція $f(x)$ визначена на множині A. Функцію $f(x)$ називають парною, якщо $f(-x)=f(x),\ x \in A$ і непарною, якщо $f(-x)= -f(x),\ x \in A$.

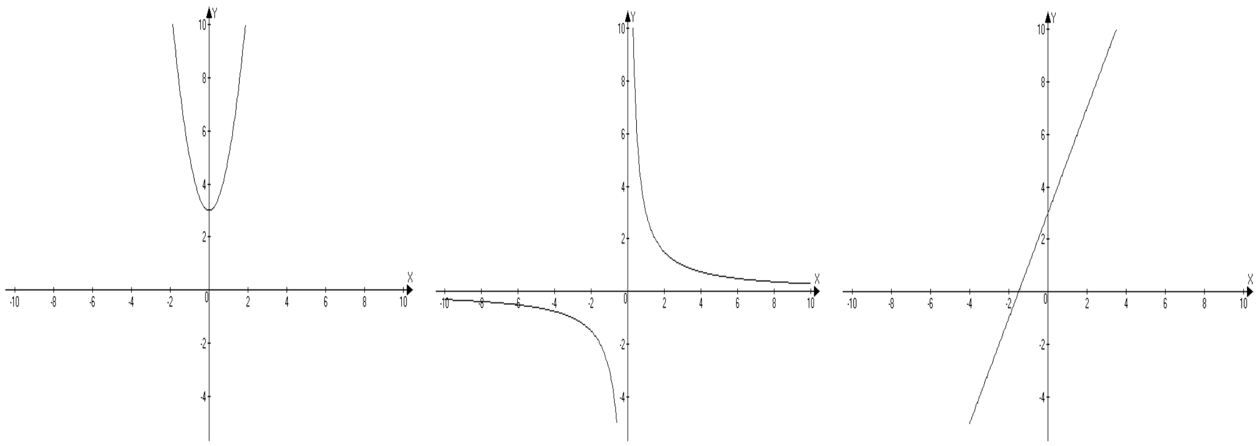
Графік парної функції симетричний відносно осі Oy, а непарної – відносно початку координат.

Приклади:

Функція $y = 2x^2 + 3$ є парною. Її графік симетричний відносно осі Oy.

Функція $y = \dfrac{3}{x}$ не непарною. Її графік симетричний відносно початку координат

Функція $y = 2x + 3$ не є парною та не непарною. Така функція називається ні парною ні непарною.



а) *б)* *в)*

6. Періодичні функції.

Функція *f(x),* визначена на всій числовій прямій, називається *періодичною,* якщо існує таке число *T,* що *f(x+T)= f(x)*. Число *T* називається *періодом* функції. Якщо *T* – період функції, то її періодами є також числа *кT,* де $k \in Z$. Найменший з додатних періодів функції, якщо такий існує, називається основним періодом функції.

З означення випливає, що для побудови графіка періодичної з періодом *T* функції досить побудувати її графік на довільному проміжку довжини *T,* а потім продовжити цей графік на всю область визначення, повторюючи його через кожний проміжок довжини *T.*

Приклад:

Періодичними є тригонометричні функції: $y = \sin x$, $y = \cos x$ з періодом 2π та $y = tgx$, $y = ctgx$ з періодом π .

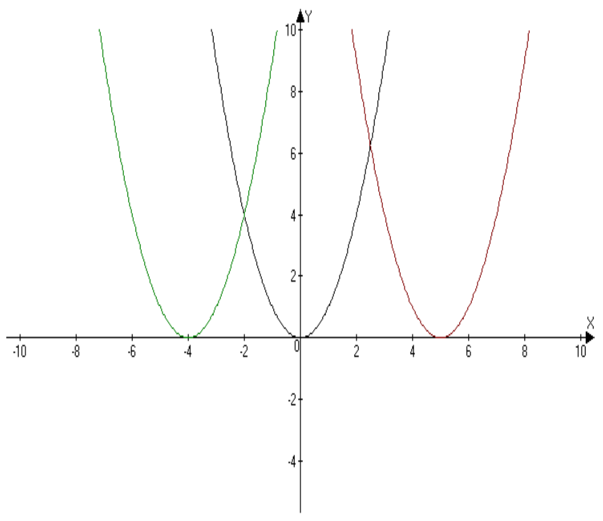
Періодичні функції відіграють важливу роль для математичного опису періодичних явищ, що спостерігаються в природі. Характерною особливістю цих явищ є періодичне повторення їх через певні проміжки часу. Прикладами можуть бути рух маятника навколо осі, рух небесних тіл (планети рухаються по еліптичних орбітах), робота майже всіх машин і механізмів пов’язана з періодичним рухом (рух поршнів, шатунів тощо).

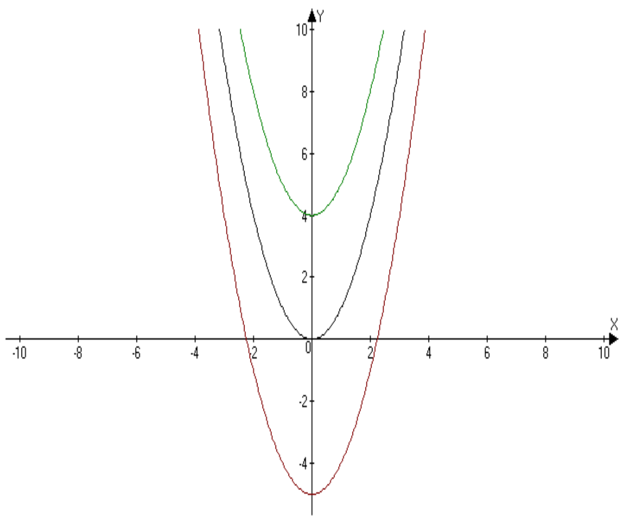
7. Перетворення графіка функцій.

Графіки основних елементарних функцій треба пам’ятати. Перетворюючи їх можна дістати графіки багатьох інших функцій. Нехай відомо графік функції *y = f(x)*, розглянемо деякі перетворення цього графіка.

1. Графік функції $y = f(x) + b$ дістаємо паралельним перенесенням $y = f(x)$ вздовж осі *Oy* на величину, що дорівнює b.

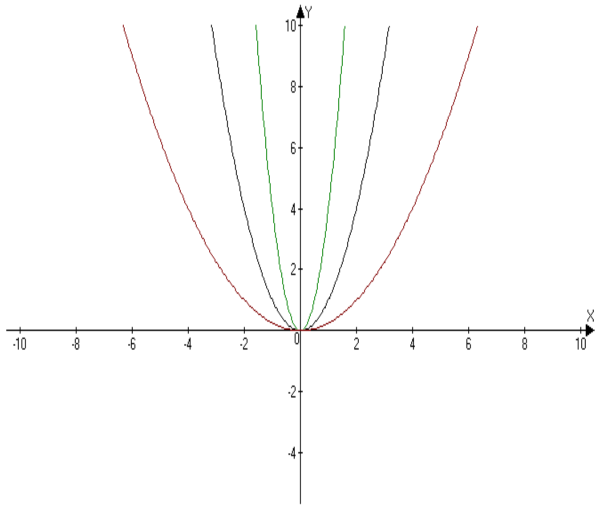
2. Графік функції $y = f(x + a)$ дістаємо паралельним перенесенням $y = f(x)$ вздовж осі *Ox* на величину, що дорівнює *a*.

