

## ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №28.

Тема: Ряд геометричної прогресії. Необхідна умова збіжності ряду.

### ПРАКТИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

П р и к л а д 1: Обчислити суму заданого ряду:

$$\text{а) } \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots; \quad \text{б) } \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{3 \cdot 2^{n-1}} + \dots$$

*Розв'язання:*

$$\text{а) Для знаходження суми ряду } \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

скористаємося тотожністю:  $\frac{1}{k \cdot (k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ . Тоді сума може бути

представлена у вигляді:

$$S = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Тоді  $\lim_{x \rightarrow \infty} S = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$ . Тобто ряд збігається і його сума дорівнює 1.

б) Для ряду  $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{3 \cdot 2^{n-1}} + \dots$  винесемо спільний множник  $\frac{1}{3}$  за дужки:  $\frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots\right)$ . В дужках одержали ряд, що являє

собою нескінченну прогресію, знаменник якої  $q = \frac{1}{2}$ . Тоді

$$S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2. \text{ Отже, сума заданого ряду } S = \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3}.$$

П р и к л а д 2: Чи виконується необхідна ознака збіжності ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+1}$ .

*Розв'язання:*

Знайдемо границю загального члена  $U_n = \frac{2n}{n^2+1}$  при необмеженому

$$\text{зростанні його номера } n: \lim_{x \rightarrow \infty} U_n = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2n}{n^2+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \frac{0}{1} = 0.$$

Отже, необхідна умова збіжності  $\lim_{x \rightarrow \infty} U_n = 0$  виконується.

## ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Записати можливий загальний член ряду:

8.1.  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots;$

8.2.  $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots;$

8.3.  $\frac{1}{10} + \frac{2}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{4}{10000} + \dots;$

8.4.  $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots;$

8.5.  $\sin \alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2} + \frac{\sin 3\alpha}{3} + \frac{\sin 4\alpha}{4} + \dots;$

8.6.  $\cos \alpha + \frac{\cos 2\alpha}{2} + \frac{\cos 3\alpha}{6} + \frac{\cos 4\alpha}{24} + \dots;$

8.7.  $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9} + \dots;$

8.8.  $\frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{9 \cdot 7} + \frac{1}{14 \cdot 11} + \dots;$

8.9.  $1,1 - 1,02 + 1,003 - 1,0004 + \dots$

8.10.  $1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \dots;$

Обчислити суму заданого ряду:

8.11.  $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots;$

8.12.  $3 - \frac{3}{2} + \frac{3}{4} - \frac{3}{8} + \frac{3}{16} - \dots;$

8.13.  $1,1 - 1,02 + 1,003 - 1,0004 + \dots;$

8.14.  $\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10000} + \dots;$

8.15.  $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \dots;$

8.16.  $1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \frac{16}{81} + \dots;$

8.17.  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots;$

8.18.  $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots;$

8.19.  $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots$

8.20.  $3 - \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{3 \cdot 2} + \frac{1}{4 \cdot 3} + \dots;$

Перевірити, чи виконується необхідна ознака збіжності рядів:

8.21.  $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{6}{7} + \dots + \frac{2n}{2n+1};$

8.22.  $1 + \frac{3}{4} + \frac{5}{9} + \dots + \frac{2n-1}{n^2};$

8.23.  $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{10} + \dots + \frac{n}{1+n^2};$

8.24.  $\frac{1}{1001} + \frac{2}{2001} + \dots + \frac{n}{1000n+1};$

8.25.  $\sqrt{2} + \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{4}{3}} + \dots + \sqrt{\frac{n+1}{n}};$

8.26.  $\frac{1}{2} + \frac{1}{9} + \frac{1}{28} + \dots + \frac{1}{1+n^3};$

8.27.  $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2n+1};$

8.28.  $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2n-1};$

8.29.  $\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$

8.30.  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{n+n!};$

### Індивідуальне завдання

1. Обчислити суму заданого ряду:

$$\frac{1}{N \cdot (N+1)} + \frac{1}{(N+1) \cdot (N+2)} + \frac{1}{(N+2) \cdot (N+3)} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} + \dots$$

2. Перевірити виконання необхідної ознаки збіжності ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Nn}{n^N + 1}$ , де  $N$  – номер студента за списком.

### **Теми рефератів**

1. Найпростіші дії над рядами.
2. Множення рядів.