ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №9.

Тема: Границя функції. Застосування правил розкриття невизначеностей, утворених алгебраїчними виразами.

ПРАКТИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

П р и к л а д : Обчислити наступні границі:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5x+6}{7x^2+9x+4}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2+5x-8}{3x^2-5x+2}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}}{x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{16x^2+10x+5}-4x)$.

Розв'язання:

а) $$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+5x+6}{7x^2+9x+4}=\left[\frac{3\cdot\infty^2+5\cdot\infty+6}{7\cdot\infty^2+9\cdot\infty+4}\right]=\left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

Для розкриття невизначеності $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ необхідно чисельник і знаменник поділити на x^n, де $n-$ найбільше значення степеня. Найбільше значення степеня n=2, тому ділимо чисельник і знаменник на x^2:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^2}{x^2}+\frac{5x}{x^2}+\frac{6}{x^2}}{\frac{7x^2}{x^2}+\frac{9x}{x^2}+\frac{4}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}{7+\frac{9}{x}+\frac{4}{x^2}}=\left[\frac{3+\frac{5}{\infty}+\frac{6}{\infty^2}}{7+\frac{9}{\infty}+\frac{4}{\infty}}\right]=\frac{3+0+0}{7+0+0}=\frac{3}{7}.$$

Зауваження: $\dfrac{a}{0}=\infty$; $\dfrac{a}{\infty}=0$.

б) $$\lim_{x\to1}\frac{3x^2+5x-8}{3x^2-5x+2}=\frac{3\cdot1^2+5\cdot1-8}{3\cdot1^2-5\cdot1+2}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

Для розкриття невизначеності $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ від раціональних дробів необхідно розкласти чисельник і знаменник на множники і однакові скоротити.

Розкладаємо квадратичні вирази на множники за теоремою Вієта і отримаємо:

$$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(3x+8)}{(x-1)(3x-2)}=\lim_{x\to1}\frac{3x+8}{3x-2}=\frac{3\cdot1+8}{3\cdot1-2}=\frac{11}{1}=11,$$ (скоротили на $x-1$).

в) $$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}}{x}=\frac{\sqrt{4-0}-\sqrt{4+0}}{0}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

Для розкриття невизначеності $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ від ірраціональних дробів необхідно позбавитись від ірраціональності помноживши чисельник і знаменник на спряжений вираз. Спряженими називають такі ірраціональні вирази, які при множенні один на інший утворюють раціональні вирази:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}}{x}\cdot\frac{\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x}}{\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4-x-4-x}{x\cdot(\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x})}=\lim_{x\to 0}\frac{-2x}{x\cdot(\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x})}=\lim_{x\to 0}\frac{-2}{\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x}}=$$

$$=\frac{-2}{\sqrt{4}+\sqrt{4}}=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}.$$

г) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{16x^2+10x+5}-4x)=\left[\sqrt{\infty}-\infty\right]=[\infty-\infty]$.

Для розкриття невизначеності $\left[\infty-\infty\right]$ необхідно вираз представити у вигляді дробу $\frac{a}{1}$; в утвореному дробі помножити чисельник і знаменник на спряжений вираз. В подальшому позбавитися утвореної невизначеності $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{16x^2+10x+5}-4x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{16x^2+10x+5}-4x}{1}\cdot\frac{\sqrt{16x^2+10x+5}+4x}{\sqrt{16x^2+10x+5}+4x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{16x^2+10x+5-16x^2}{\sqrt{16x^2+10x+5}+4x}=\lim_{x\to\infty}\frac{10x+5}{\sqrt{16x^2+10x+5}+4x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

Поділимо кожен елемент чисельника і знаменника на x, під коренем на x^2:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{10x+5}{\sqrt{16x^2+10x+5}+4x}=\lim_{x\to\infty}\frac{10+\frac{5}{x}}{\frac{\sqrt{16x^2+10x+5}}{x}+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{10+\frac{5}{x}}{\sqrt{\frac{16x^2+10x+5}{x^2}}+4}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{10+\frac{5}{x}}{\sqrt{16+\frac{10}{x}+\frac{5}{x^2}}+4}=\frac{10+\frac{5}{\infty}}{\sqrt{16+\frac{10}{\infty}+\frac{5}{\infty^2}}+4}=\frac{10+0}{\sqrt{16+0+0}+4}=\frac{10}{\sqrt{16}+4}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}$$

.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Обчислити наступні границі:

3.33. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x+1}$;

3.34. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\sqrt{x+2}-1\right)$;

3.35. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-4x+3}{x^2+x-2}$;

3.36. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-8}{x^2+x-6}$;

3.37. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3-x+8}{x^2+5x-6}$;

3.38. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+6x+3}{x^3+x+9}$;

3.39. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-8}{x^2+x-6}$;

3.40. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3-x+8}{x^2+5x-6}$;

3.41. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-1}{\sqrt{9x^2-6x}}$;

3.42. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-1}{\sqrt{x}-1}$;

3.43. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-1}{\sqrt{4x}-1}$;

3.44. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x+2}{2x^3-2}$;

3.45. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+8x+22}{2x^3-2}$;

3.46. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x+4}{2x^2+3x-2}$;

3.47. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+6x+3}{5x^3+2x+1}$;

3.48. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^5-4x+3}{\sqrt{4x^{10}+4x^2}}$;

3.49. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^5-4x+3}{\sqrt{x^9+4x^2}}$;

3.50. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-7x}{\sqrt{x}-2x}$;

3.51. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-7x+9}{2x}$;

3.52. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^2-8}{3x^2+2x-6}$;

3.53. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^2-8}{3x^4+2x^2-6x}$;

3.54. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$;

3.55. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4}$;

3.56. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2+x-2}$;

3.57. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^4-1}$;

3.58. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{\sqrt{x}-2}$;

3.59. $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{9-x}{3-\sqrt{x}}$;

3.60. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4x+3}{x-1}$;

3.61. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+3x+2}{2x^2+3x-2}$;

3.62. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{\sqrt{x}-1}$;

3.63. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2+x-6}$;

3.64. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-5}{2-\sqrt{x-1}}$;

3.65. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{1-\sqrt{x^2+1}}$;

3.66. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+2}{\sqrt{x+6}-2}$;

3.67. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{x+3}}{x}$;

3.68. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x+2}-3}{7-x}$;

3.69. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}$;

3.70. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+16}-4}{x^2}$;

3.71. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-x)$;

3.72. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2-2})$;

3.73. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})$;

3.74. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^4+1}-\sqrt{4x^2-2})$;

3.75. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^3+3}-\sqrt{4x^2-x})$.

3.76. $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{4x^2-x})$.

Індивідуальне завдання

Обчислити наступні границі:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{nx^2-4x+5}{2x^2+(n-1)\cdot x-2}$;

б) $\lim\limits_{x\to n}\dfrac{x^2-2xn+n^2}{n^2-xn}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{n-x}-\sqrt{n+x}}$;

г) $\lim\limits_{x\to -\infty}(nx-\sqrt{x^2-4x})$;

де n – остання цифра номера студента за списком.

Теми рефератів

1. Нескінченно малі та нескінченно великі послідовності.
2. Основні теореми про границі послідовності.