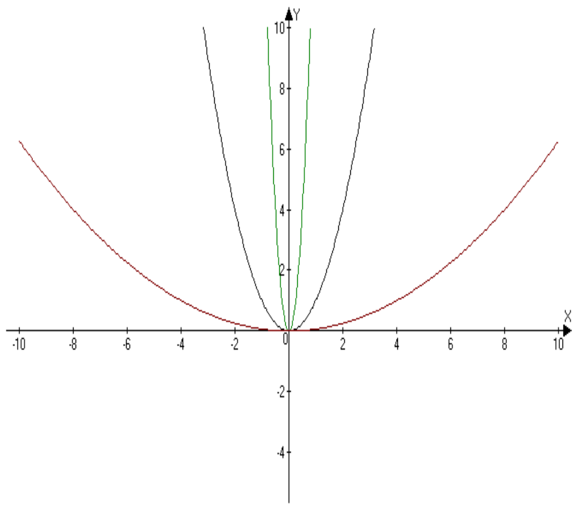




3. Графік функції $y = cf(x)$, $c \neq 0$ дістаємо з графіка функції $y = f(x)$ при $0<c<1$ за допомогою стискування в $\frac{1}{c}$ разів ординат останнього, а при $c>1$ за допомогою розтягування в с разів його ординат із збереженням відповідних абсцис.

4. Графік функції $y = f(kx)$, $k \neq 0$ дістаємо з графіка функції $y = f(x)$ при *0<k<1* за допомогою збільшенням в $\dfrac{1}{k}$ разів абсцис його точок, а при *k>1* зменшенням в k разів абсцис його точок із збереженням їхніх ординат.

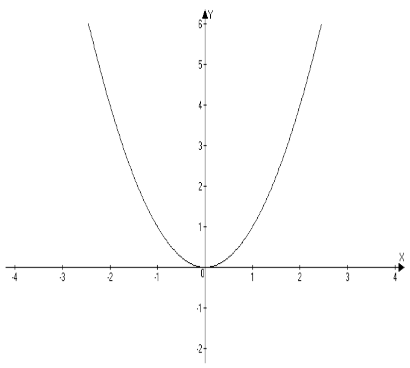




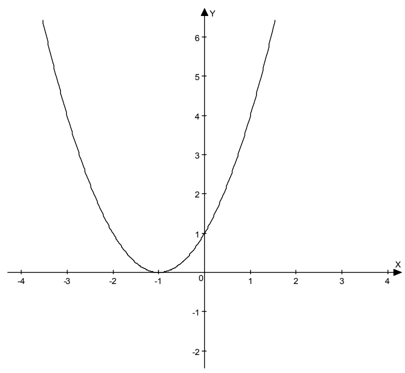
<u>Приклад:</u> Користуючись графіком функції $y = x^2$, побудувати графік функції $y = (x+1)^2 + 1$.

Розв'язання:

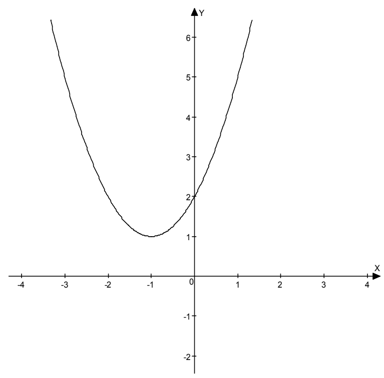
Виходячи з графіка функції $y = x^2$ (*рис. а*), спочатку побудуємо графік функції $y = (x+1)^2$ перенесенням графіка $y = x^2$ відносно осі Ох вліво на 1 одиницю (*рис. б*). А потім $y = (x+1)^2$ перенесемо вгору на 1 одиницю (*рис. в*).



а)



б)



в)

Практичне заняття 5.

Функція. Основні елементарні функції

Знайти значення функції у вказаних точках:

54. $y=\dfrac{1}{x^2-x}$ у точках –1; 0,5; 2;

55. $y=\sqrt{5-2x}$ у точках 0; 1; 2,5;

56. $y=arcsin\dfrac{x}{4}$ у точках –2; 4; 2;

57. $y=sin\dfrac{x}{2}$ у точках $\dfrac{\pi}{3}$; $\dfrac{\pi}{2}$; π.

58. $y=\dfrac{1}{x}+\lg x$ у точках 0,1; 1; 10.

Знайти область визначення функції

59. $y=\dfrac{1}{x^2-x}$;

70. $y=\sqrt{5-2x}$;

71. $y=\dfrac{2x}{x^2-3x+2}$;

72. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4x}}$;

73. $y=\sqrt{x^2-4x+3}$;

74. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-3x+2}}$;

75. $y=arcsin\dfrac{x}{4}$;

76. $y=\dfrac{1}{\lg x}+\sqrt{2+x}$;

77. $y=\sqrt{3-x}+arcsin\dfrac{3-2x}{5}$;

78. $y=\sqrt{x-1}+\sqrt{1-x}+\sqrt{x^2+1}$;

79. $y=\dfrac{1}{4-x^2}+\lg\left(x^3-x\right)$;

80. $y=\sqrt{sinx}+\sqrt{16-x^2}$.

Користуючись графіком функції $y=x^2$, побудувати графіки функцій:

81. $y=2x^2+2x+2$;

82. $y=2x^2-2x+4$;

83. $y=-x^2+2x+8$;

84. $y=-x^2+4x+10$;

85. $y=x^2+x+1$;

86. $y=x^2-6x+8$.

Побудувати графіки функцій:

87. $y=\begin{cases}1-x, & x\in(-\infty;0]\\ 1, & x\in(0;\infty)\end{cases}$;

88. $y=\begin{cases}x^2, & x\in(-\infty;2]\\ 4, & x\in(2;\infty)\end{cases}$;

89. $y=\begin{cases}x^2+1, & x\in(-\infty;0]\\ x^2-1, & x\in(0;\infty)\end{cases}$.

Лекція 6.

Границя функції.

1. Границя функції.
2. Невизначеність типу $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ від раціональних дробів.
3. Невизначеність типу $\left[\frac{0}{0}\right]$ від раціональних дробів.
4. Невизначеність типу $\left[\frac{0}{0}\right]$ від ірраціональних дробів.
5. Невизначеність типу $[\infty - \infty]$.
6. Перша визначна границя.
7. Друга визначна границя.

1. Границя функції.

Стале число a називають границею змінної величини x, якщо для будь-якого насамперед заданого числа $\varepsilon \geq 0$ можна вказати таке значення змінної x, що всі наступні значення змінної будуть задовольняти нерівності $|x-a| \leq \varepsilon$.

Якщо число a є границею змінної величини x, то говорять, що x прямує до границі a, і пишуть $x \to a$ або $\lim\limits_{x \to a} x = a$.

Границя сталої величини дорівнює самій сталій, тобто $\lim\limits_{x \to a} C = C$. Із визначення границі змінної слідує, що змінна величина не може мати двох границь, це число єдине.

Озн. Границею функції $y = f(x)$ при x, що прямує до a, називається таке число b, якщо для будь-якого числа $\varepsilon \geq 0$ існує число $\delta \geq 0$, таке, що для всіх x, які задовольняють нерівність $0 \leq |x-a| \leq \delta$ випливає $|f(x) - b| \leq \delta$.

