

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 21.

Тема: Інтегрування виразів, що містять в знаменнику квадратний тричлен. Інтегрування раціональних дробів.

ПРАКТИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

П р и к л а д: Знайти невизначені інтеграли:

$$\text{а) } \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 8}; \quad \text{б) } \int \frac{dx}{\sqrt{2 - 6x - 9x^2}}; \quad \text{в) } \int \frac{2x - 17}{(2x + 5)(x - 3)} dx.$$

Розв'язання:

Для прикладів а) та б) виділимо із квадратного тричлена повний квадрат:

$$\text{а) } \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 8}.$$

$$x^2 + 4x + 8 = x^2 + 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2 - 2^2 + 8 = (x + 2)^2 + 4 = (x + 2)^2 + 2^2. \text{ Тоді:}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 8} = \int \frac{dx}{(x + 2)^2 + 2^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x + 2}{2} + C.$$

$$\text{б) } \int \frac{dx}{\sqrt{2 - 6x - 9x^2}}.$$

$$2 - 6x - 9x^2 = -(9x^2 + 6x - 2) = -((3x)^2 + 2 \cdot 3x + 1 - 1 - 2) = -(3x + 1)^2 + 3 = \sqrt{3}^2 - (3x + 1)^2. \text{ Тоді:}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2 - 6x - 9x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\sqrt{3}^2 - (3x + 1)^2}} = \frac{1}{3} \operatorname{arcsin} \frac{3x + 1}{\sqrt{3}} + C.$$

$$\text{в) } \int \frac{2x - 17}{(2x + 5)(x - 3)} dx.$$

Нехай,

$$\begin{aligned} \frac{2x - 17}{(2x + 5)(x - 3)} &\equiv \frac{A}{2x + 5} + \frac{B}{x - 3} = \frac{A(x - 3) + B(2x + 5)}{(2x + 5)(x - 3)} = \frac{Ax - 3A + 2Bx + 5B}{(2x + 5)(x - 3)} = \\ &= \frac{(A + 2B)x + (5B - 3A)}{(2x + 5)(x - 3)} \Rightarrow \begin{cases} A + 2B = 2 \\ 5B - 3A = -17 \end{cases} \end{aligned}$$

Розв'язавши отриману систему, маємо $A = 4$, $B = -1$. Тобто дріб можна представити у вигляді суми дробів: $\frac{2x - 17}{(2x + 5)(x - 3)} = \frac{4}{2x + 5} + \frac{-1}{x - 3}$. А заданий

інтеграл у вигляді суми інтегралів:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x - 17}{(2x + 5)(x - 3)} dx &= \int \frac{4dx}{2x + 5} + \int \frac{-dx}{x - 3} = 4 \int \frac{dx}{2x + 5} - \int \frac{dx}{x - 3} = \frac{4}{2} \ln|2x + 5| - \ln|x - 3| + \ln|C| = \\ &= \ln|2x + 5|^2 - \ln|x - 3| + \ln|C| = \ln \left| \frac{C(2x + 5)^2}{x - 3} \right|. \end{aligned}$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Знайти невизначені інтеграли:

6.51. $\int \frac{dx}{x^2 - 7x + 10};$

6.53. $\int \frac{dx}{9x^2 + 6x + 4};$

6.55. $\int \frac{x-2}{x^2 - 7x + 12} dx;$

6.57. $\int \frac{dx}{\sqrt{2 - 6x - 9x^2}};$

6.59. $\int \frac{5x-7}{(x+1)(x-2)} dx;$

6.61. $\int \frac{17x+13}{(2x+1)(3x+2)} dx;$

6.63. $\int \frac{3x-4}{x^2-x} dx;$

6.65. $\int \frac{-14x-18}{(x+1)(x+2)(x-3)} dx;$

6.67. $\int \frac{2x^2-4x+1}{x(5x-1)} dx;$

6.52. $\int \frac{dx}{4x^2 + 4x + 5};$

6.54. $\int \frac{4x-1}{4x^2 - 4x + 5} dx;$

6.56. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}};$

6.58. $\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}} dx.$

6.60. $\int \frac{21-x}{(x-5)(x+3)} dx;$

6.62. $\int \frac{x+3}{(2x-1)(3x+2)} dx$

6.64. $\int \frac{x-9}{x^2+6x+5} dx;$

6.66. $\int \frac{x^2+5x+8}{(x+4)(x+3)} dx;$

6.68. $\int \frac{2x^2+x-4}{x(x+2)} dx.$

Індивідуальне завдання

Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{dx}{x^2 + nx + 2n};$

б) $\int \frac{nx+5}{(x+n)(nx-2)} dx;$

де n – номер студента за списком.

Теми рефератів

1. Розклад многочленна на множники.
2. Обчислення сталої інтегрування за заданими умовами.