ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №29.

Тема: Ознаки збіжності рядів.

ПРАКТИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

П р и к л а д: Дослідити ряди на збіжність:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$; б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^n n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(2n-3)^2}}$.

Розв'язання:

а) Дослідимо заданий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$ на збіжність за ознакою Даламбера. Для цього обчислимо границю:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{(n+1)^3}{2^{n+1}} : \frac{n^3}{2^n}\right) = \frac{1}{2} \lim_{x\to\infty}\left(\frac{(n+1)^3}{n^3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3 = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2} < 1.$$

Отже, ряд збігається.

б) Для дослідження ряду $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^n n}$ використаємо радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[n]{U^n} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\ln^n n}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0 < 1.$$

Отже, ряд збігається.

в) Для дослідження ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(2n-3)^2}}$ використаємо радикальну ознаку Коші. Маємо $f(x) = \frac{1}{(2x-3)^{\frac{2}{3}}}$. Знайдемо невласний інтеграл:

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{(2x-3)^{\frac{2}{3}}} = \lim_{b\to\infty} \int_2^{b} \frac{dx}{(2x-3)^{\frac{2}{3}}} = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot 3(2x-3)^{\frac{1}{3}}\right)\Bigg|_2^b = \frac{3}{2}\,(\lim_{b\to\infty} \sqrt[3]{2b-3} - 1) = \frac{3}{2}\cdot\infty = \infty.$$

Невласний інтеграл розбігається. Отже, розбігається і заданий ряд.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Користуючись ознакою Даламбера, дослідити на збіжність ряди:

8.31. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$;

8.32. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n(2n+1)}$;

8.33. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n}$;

8.34. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$;

8.35. $\sum_{n=1}^{\infty} n tg \frac{\pi}{2^{n+1}}$;

8.36. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{2^n \cdot n!}$;

8.37. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 sin \frac{\pi}{2^n}$;

8.38. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(2n)!}$;

Користуючись ознакою радикальною ознакою Коші, дослідити на збіжність ряди:

8.39. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$; **8.40.** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^{n}$;

8.41. $\sum_{n=1}^{\infty} sin^n \frac{\pi}{2^n}$; **8.42.** $\sum_{n=1}^{\infty} arctg^n \frac{1}{n}$.

Користуючись ознакою інтегральною ознакою Коші, дослідити на збіжність ряди:

8.43. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3+n^2}$; **8.44.** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n \ln^2 n}$;

8.45. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$; **8.46.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$;

8.47. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3+n^2}$; **8.48.** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n \ln n}$.

Індивідуальне завдання

Дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Nn-N}{N^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{Nn+1} \right)^{n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(Nn+1)(Nn+3)}$;

Де N – номер студента за списком.

Теми рефератів

1. Степеневі ряди
2. Застосування рядів до наближених обчислень.