Позначають $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

В теорії границь нуль – це мале число, а нескінченність – велике.

Зауваження: $\frac{a}{0}=\infty$; $\frac{a}{\infty}=0$.

2. Невизначеність типу $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ від раціональних дробів.

Для розкриття невизначеності $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ необхідно чисельник і знаменник поділити на x^n, де $n-$ найбільше значення степеня.

<u>Приклад:</u> $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+5x+6}{7x^2+9x+4}=\left[\frac{3\cdot\infty^2+5\cdot\infty+6}{7\cdot\infty^2+9\cdot\infty+4}\right]=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Найбільше значення степеня n=2, тому ділимо чисельник і знаменник на x^2:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^2}{x^2}+\frac{5x}{x^2}+\frac{6}{x^2}}{\frac{7x^2}{x^2}+\frac{9x}{x^2}+\frac{4}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}{7+\frac{9}{x}+\frac{4}{x^2}}=\left[\frac{3+\frac{5}{\infty}+\frac{6}{\infty^2}}{7+\frac{9}{\infty}+\frac{4}{\infty}}\right]=\frac{3+0+0}{7+0+0}=\frac{3}{7}.$$

3. Невизначеність типу $\left[\frac{0}{0}\right]$ від раціональних дробів.

Для розкриття невизначеності $\left[\frac{0}{0}\right]$ від раціональних дробів необхідно розкласти чисельник і знаменник на множники і однакові скоротити.

<u>Приклад:</u> $\lim\limits_{x\to1}\frac{3x^2+5x-8}{3x^2-5x+2}=\frac{3\cdot1^2+5\cdot1-8}{3\cdot1^2-5\cdot1+2}=\left[\frac{0}{0}\right]$.

Розкладаємо квадратичні вирази на множники за теоремою Вієта і отримаємо:

$$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(3x+8)}{(x-1)(3x-2)}=\lim_{x\to1}\frac{3x+8}{3x-2}=\frac{3\cdot1+8}{3\cdot1-2}=\frac{11}{1}=11,$$ (скоротили на $x-1$).

4. Невизначеність типу $\left[\frac{0}{0}\right]$ від ірраціональних дробів.

Для розкриття невизначеності $\left[\frac{0}{0}\right]$ від ірраціональних дробів необхідно позбавитись від ірраціональності помноживши чисельник і знаменник на спряжений вираз. Спряженими називають такі ірраціональні вирази, які при множенні один на інший утворюють раціональні вирази.

Приклад: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}}{x}=\dfrac{\sqrt{4-0}-\sqrt{4+0}}{0}=\left[\dfrac{0}{0}\right].$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}}{x}\cdot\frac{\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x}}{\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4-x-4-x}{x\cdot(\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x})}=\lim_{x\to 0}\frac{-2x}{x\cdot(\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x})}=\lim_{x\to 0}\frac{-2}{\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x}}=$$

$$=\frac{-2}{\sqrt{4}+\sqrt{4}}=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}.$$

5. Невизначеність типу $[\infty-\infty]$.

Для розкриття невизначеності $[\infty-\infty]$ необхідно вираз представити у вигляді дробу $\frac{a}{1}$; в утвореному дробі помножити чисельник і знаменник на спряжений вираз. В подальшому позбавитися утвореної невизначеності $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

Приклад: $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{16x^2+10x+5}-4x)=\left[\sqrt{\infty}-\infty\right]=[\infty-\infty].$

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{16x^2+10x+5}-4x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{16x^2+10x+5}-4x}{1}\cdot\frac{\sqrt{16x^2+10x+5}+4x}{\sqrt{16x^2+10x+5}+4x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{16x^2+10x+5-16x^2}{\sqrt{16x^2+10x+5}+4x}=\lim_{x\to\infty}\frac{10x+5}{\sqrt{16x^2+10x+5}+4x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

Поділимо кожен елемент чисельника і знаменника на x, під коренем на x^2:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{10x+5}{\sqrt{16x^2+10x+5}+4x}=\lim_{x\to\infty}\frac{10+\frac{5}{x}}{\frac{\sqrt{16x^2+10x+5}}{x}+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{10+\frac{5}{x}}{\sqrt{\frac{16x^2+10x+5}{x^2}}+4}=$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{10 + \frac{5}{x}}{\sqrt{16 + \frac{10}{x} + \frac{5}{x^2}} + 4} = \frac{10 + \frac{5}{\infty}}{\sqrt{16 + \frac{10}{\infty} + \frac{5}{\infty^2}} + 4} = \frac{10 + 0}{\sqrt{16 + 0 + 0} + 4} =$$

$$\frac{10}{\sqrt{16} + 4} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

6. Перша визначна границя.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad (1)$$

<u>Приклад:</u> $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 7x}{3x}$.

Скористаємося першою визначною границею: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. Введемо заміну $7x = y \Rightarrow y \to 0$ при $x \to 0$.

Маємо: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 7x}{3x} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\sin y}{3 \cdot \frac{y}{7}} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{7}{3} \cdot \dfrac{\sin y}{y} = \dfrac{7}{3} \cdot 1 = \dfrac{7}{3}$.

7. Друга визначна границя.

$$\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^{an+в} = e^a \text{ , } e \approx 2{,}72 \qquad (2)$$

<u>Приклад:</u> $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x-3}{x+2} \right)^{2x-1}$.

Безпосередня підстановка $x = \infty$ дає невизначеність $\left[1^{\infty}\right]$, тому скористаємося другою визначною границею: $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \dfrac{1}{n})^{an+в} = e^a$.

Введемо заміну $1 + \dfrac{1}{n} = \dfrac{x-3}{x+2}$. Зведемо до спільного знаменника і виразимо x через n: $x = -5n - 2$. При чому, якщо $x \to \infty$, то $n \to -\infty$:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x-3}{x+2} \right)^{2x-1} = \lim_{n\to-\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{2\cdot(-5n-2)-1} = \lim_{n\to-\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-10n-4-1} = e^{-10} = \frac{1}{e^{10}}.$$

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 6.

Границя функції

Обчислити наступні границі:

90. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x+1}$;

91. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\sqrt{x+2}-1\right)$;

92. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2+x-2}$;

93. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-8}{x^2+x-6}$;

94. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-x+8}{x^2+5x-6}$;

95. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+6x+3}{x^3+x+9}$;

96. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-8}{x^2+x-6}$;

97. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-x+8}{x^2+5x-6}$;

98. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-1}{\sqrt{9x^2-6x}}$;

99. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-1}{\sqrt{x}-1}$;

100. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-1}{\sqrt{4x}-1}$;

101. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x+2}{2x^3-2}$;

102. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+8x+22}{2x^3-2}$;

103. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x+4}{2x^2+3x-2}$;

104. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+6x+3}{5x^3+2x+1}$;

105. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^5-4x+3}{\sqrt{4x^{10}+4x^2}}$;

106. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^5-4x+3}{\sqrt{x^9+4x^2}}$;

107. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-7x}{\sqrt{x}-2x}$;

108. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-7x+9}{2x}$;

109. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^2-8}{3x^2+2x-6}$;

110. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^2-8}{3x^4+2x^2-6x}$;

111. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$;

112. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4}$;

113. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2+x-2}$;

114. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^4-1}$;

115. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{\sqrt{x}-2}$;

116. $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{9-x}{3-\sqrt{x}}$;

117. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4x+3}{x-1}$;

118. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+3x+2}{2x^2+3x-2}$;

119. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{\sqrt{x}-1}$;

120. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2+x-6}$;

121. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-5}{2-\sqrt{x-1}}$;

122. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{1-\sqrt{x^2+1}}$;

123. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+2}{\sqrt{x+6}-2}$;

124. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{x+3}}{x}$;

125. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x+2}-3}{7-x}$;

126. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}$;

127. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+16}-4}{x^2}$;

128. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-x)$;

129. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2-2})$;

ЛЕКЦІЯ 7.

