

## ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 23.

Тема: Визначений інтеграл. Формула Ньютона-Лейбніца.

### ПРАКТИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

П р и к л а д: Знайти інтеграли:

$$\text{а) } \int_{-1}^7 \frac{dx}{\sqrt{3x-4}};$$

$$\text{б) } \int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}};$$

$$\text{в) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x};$$

$$\text{г) } \int_0^1 \arcsin x dx.$$

Розв'язання:

а)

$$\int_{-1}^7 \frac{dx}{\sqrt{3x-4}} = \int_{-1}^7 (3x+4) dx = \frac{1}{3} \frac{(3x+4)^{\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} \Big|_{-1}^7 = \frac{2}{3} \sqrt{3x+4} \Big|_{-1}^7 = \frac{2}{3} (\sqrt{25} - \sqrt{1}) = 2 \frac{2}{3};$$

$$\text{б) } \int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}} = \int_2^5 \frac{dx}{9-(x-2)^2} = \arcsin \frac{x-2}{3} \Big|_2^5 = \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2};$$

в) Скористаємося універсальною тригонометричною підстановкою  $t = \operatorname{tg} x$ . Знайдемо  $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ ;  $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$  і нові межі інтегрування  $t_1 = 0$  при  $x_1 = 0$ , та  $t_2 = 1$  при  $x_2 = \frac{\pi}{2}$ . Тоді:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x} = \int_0^1 \frac{2dt}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = 2 \int_0^1 \frac{dt}{t^2+3} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{3}} \Big|_0^1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{6} - \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 0 = \frac{\pi}{3\sqrt{3}};$$

г) Виконаємо інтегрування частинами:

$$\int_0^1 \arcsin x dx = \left| \begin{array}{l} u = \arcsin x, \quad dv = dx \\ du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad v = x \end{array} \right| = x \arcsin x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = 1 \cdot \arcsin 1 - 0 \cdot \arcsin 0 + \sqrt{1-x^2} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1.$$

### ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Знайти невизначені інтеграли:

$$\text{6.93. } \int_{-2}^3 (2x^3 + x^2 - 5) dx;$$

$$\text{6.94. } \int_{-2}^2 (x^3 + 4x) dx;$$

$$6.95. \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3};$$

$$6.97. \int_4^9 \frac{(x-1)dx}{\sqrt{x+1}};$$

$$6.99. \int_2^3 \frac{xdx}{x^2+1};$$

$$6.101. \int_0^2 \frac{x+3}{x^2+4} dx;$$

$$6.103. \int_0^{\pi} \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} dx;$$

$$6.105. \int_{-0.5}^1 \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}};$$

$$6.107. \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x};$$

$$6.109. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x dx}{\cos^2 x};$$

$$6.111. \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x} dx;$$

$$6.113. \int_1^2 x \ln x dx;$$

$$6.115. \int_1^2 x \ln(x+1) dx;$$

$$6.117. \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2-1) \sin 2x dx;$$

$$6.96. \int_2^{-13} \frac{dx}{\sqrt[5]{(3-x)^4}};$$

$$6.98. \int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5};$$

$$6.100. \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x};$$

$$6.102. \int_1^2 \frac{xdx}{x^2+5x+4};$$

$$6.104. \int_0^{\pi} \cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2} dx;$$

$$6.106. \int_0^{\sqrt{3}-1} \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}};$$

$$6.108. \int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \frac{1}{x} dx}{x^2};$$

$$6.110. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx;$$

$$6.112. \int_2^3 \frac{dx}{2x^2+3x-2};$$

$$6.114. \int_0^1 x e^{-x} dx;$$

$$6.116. \int_0^1 x^2 e^{-2x} dx;$$

$$6.118. \int_0^{\frac{\pi}{3}} x \cos x dx.$$

### Індивідуальне завдання

Знайти невизначені інтеграли:

$$а) \int_{-1}^1 (2x^{n-10} + x^{n-2} - 3e^{nx}) dx;$$

$$б) \int_{1-n}^1 \frac{(2x+n)dx}{x^2+nx+n};$$

де  $n$  – номер студента за списком.

### Теми рефератів

1. Економічний зміст визначеного інтегралу
2. Застосування визначеного інтегралу до знаходження середнього часу, затраченого на виготовлення виробу.