

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №19.

Тема: Екстремум функції двох змінних

ПРАКТИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

П р и к л а д 1: Дослідити на екстремум функцію

$$z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20.$$

Розв'язання:

Знаходимо частинні похідні функції:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y + 9; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -x + 2y - 6.$$

Розглянемо систему двох рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} 2x - y + 9 = 0 \\ 2y - x - 6 = 0 \end{cases}$$

Розв'язком цієї системи будуть числа $x = -4$, $y = 1$. Тобто критична точка має координати $M_0(-4;1)$.

Обчислимо частинні похідні другого порядку в точці M_0 :

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{M_0(-4;1)} = 2; \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Big|_{M_0(-4;1)} = 2; \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{M_0(-4;1)} = -1.$$

Тоді: $\Delta = A \cdot C - B^2 = 4 - 1 = 3 > 0$. Так як $A > 0$, то існує мінімум функції в точці $M_0(-4;1)$, $z_{\min} = z(-4;1) = -1$.

П р и к л а д 2: Дослідити на умовний екстремум функцію $z = x^2 + y^2$, при $x + y = 1$.

Розв'язання:

Функція Лагранжа буде мати вигляд

$$L = (x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 1).$$

Запишемо необхідні умови екстремуму:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x + \lambda = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 2y + \lambda = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x + y - 1 = 0.$$

Звідки отримуємо $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$. Тобто критична точка має координати

$$M_0\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), \quad \lambda = -1.$$

$$L = (x, y) = x^2 + y^2 - (x + y - 1).$$

Тоді частинні похідні першого та другого порядку дорівнюють:
 $L'_x = 2x - 1$, $L'_y = 2y - 1$, $L''_{xx} = 2 = A$, $L''_{yy} = 2 = C$, $L''_{xy} = 0 = B$.

$\Delta = A \cdot C - B^2 = 4 > 0$. Так як $A > 0$, то існує мінімум функції:

$$z_{\min} = z\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Дослідити на екстремум функції двох змінних:

- 5.71. $z = -800 - x^2 - y^2 + 40x + 60y$;
5.72. $z = 250 - x^2 - y^2 + 20x + 100y$;
5.73. $z = -1800 - x^2 - y^2 + 80x + 60y$;
5.74. $z = -2100 - x^2 - y^2 + 40x + 100y$;
5.75. $z = -1700 - x^2 - y^2 + 40x + 80y$;
5.76. $z = -1500 - x^2 - y^2 + 20x + 80y$;
5.77. $z = -2000 - x^2 - y^2 + 100x + 40y$;

Дослідити на умовний екстремум:

- 5.78. $z = x + y$; при $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{2}$;
5.79. $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, при $x + y = 2$;
5.80. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$, при $x + y + 3 = 0$.

Індивідуальне завдання

Дослідити на екстремум функції двох змінних
 $z = 10n - x^2 - y^2 + nx + 10ny$.

Теми рефератів

1. Заміна прямокутних координат полярними для функції двох змінних.
2. Метод найменших квадратів.