Основні правила та формули диференціювання

1. Поняття похідної.

2. Механічний та геометричний зміст похідної.

3. Основні формули диференціювання.

4. Диференціал функції.

5. Особливі випадки диференціювання:

а) похідна неявної функції;

б) похідна функції, заданої параметрично;

в) похідна показникової функції;

г) похідна логарифмічної функції.

1. Поняття похідної.

Поняття похідної є одним з основних понять математичного аналізу. Розділ математики, в якому вивчається поняття похідної та її застосування до дослідження функцій, називають диференціальним численням.

У загальних рисах побудову диференціального числення було завершено у працях англійського фізика, астронома та математика І. Ньютона (1643–1727) та німецького філософа та математика Г. Лейбніца (1646–1716) до кінця XVII ст. Ньютон прийшов до поняття похідної, розглядаючи задачу про миттєву швидкість матеріальної точки, а Лейбніц під час розв'язування задачі про дотичну до кривої.

Строге обґрунтування диференціального числення на основі теорії границь дав на початку XIX століття французький математик О. Коші.

Озн. Похідною функції в точці x_0 називається граничне відношення приросту функції в точці x_0 до приросту аргументу в цій же точці, якщо останній прямує до нуля.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' \qquad (1)$$

Виходячи з означення, можна отримати такий алгоритм знаходження похідної $f'(x)$ у точці x:

1) задайте приріст аргументу $\Delta x \neq 0$ і запишіть значення функції, що відповідає значенню аргументу $x + \Delta x$: $f(x + \Delta x)$;

2) знайдіть приріст функції, який відповідає приросту аргументу Δx: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

3) знайти границю: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$.

2. Механічний та геометричний зміст похідної.

Задачі про миттєву швидкість та дотичну до кривої дають механічний та геометричний зміст похідної.

Механічний зміст похідної: величина миттєвої швидкості в момент часу t_0 дорівнює значенню похідної від шляху у точці t_0. Тобто $v(t_0) = s'(t_0)$.

Геометричний зміст похідної: похідна $f'(x)$ функції $f(x)$ у точці x_0 є значенням кутового коефіцієнта дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0.

Тобто $k = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$.

Рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці $M_0(x_0;\ y_0)$ має вигляд: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

3. Основні формули диференціювання.

Запишемо основні правила та формули диференціювання:

функція	похідна
$y = c \cdot u$	$y' = c \cdot u'$
$y = u + v$	$y' = u' + v'$
$y = u \cdot v$	$y' = u' \cdot v + u \cdot v'$
$y = \dfrac{u}{v}$	$y' = \dfrac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$

№	функція	похідна	№	функція	похідна
1.	$y = C(const)$	$y' = 0$	2.	$y = x$	$y' = 1$
3.	$y = x^n$	$y' = n \cdot x^{n-1}$	4.	$y = \sqrt{x}$	$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
5.	$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$	6.	$y = e^x$	$y' = e^x$
7.	$y = \log_a x$	$y' = \dfrac{1}{x \ln a}$	8.	$y = \ln x$	$y' = \dfrac{1}{x}$
9.	$y = \sin x$	$y' = \cos x$	10.	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
11.	$y = tgx$	$y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	12.	$y = ctgx$	$y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
13.	$y = \arcsin x$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	14.	$y = arccosx$	$y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
15.	$y = arctgx$	$y' = \dfrac{1}{1 + x^2}$	16.	$y = arcctgx$	$y' = -\dfrac{1}{\cos^2 x}$

Приклад: Знайти похідні вказаних функцій:

а) $y = 4x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 + 7$; б) $y = \sqrt[7]{x^3} + \dfrac{4}{5x^{13}}$; в) $y = \cos x \cdot \log_9 x$;

г) $y = \dfrac{\arcsin x}{\ln x}$; д) $y = \sqrt{tg(x^3 - 4x)}$.

Розв'язання:

Для знаходження похідних функцій користуємося таблицею похідних (Табл. 1 додатку).

а) $y = 4x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 7$.

$y' = 4 \cdot 3 \cdot x^{3-1} - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x^{2-1} + 0 = 12x^2 - x$;

б) $y = \sqrt[7]{x^3} + \frac{4}{5x^{13}}$.

Скористаємося властивостями степеня $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$, $\frac{1}{a^m} = a^{-m}$, отримаємо: $y = \sqrt[7]{x^3} + \frac{4}{5x^{13}} = x^{\frac{3}{7}} + \frac{4}{5}x^{-13}$.

Тоді похідна функції $y' = \frac{3}{7} \cdot x^{\frac{3}{7}-1} + \frac{4}{5} \cdot (-13) \cdot x^{-13-1} = \frac{3}{7}x^{-\frac{4}{7}} - \frac{52}{5}x^{-14} = \frac{3}{7\sqrt[7]{x^4}} - \frac{52}{5x^{14}}$.

в) $y = \cos x \cdot \log_9 x$.

Скористаємося формулою похідної добутку: $(uv)' = u'v + uv'$, тоді $y' = (\cos x)' \cdot \log_9 x + \cos x \cdot (\log_9 x)' = -\sin x \cdot \log_9 x + \cos x \cdot \frac{1}{x \ln 9}$

г) $y = \frac{\arcsin x}{\ln x}$.

Скористаємося формулою похідної частки: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, тоді

$$y = \frac{(\arcsin x)' \cdot \ln x - \arcsin x \cdot (\ln x)'}{\ln^2 x} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \ln x - \arcsin x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2 x}.$$

д) $y = \sqrt{tg(x^3 - 4x)}$. Враховуючи, що функція складена, то її похідна дорівнюватиме: $y' = \frac{1}{2\sqrt{tg(x^3 - 4x)}} \cdot \frac{1}{\cos^2(x^3 - 4x)} \cdot (3x^2 - 4)$.

4. Диференціал функції.

Озн. Функція називається диференційованою в точці х, якщо її приріст в цій точці можна подати у вигляді: $\Delta f(x) = A(x)\Delta x + \alpha(x,\Delta x)\Delta x$, де $A(x)$ – дійсне число, а $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(x,\Delta x) = 0$.

Маючи таке означення можна сформулювати необхідну і достатню умову диференційованості функції.

Теорема: Щоб функція $f(x)$ була диференційована у точці x_0, необхідно і достатньо, щоб вона в цій точці мала похідну.

Озн. Якщо функція $f(x)$ диференційована у точці x_0, то вираз $f'(x)\Delta x$ називають диференціалом даної функції у точці x і позначають $df(x)$ або dy.

5. Особливі випадки диференціювання.

а) Похідна неявної функції.

Якщо функція задана неявно $f(xy) = a$, необхідно знайти похідну від лівої та правої частини, пам'ятаючи, що y є деякою функцією від x.

Приклад: Знайти похідну функції $\sin(x+y) + \ln(x-y) = 4$.

