

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 22.

Тема: Інтегрування деяких тригонометричних виразів.

ПРАКТИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

П р и к л а д: Знайти інтеграли:

а) $\int \sin 3x \cos 7x dx$;

б) $\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x}$;

в) $\int \sin^2 x dx$;

г) $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$.

Розв'язання:

а)

$$\begin{aligned} \int \sin 3x \cos 7x dx &= \frac{1}{2} \int (\sin(3-7)x + \sin(3+7)x) dx = \frac{1}{2} \int (\sin(-4)x + \sin 10x) dx = \\ &= -\frac{1}{2} \int \sin 4x dx + \int \sin 10x dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cos 4x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} \cos 10x + C = \frac{1}{8} \cos 4x - \\ &\frac{1}{20} \cos 10x + C; \end{aligned}$$

б) Використаємо універсальну тригонометричну підстановку $t = \operatorname{tg} x$.

Звідки $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$; $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$. Тоді:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{2\sin x - \cos x} &= \int \frac{\frac{2dx}{1+t^2}}{2 \frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{\frac{2dx}{1+t^2}}{\frac{4t-1+t^2}{1+t^2}} = 2 \int \frac{dt}{t^2+4t-1} = 2 \int \frac{dt}{(t+2)^2-5} = \\ &= 2 \frac{1}{2\sqrt{5}} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2 - \sqrt{5}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2 + \sqrt{5}} \right| + C = \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2 - \sqrt{5}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2 + \sqrt{5}} \right| + C; \end{aligned}$$

в)

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x dx &= \int \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \left(\int dx - \int \cos 2x dx \right) = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) + C = \frac{x}{2} - \\ &= \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{г) } \int \sin^3 x \cos^2 x dx &= \int \sin^2 x \sin x \cos^2 x dx = \int (1 - \cos^2 x) \cos^2 x d(\cos x) = \\ &= \int \cos^2 x d(\cos x) - \int \cos^4 x d(\cos x) = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^4 x}{4} + C. \end{aligned}$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Знайти невизначені інтеграли:

6.69. $\int \sin 2x \sin \frac{2x}{3} dx$;

6.70. $\int \sin 6x \cos 2x dx$;

$$6.71. \int \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{3} dx;$$

$$6.73. \int \sin 5x \sin 2x dx;$$

$$6.75. \int \sin 2x \cos 5x dx;$$

$$6.77. \int \frac{dx}{\sin x};$$

$$6.79. \int \frac{dx}{2 + 3 \cos x};$$

$$6.81. \int \frac{dx}{1 + \cos x};$$

$$6.83. \int \sin^2 2x dx;$$

$$6.85. \int \cos^4 x dx;$$

$$6.87. \int \cos^5 x dx;$$

$$6.89. \int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx;$$

$$6.91. \int \sin^3 x \cos^3 x dx;$$

$$6.72. \int \sin 3x \sin 5x dx;$$

$$6.74. \int \cos 5x \cos 2x dx;$$

$$6.76. \int \cos x \cos 3x dx;$$

$$6.78. \int \frac{dx}{5 + 4 \sin x};$$

$$6.80. \int \frac{dx}{3 \sin x + 2 \cos x + 1};$$

$$6.82. \int \frac{dx}{2 + \sin x};$$

$$6.84. \int \cos^2 4x dx;$$

$$6.86. \int \sin^3 2x dx;$$

$$6.88. \int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx;$$

$$6.90. \int \sin^4 x \cos^3 x dx;$$

$$6.92. \int \sin^5 x \cos^4 x dx.$$

Індивідуальне завдання

Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \sin(n+1)x \sin(n+3)x dx;$

б) $\int \sin^n x \cos^{n+1} x dx;$

де n – номер студента за списком.

Теми рефератів

1. Розв'язування інтегралів виду $R(\sin^2 x, \cos^2 x) dx$.

2. Розв'язування інтегралів виду $R(\operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x) dx$.