

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 27.

Тема: Лінійні диференціальні рівняння.

ПРАКТИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

П р и к л а д: Розв'язати диференціальне рівняння: $y' = 2y + x$.

Розв'язання:

Дане рівняння є лінійним, так як y і y' у однаковому степені (першому).

Тому скористаємося заміною $y = uv$ і $y' = u'v + uv'$. Тоді:

$$u'v + uv' = 2uv + x,$$

$$v(u' + 2u) = x - uv',$$

$$\begin{cases} u' + 2u = 0, \\ x - uv' = 0, \end{cases}$$

Розв'яжемо окремо перше рівняння системи:

$$u' + 2u = 0,$$

$$\frac{du}{dx} + 2u = 0, \quad \left| \cdot \frac{dx}{u}, \right.$$

$$\frac{du}{u} + 2dx = 0,$$

$$\int \frac{du}{u} + 2 \int dx = 0,$$

$$\ln u + 2x = 0 \Rightarrow u = e^{-2x}.$$

Отриманий вираз підставимо в друге рівняння системи:

$$x - uv' = 0 \Rightarrow x - e^{-2x}v' = 0,$$

$$x - e^{-2x} \cdot \frac{dv}{dx} = 0, \quad \left| \cdot \frac{dx}{e^{-2x}}, \right.$$

$$xe^{2x}dx - dv = 0,$$

$$\int xe^{2x}dx - \int dv = 0.$$

Обчислимо частинами перший інтеграл:

$$\int xe^{2x}dx = \left| \begin{array}{l} u = x \quad dv = e^{2x}dx \\ du = dx \quad \frac{e^{2x}}{2} = v \end{array} \right| = \frac{xe^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2}dx = \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C.$$

$$\text{Тоді, } \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C = v.$$

З поставленої умови: $y = uv = e^{-2x} \left(\frac{xe^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C \right) = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} + \frac{C}{e^{2x}}$ – загальний розв'язок диференціального рівняння.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Розв'язати диференціальні рівняння:

7.31. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$;

7.32. $xy' = y \ln y$;

$$7.33. xy' - 2y = 2x^4;$$

$$7.35. y' + y = x;$$

$$7.37. x^2 y' + xy + 1 = 0;$$

$$7.39. 2y = x(xy' - 1)\ln x;$$

$$7.34. (2x+1)y' = 4x + 2y;$$

$$7.36. (xy + e^x)dy - xdy = 0;$$

$$7.38. y = x(y' - x\cos x);$$

$$7.40. y' - y = e^x.$$

Індивідуальне завдання

Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y' - \frac{y}{n} = e^{nx}, \text{ де } n - \text{ номер студента за списком.}$$

Теми рефератів

1. Економічні задачі, що зводяться до диференціальних рівнянь.
2. Системи лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.