Дана функція задана неявно, тому знаходимо похідну від лівої та правої частини, пам'ятаючи, що y є деякою функцією від x:

$$(\sin(x+y) + \ln(x-y))' = 4' \Rightarrow$$

$$\left(\sin(x+y)\right)' + \left(\ln(x-y)\right)' = 0 \Rightarrow \cos(x+y)\cdot(1+y') + \frac{1-y'}{x-y} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(x+y) + \frac{1}{x-y} + y'(\cos(x+y) - \frac{1}{x-y}) = 0 \Rightarrow y' = -\frac{\cos(x+y) + \dfrac{1}{x-y}}{\cos(x+y) - \dfrac{1}{x-y}}.$$

б) Похідна функції, заданої параметрично.

Якщо функція задана параметрично, тобто у вигляді: $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$, то похідна обчислюється за формулою: $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.

<u>Приклад:</u> Знайти похідну функції $\begin{cases} x=\cos(t^2+1) \\ y=\sin(t^2+1) \end{cases}$.

Функція задана параметрично, тому похідна функції:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{-\sin(t^2+1)\cdot 2t}{\cos(t^2+1)\cdot 2t} = -tg(t^2+1).$$

<u>в) Похідна показникової функції.</u>

Для знаходження похідної, що подана у вигляді $f(x)=u(x)^{v(x)}$ необхідно про логарифмувати функцію зліва та справа за основою *е* і перейти до знаходження похідної добутку.

<u>Приклад:</u> Знайти похідну функції $y=\left(x^3+3x^2+4\right)^{\sin 4x}$.

Функція задана у вигляді $f(x)=u(x)^{v(x)}$, тому прологарифмуємо функцію зліва та справа за основою *е*:

$\ln y = \ln\left(x^3+3x^2+4\right)^{\sin 4x}$, або $\ln y = \sin 4x \cdot \ln\left(x^3+3x^2+4\right)$;

Для знаходження похідної скористаємося формулою добутку:

$$y'\cdot\frac{1}{y} = 4\cos 4x\cdot\ln\left(x^3+3x^2+4\right)+\sin 4x\cdot\frac{1}{x^3+3x+4}\cdot\left(3x^2+6x\right);$$

Тоді шукана похідна:

$$y' = 4\cos 4x\cdot\left(x^3+3x^2+4\right)^{\sin 4x}\cdot\ln\left(x^3+3x^2+4\right)+\sin 4x\cdot\frac{3x^2+6x}{x^3+3x+4}\cdot\left(x^3+3x^2+4\right)^{\sin 4x}.$$

<u>г) Похідна логарифмічної функції.</u>

Якщо функція подана у вигляді $\log_{\psi(x)}\varphi(x)$ необхідно перейти до нової основи логарифма (наприклад *е*), скориставшись формулою: $\log_a b = \dfrac{\ln b}{\ln a}$.

<u>Приклад:</u> Знайти похідну функції $y=\log_{\sin x}(1+\sqrt{x})$.

Перейдемо до нової основи логарифма (наприклад *e*), скориставшись формулою: $\log_a b = \dfrac{\ln b}{\ln a}$, тоді

$$y = \log_{\sin x}(1+\sqrt{x}) = \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\ln\sin x} \Rightarrow y' = \frac{(\ln(1+\sqrt{x}))' \cdot \ln\sin x - \ln(1+\sqrt{x})\cdot(\ln\sin x)'}{(\ln\sin x)^2} =$$

$$\frac{\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\ln\sin x - \ln(1+\sqrt{x})\cdot\dfrac{1}{\sin x}\cdot\cos x}{\ln^2\sin x} =$$

$$\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\sin x\ln\sin x - \cos x(1+\sqrt{x})\ln(1+\sqrt{x})}{(1+\sqrt{x})\cdot\sin x\cdot\ln^2\sin x}.$$

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 7.

Основні правила та формули диференціювання

Знайти похідні вказаних функцій:

130. $y = 4x^5 - \dfrac{1}{2}x^2 + 2$;

131. $y = \dfrac{1}{4}x^8 - x^2 + \sqrt{x}$;

132. $y = 4x^3 - x^2 + x$;

133. $y = 4x^6 - x^7 + 3x$;

134. $y = x^2 - \dfrac{1}{5}x^5$;

135. $y = 2x^3 - \dfrac{1}{4}x^2 - 4$;

136. $y = 4x^2 - 7x + 2$;

137. $y = 2x^3 - x^2 + \dfrac{1}{x}$;

138. $y = 2x^7 - \dfrac{1}{6}x^6 - 2$;

139. $y = x^3 - \dfrac{1}{7}x^7$;

140. $y = \sqrt[4]{x^3} + \dfrac{2}{x^3}$;

141. $y = \sqrt[3]{x^5} + \dfrac{6}{x^3}$;

142. $y = \sqrt[6]{x^5} + \dfrac{3}{x^6}$;

143. $y = \sqrt[7]{x^6} + \dfrac{4}{x^7}$;

Знайти похідні функцій, користуючись формулою добутку:

144. $y = e^x \cdot \sin x$;

145. $y = e^x \cdot \sqrt[3]{x}$;

146. $y = cosx \cdot \ln x$;

147. $y = cosx \cdot \log_2 x$;

148. $y = x \cdot \log_7 x$;

149. $y = arccosx \cdot \log_5 x$;

150. $y = \sin x \cdot 3^x$;

151. $y = ctgx \cdot \sqrt{x}$;

152. $y = tgx \cdot \sqrt[3]{x}$;

153. $y = e^x \cdot \ln x$.

Знайти похідні функцій, користуючись формулою частки:

154. $y=\dfrac{\sqrt{x}}{tgx}$;

155. $y=\dfrac{x^6-25}{\sqrt{x}}$;

156. $y=\dfrac{arctgx}{x}$;

157. $y=\dfrac{tgx}{\sqrt{x}}$;

158. $y=\dfrac{x}{\ln x}$;

159. $y=\dfrac{x^2}{\sin x}$;

160. $y=\dfrac{e^x}{\cos x}$;

161. $y=\dfrac{e^x-5}{\arccos x}$;

162. $y=\dfrac{5x}{\cos x}$;

163. $y=\dfrac{4x^4-9x^2}{\sqrt{x}}$.

Знайти похідні складених функцій:

164. $y=5^{\arcsin 4x}$;

165. $y=\sqrt{\ln 2^x}$;

166. $y=\sqrt{\cos x}$;

167. $y=\sqrt{\sin x}$;

168. $y=\sqrt{e^{3x}}$;

169. $y=\sqrt{x^2-x}$;

170. $y=\sqrt{4x^2-3}$;

171. $y=\ln\sqrt{x}$;

172. $y=\ln\sqrt{e^x}$;

173. $y=2^{\sin 4x}$.

Знайти похідні функцій, заданих неявно:

174. $y^2x^2+x=3y$;

175. $x^2+xy^3+x=3y$;

176. $e^y-xy=4y^5$;

177. $\sin(x-y)+ctg(x+y)=2x$;

Знайти похідні функцій, заданих параметрично:

178. $\begin{cases} x=t^2+t \\ y=t^3-4 \end{cases}$;

179. $\begin{cases} x=3t^2+t-4 \\ y=t^3+6t-7 \end{cases}$;

180. $\begin{cases} x=\dfrac{1}{4}t^4+\dfrac{1}{2}t^3-11 \\ y=t^2-9t-3 \end{cases}$;

181. $\begin{cases} x=\ln\left(t^2+1\right) \\ y=\log_2\left(t^2+1\right) \end{cases}$;

Знайти похідні вказаних функцій:

182. $y=(1+\cos x)^{x^2-4}$;

183. $y=\left(x^2+3x\right)^{x^2-4}$;

184. $y=\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{x^2-4}$;

185. $y=\left(e^{-x}+\cos 7x\right)^x$;

Знайти похідні логарифмічних функцій:

186. $y=\log_x\left(x^3+x^2\right)$;

187. $y=\log_{\sin 4x}\left(x^3+3x^2+4\right)$;

188. $y=\log_{\sqrt{x+5x^2}}\left(3+\dfrac{4}{\sqrt{x}}\right)$;

189. $y=\log_{\left(x-2x^2\right)}\left(x+\dfrac{1}{2}x^2\right)$;

ЛЕКЦІЯ 8.

Застосування похідної

1. Застосування диференціалу до наближеного обчислення функції.
2. Означення максимуму та мінімуму функції.
3. Знаходження асимптот графіка функції.
4. Застосування похідної до дослідження динаміки функції.

1. Застосування диференціалу до наближеного обчислення функції.

Для більшості функцій існують значення x, при яких обмеження самої функції викликає певні труднощі. Наприклад: $\sqrt{37}$, $\sin 32^0$, $2^{1,73}$ тощо. Нехай x_0- одне із значень, для якого $y_0 = f(x_0)$ обчислюється елементарно. Існує x_1 значення, для якого $y_1 = f(x_1)$ знаходиться з великими труднощами (великий об'єм обчислень). Величина x_1 відрізняється від x_0 на величину Δx; $x_1 = x_0 + \Delta x$. Тоді між y_0 та y_1 існує свій приріст Δy, тобто $y_1 = y_0 + \Delta y$. Якби ми знали значення Δy, то y_1 могли б знайти без проблем. З поняття диференціала відомо, що при малих значеннях Δx приріст функції Δy наближено дорівнює приросту дотичної dy, проведеної до $f(x)$ в точці x_0. Тому $y_1 = y_0 + \Delta y \approx y_0 + dy = y_0 + y' \cdot \Delta x$, де y' знаходиться як тангенс кута нахилу дотичної в точці x_0. Тому y' є конкретним значенням похідної в точці x_0. Маємо робочу формулу:

$$y_1 \approx y_0 + y' \cdot \Delta x, \qquad (1)$$

точність якої збільшується зі зменшенням Δx.

Приклад: Знайти наближено значення функції:

а) $y = \sqrt[3]{5x^2 + 10x + 5}$ при $x = 4{,}03$.

б) $\sin 63^\circ$.

Розв'язання:

Значення функції обчислимо за формулою: $y \approx y(x_0) + y'(x_0) \cdot \Delta x$.

а) $y = \sqrt[3]{5x^2 + 10x + 5}$ при $x = 4{,}03$.

Нехай $x_0 = 4$, тоді $\Delta x = x - x_0 = 0{,}03$.

$$y(x_0)=\sqrt[3]{5\cdot 4^2+10\cdot 4+5}=\sqrt[3]{125}=5;$$
$$y'=\frac{10x+10}{3\sqrt[3]{(5x^2+10x+5)}};\; y'(4)=\frac{10\cdot 4+10}{3\sqrt[3]{(5\cdot 4^2+10\cdot 4+5)}}=\frac{50}{3\cdot 25}=\frac{2}{3};$$
$$y\approx y(x_0)+y'(x_0)\cdot\Delta x=5+\frac{2}{3}\cdot 0{,}03=5{,}01.$$

б) $\sin 63^\circ$.

Нехай $y=\sin x$, $x=63^\circ$, $x=60^\circ$, тоді $\Delta x=x-x_0=3^\circ=\dfrac{3\cdot 3{,}14}{180}=0{,}052$.

$$y(x_0)=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}=0{,}866;$$
$$y'(60^\circ)=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}=0{,}5;$$
$$\sin 60^\circ\approx y(x_0)+y'(x_0)\cdot\Delta x=0{,}866+0{,}5\cdot 0{,}052=0{,}892.$$

2. Означення максимуму та мінімуму функції.

Функція *f(x)* має в точці $x = x_0$ максимум, якщо значення функції в цій точці більше, ніж її значення в усіх точках, достатньо близьких до x_0.

Тобто, функція *f(x)* має максимум при $x = x_0$, якщо $f(x_0+\Delta x) < f(x_0)$, для будь-якого Δx – як додатного, так і від'ємного, але достатньо малих за абсолютною величиною.

Функція *f(x)* має в точці $x = x_0$ мінімум, якщо значення функції в цій точці менше, ніж її значення в усіх точках, достатньо близьких до x_0. Тобто, функція *f(x)* має мінімум при $x = x_0$, якщо $f(x_0+\Delta x) > f(x)$,для будь-якого Δx – як додатного, так і від'ємного, але достатньо малих за абсолютною величиною.

Якщо в деякій точці функція має максимум або мінімум, то говорять, що в цій точці має місце екстремум.

Слід пам'ятати:

1. Максимум (мінімум) не являється обов'язково найбільшим (найменшим) значенням, що приймає функція. Поза розглянутого околу точки x_0 функція може приймати більші (менші) значення, ніж в цій точці.

2. Функція може мати, .декілька максимумів і мінімумів.

3. Функція, що визначена на відрізку, може досягнути екстремуму тільки у

внутрішніх точках цього відрізка.

Необхідна умова екстремуму.

Якщо функція $f(x)$ має екстремум при $x = x_0$, то її похідна в цій точці дорівнює нулю, або нескінченості, або взагалі не існує. Із цього слідує, що точки екстремуму функції необхідно знаходити тільки серед тих, в яких її перша похідна $f'(x) = 0$, або не існує. Слід уяснити, що вказана ознака екстремуму є тільки необхідною, але не достатньою.

Вкажемо дві достатні умови існування екстремуму функції.

Перша достатня умова існування екстремуму функції.

Нехай точка $x = x_0$ є критичною точкою функції $f(x)$, а сама функція $f(x)$ неперервна та диференційована у всіх точках деякого інтервалу, який містить цю точку. Тоді:

1. Якщо при $x < x_0$ похідна функції $f'(x) > 0$, а при $x > x_0$ $f'(x) < 0$, то при $x = x_0$ має місце максимум, тобто якщо при переході зліва направо через критичну точку перша похідна змінює знак з плюса на мінус, то в цій точці функція досягає максимуму.

2. Якщо при $x < x_0$ похідна функції $f'(x) < 0$, а при $x > x_0$ $f'(x) > 0$, то при $x = x_0$ має місце мінімум, тобто, якщо при переході через критичну точку перша похідна функції змінює знак з мінуса на плюс, то в цій точці функція досягає мінімуму.

3. Якщо ж при переході через критичну точку перша похідна не змінює знак, то екстремуму немає.

Друга достатня умова існування екстремуму функції.

Якщо в точці $x = x_0$ перша похідна функції $f(x)$ дорівнює нулю: $f'(x)=0$, то при $x = x_0$ має місце максимум, якщо $f''(x) < 0$, та мінімум, якщо $f''(x) > 0$. Якщо ж $f''(x) = 0$, то необхідно розглянути першу достатню умову існування екстремуму.

Правило для дослідження функції на екстремум за допомогою першої похідної (перший спосіб).

Для дослідження функції на екстремум за першою похідною необхідно:

1. Знайти $f'(x)$ – першу похідну функції.

2. Розв'язати рівняння $f'(x) = 0$, а також визначити ті значення x, при яких $f'(x) = \infty$ або не існує (тобто: знайти критичні точки функції $f(x)$).

3. Всі критичні точки розташувати на числовій осі в порядку зростання їх абсцис.

4. В середині кожного із утворених інтервалів взяти будь-яку точку і встановити в цій точці знак першої похідної функції (похідна зберігає знак в кожному інтервалі між двома сусідніми критичними точками).

5. Розглянути знак $f'(x)$ в двох сусідніх точках, переходячи послідовно зліва направо від першого інтервалу до останнього. Якщо при такому переході знаки $f'(x)$ в двох сусідніх інтервалах різні, то екстремум в критичній точці є, і буде максимум, якщо знак змінюється з + на –, а мінімум, якщо знак змінюється з – на +. Якщо ж в двох сусідніх інтервалах має місце збереження знаку першої похідної, то екстремуму в розглянутій критичній точці немає.

6. Знайти значення функції в точках, де вона досягає екстремуму (екстремальні значення функції).

Правило для дослідження функції на екстремум за другою ознакою

(другий спосіб)

Для того, щоб дослідити на екстремум за другою похідною, необхідно:

1. Знайти $f'(x)$ – першу похідну функції.

2. Розв'язати рівняння $f'(x) = 0$.

3. Знайти $f''(x)$ – другу похідну функції.

4. Дослідити знак $f''(x)$ – другої похідної функції в кожній точці, що знайдено в пункті 2.

Якщо в розглянутій точці $f''(x) > 0$, то в цій точці буде мінімум, а якщо $f''(x) < 0$, то в цій буде максимум. Якщо в розглянутій точці $f''(x) = 0$, то дослідження необхідно провести за правилом першої похідної.

3. Знаходження асимптот графіка функції.

Озн. Асимптотою кривої називається така пряма, до якої необмежено наближається точки кривої при необмеженому віддаленні її від початку координат. Крива може наближатися до своєї асимптоти тими ж способами, як і змінна до своєї границі: залишаючись з однієї сторони від асимптоти або з різних сторін, кілька раз перетинаючи асимптоту і переходячи з однієї сторони на другу.

Розрізняють асимптоти: вертикальні, горизонтальні і похилі.

Для знаходження асимптот керуються наступними правилами:

а) Якщо при $x = a$ крива $y = f(x)$ має розрив ІІ-го роду, тобто якщо при $x \to a - 0$ або при $x \to a + 0$ функція прямує до нескінченості (того чи іншого знаку), то пряма $x = a$ являється вертикальною асимптотою;

б) Крива $\boldsymbol{y} = f(x)$ має горизонтальну асимптоту $y = b$ тільки в тому випадку, коли існує скінчена границя функції $f(x)$ при $x \to \infty$ або $x \to -\infty$, і ця границя дорівнює b, тобто, якщо $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$ або $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$.

в) Для знаходження похилої асимптоти $y = kx + b$ необхідно знайти невідомі коефіцієнти k і b за формулами:

$$k = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) \text{ та } b = \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - kx\right).$$

4. Застосування похідної до дослідження динаміки функції.

Загальне дослідження функції та побудову їх графіків зручно використовувати за наступною схемою:

1. Елементарні дослідження: знайти область визначення функції; точки перетину з осями координат; перевірити функцію на парність.

2. Знайти точки розриву функції та її односторонні границі.

3. Знаходження похилих асимптот.

4. Знайти точки екстремуму та інтервали зростання та спадання функції.

5. Побудувати графік функції, враховуючи всі одержані результати дослідження.

Приклад: Дослідити функцію і побудувати її графік: $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$.

Розв'язання:

1. Елементарні дослідження:

Область визначення функції : $x \in (-\infty;-1) \cup (-1;1) \cup (1;\infty)$.

Точки перетину графіка функції з осями координат:

$(0;0)$ − єдина точка перетину з віссю абсцис та ординат.

Функція непарна, так як: $y(-x) = \dfrac{-x}{(-x)^2 - 1} = -\dfrac{x}{x^2 - 1}$. Отже графік функції симетричний відносно початку координат.

2. Дослідження точок розриву:

$$\lim_{x \to -1+0} \frac{x}{x^2 - 1} = \frac{-1}{-0} = \infty; \quad \lim_{x \to -1-0} \frac{x}{x^2 - 1} = \frac{-1}{0} = -\infty;$$

$$\lim_{x \to 1+0} \frac{x}{x^2 - 1} = \frac{1}{0} = \infty; \quad \lim_{x \to 1-0} \frac{x}{x^2 - 1} = \frac{1}{-0} = -\infty.$$

Отже, $x = -1$ і $x = 1$ − вертикальні асимптоти.

3. Знаходження похилих асимптот:

Похилі асимптоти визначатимемо за формулою: $y = kx + b$. Для цього знайдемо невідомі коефіцієнти k і b:

$$k = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2 - 1} = \left[\frac{0}{\infty} \right] = 0.$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}=\frac{0}{1}=0.$$

Тоді рівняння асимптоти набуватиме вигляду: $y=0$.

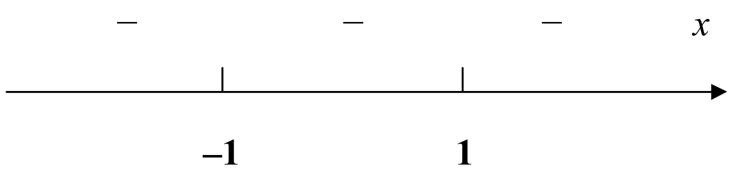
4. Дослідження функції на монотонність:

Знайдемо першу похідну функції:

$$y'=\frac{\left(x^2-1\right)-x\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{x^2-2x^2-1}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{-1-x^2}{\left(x^2-1\right)^2}=-\frac{1+x^2}{\left(x^2-1\right)^2}.$$

Прирівняємо першу похідну до нуля: $-\frac{1+x^2}{\left(x^2-1\right)^2}=0$.

Так як рівняння не має розв'язків, то критичних точок першого роду не має. Тому на числовій осі *0X* позначаємо лише точки розриву функції:



Отже, функція спадає на всій області визначення.

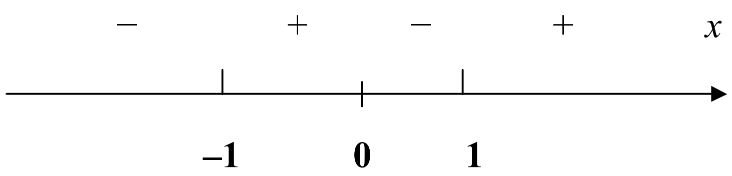
5. Дослідження на опуклість та ввігнутість:

Знайдемо другу похідну функції:

$$y''=\frac{-2x\cdot\left(x^2-1\right)^2+\left(1+x^2\right)\cdot 2\left(x^2-1\right)\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^4}=\frac{2x\cdot\left(x^2-1\right)\cdot\left(-x^2+1-2+2x^2\right)}{\left(x^2-1\right)^4}=$$

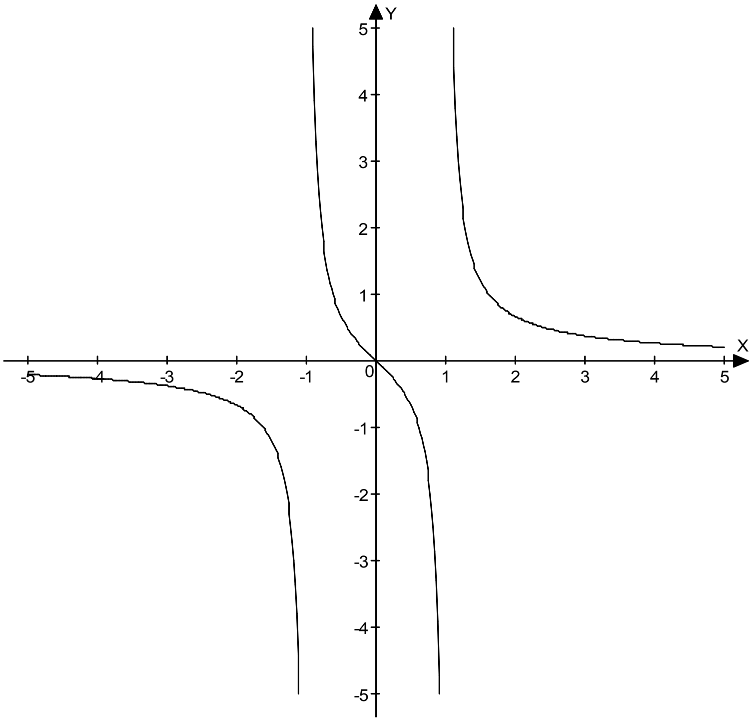
$$=\frac{2x\cdot\left(x^2+3\right)}{\left(x^2-4\right)^3}.$$

Прирівняємо другу похідну до нуля: $\frac{2x\cdot\left(x^2-2x-1\right)}{\left(x^2-4\right)^3}=0$, $x=0$ − критична точка другого роду. Визначимо знаки другої похідної на отриманих інтервалах:



Отже, функція опукла вниз на проміжках: $x \in (-1;0) \cup (1;\infty)$, опукла вгору – $x \in (-\infty;-1) \cup (0;1)$. Точка (0; 0) – точка перегину.

6. Побудова графіка функції:



ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 8.

Застосування похідної

Знайти наближено значення функцій:

190. $y = \sqrt[5]{4x^2 - 2x - 1}$, $x = 0{,}98$;

191. $y = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2 + 3x + 2}$, $x = 1{,}99$;

192. $y = \dfrac{1}{\sqrt{2x^2 + 10x - 8}}$, $x = 1{,}04$;

193. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 9x - 1}}$, $x = 1{,}24$;

194. $\sin 44^\circ$;

195. $tg 47^\circ$;

196. $ctg 85^\circ$;

197. $\sin 65^\circ$;

Знайти екстремуми функцій:

198. $y = x^2 - 2x + 3$;

199. $y = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$;

200. $y = x^3 - 9x^2 + 15x + 3$;

201. $y = -x^4 + 2x^2$;

Знайти інтервали монотонності та екстремуми функцій:

202. $y = 4x^2 - 6x$;

203. $y = 1 + x - x^3$;

204. $y = 4x^4 - 2x^2 + 2$;

205. $y = x + \dfrac{1}{x}$;

Знайти найбільше та найменше значення функції на зазначеному проміжку:

206. $y = 4x^4 - 2x^2 + 5$, $[-2;2]$;

207. $y = x + \sqrt{x}$, $[0;4]$;

208. $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$, $[-1;2]$;

209. $y = x^3 - 3x^2 + 6x - 2$, $[-1;1]$.

Дослідити функцію і побудувати її графік:

210. $y = \dfrac{x^2 + x}{x + 2}$;

211. $y = \dfrac{4x^2 - x}{x + 2}$;

212. $y = \dfrac{x + 2}{x^2 - 1}$;

213. $y = \dfrac{x^2}{x + 5}$;

214. $y = \dfrac{x^2 - 1}{x}$;

215. $y = \dfrac{3x}{x^2 - 4}$;

ЗАПИТАННЯ, ЩО ВИНОСЯТЬСЯ НА ЗАЛІК

1. Матриці.
2. Дії над матрицями.
3. Визначники.
4. Мінори. Алгебраїчні доповнення.
5. Обернена матриця.
6. Системи лінійних рівнянь. Матричний метод.
7. Метод Крамера.
8. Системи координат.
9. Відстань між двома точками.
10. Поділ відрізка пополам.
11. Площа трикутника.
12. Кутовий коефіцієнт прямої.
13. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом, яка проходить через задану точку.
14. Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки.
15. Рівняння прямої у загальному вигляді.
16. Координати точки перетину прямих.
17. Кут між двома прямими.
18. Умова паралельності прямих.
19. Умова перпендикулярності прямих.
20. Відстань від точки до прямої
21. Поняття функції.
22. Способи задання функцій.
23. Класифікація елементарних функцій: лінійна функція, обернена пропорційність, квадратична функція.
24. Монотонні функції.
25. Парні та непарні функції.
26. Періодичні функції.

27. Перетворення графіка функцій.

28. Границя функції.

29. Невизначеність типу $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ від раціональних дробів.

30. Невизначеність типу $\left[\frac{0}{0}\right]$ від раціональних дробів.

31. Невизначеність типу $\left[\frac{0}{0}\right]$ від ірраціональних дробів.

32. Невизначеність типу $[\infty - \infty]$.

33. Перша визначна границя.

34. Друга визначна границя.

34. Поняття похідної.

35. Механічний та геометричний зміст похідної.

36. Основні формули диференціювання.

37. Диференціал функції.

38. Особливі випадки диференціювання:

39. Застосування диференціалу до наближеного обчислення функції. 401. Означення максимуму та мінімуму функції.

41. Знаходження асимптот графіка функції.

42. Застосування похідної до дослідження динаміки функції.

ДОДАТКИ

Основні правила диференціювання

функція	похідна
$y = c \cdot u$	$y' = c \cdot u'$
$y = u + v$	$y' = u' + v'$
$y = u \cdot v$	$y' = u' \cdot v + u \cdot v'$
$y = \dfrac{u}{v}$	$y' = \dfrac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$

Основні формули диференціювання

№	функція	похідна	№	функція	похідна
1.	$y = C(const)$	$y' = 0$	2.	$y = x$	$y' = 1$
3.	$y = x^n$	$y' = n \cdot x^{n-1}$	4.	$y = \sqrt{x}$	$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
5.	$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$	6.	$y = e^x$	$y' = e^x$
7.	$y = \log_a x$	$y' = \dfrac{1}{x \ln a}$	8.	$y = \ln x$	$y' = \dfrac{1}{x}$
9.	$y = \sin x$	$y' = \cos x$	10.	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
11.	$y = tgx$	$y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	12.	$y = ctgx$	$y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
13.	$y = \arcsin x$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	14.	$y = arccosx$	$y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
15.	$y = arctgx$	$y' = \dfrac{1}{1+x^2}$	16.	$y = arcctgx$	$y' = -\dfrac{1}{\cos^2 x}$

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Конспекти лекцій та практичних занять для студентів денної форми навчання агрономічного факультету

О.П. Мельниченко