

## ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №17.

### Тема: Градієнт функції та похідна функції у напрямку вектора. ПРАКТИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

П р и к л а д : Знайти градієнт функції  $z = \frac{2x^2 - 3}{4y^3}$  в точці  $A (-1; 1)$  та похідну в точці  $A$  в напрямі вектора  $\vec{a} (-12; -5)$ .

Розв'язання:

Обчислимо частинні похідні функції в точці  $A_0$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{2 \cdot 2x - 0}{4y^3} = \frac{4x}{4y^3} = \frac{x}{y^3}; & \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{A(-1;1)} &= \frac{-1}{1^3} = -1; \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -3 \cdot \frac{2x^2 - 0}{4y^4} = \frac{6x^2}{4y^4} = \frac{3x^2}{2y^4}; & \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{A(-1;1)} &= \frac{3 \cdot (-1)^2}{2 \cdot 1^4} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Тоді градієнт функції можна записати у вигляді:  
 $\overline{gradz} = \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_A \cdot \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_A \cdot \vec{j}$ . Тобто:  $\overline{gradz} = -1 \cdot \vec{i} + \frac{3}{4} \cdot \vec{j}$ .

Для запису похідної в точці  $A$  в напрямі вектора  $\vec{a}$  використаємо формулу:  $\frac{\partial z}{\partial \vec{a}} = \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_A \cdot \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_A \cdot \cos \beta$ .

Для цього знайдемо напрямлені косинуси:

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}} = \frac{-12}{\sqrt{144 + 25}} = \frac{-12}{13}; \quad \cos \beta = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}} = \frac{-5}{\sqrt{144 + 25}} = -\frac{5}{13}.$$

$$\text{Тоді, } \frac{\partial z}{\partial \vec{a}} = -1 \cdot \left(-\frac{12}{13}\right) + \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{5}{13}\right) = \frac{12}{13} - \frac{15}{52} = \frac{48 - 15}{52} = \frac{33}{52}.$$

$$\text{Відповідь: } \overline{gradz} = -1 \cdot \vec{i} + \frac{3}{4} \cdot \vec{j}; \quad \frac{\partial z}{\partial \vec{a}} = \frac{33}{52}.$$

### ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

**5.31.** Задано функцію  $z = x^3 y^2 + 4\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{y}$  і точку  $A (1; 1)$ . Знайти градієнт функції в точці  $A$ .

**5.32.** Задано функцію  $z = \frac{x}{y} + 2\sqrt{xy} - \sqrt[3]{x+y}$  і точку  $A (1; 4)$ . Знайти градієнт функції в точці  $A$ .

**5.33.** Задано функцію  $z = \left(\frac{x-1}{y^2}\right)^2$  і точку  $A (2; -3)$ . Знайти градієнт функції в точці  $A$ .

**5.34.** Задано функцію  $z = \left(\frac{x^2}{4-y}\right)^{-1}$  і точку  $A (-1; 0,5)$ . Знайти градієнт функції в точці  $A$ .

**5.35.** Задано функцію  $z = \cos(xy)$  і точку  $A \left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ . Знайти градієнт функції в точці  $A$ .

**5.36.** Задано функцію  $z = \sin(2x + y)$  і точку  $A \left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$ . Знайти градієнт функції в точці  $A$ .

**5.37.** Задано функцію  $z = (3x^2 + 4y^2)^2$  і точку  $A (2; 3)$ . Знайти градієнт функції в точці  $A$ .

Для вектора  $\vec{a}$  знайти напрямлені косинуси:

**5.38.**  $\vec{a} (1; -1)$ ;

**5.39.**  $\vec{a} (-2; 1,5)$ ;

**5.40.**  $\vec{a} (0; 7)$ ;

**5.41.**  $\vec{a} (5; 1)$ ;

**5.42.**  $\vec{a} (-6; -8)$ ;

**5.43.**  $\vec{a} (-5; -12)$ .

**5.44.** Задано функцію  $z = \frac{3x}{y^2}$ , точку  $A (3; 4)$  і вектор  $\vec{a} (6; 8)$ . Знайти похідну в точці  $A$  в напрямі вектора  $\vec{a}$ .

**5.45.** Задано функцію  $z = \frac{2x^3}{y^2}$ , точку  $A (1; 4)$  і вектор  $\vec{a} (-6; 8)$ . Знайти градієнт функції в точці  $A$  та похідну в точці  $A$  в напрямі вектора  $\vec{a}$ .

**5.46.** Задано функцію  $z = \left(\frac{x^2}{4-y}\right)^3$  і точку  $A (-1; 0)$ . Знайти градієнт функції в точці  $A$ .

**5.47.** Задано функцію  $z = \ln x^3 y^2$ , точку  $A (1; 1)$  і вектор  $\vec{a} (2; -1)$ . Знайти градієнт функції в точці  $A$  та похідну в точці  $A$  в напрямі вектора  $\vec{a}$ .

**5.48.** Задано функцію  $z = \ln(x^3 + y^2)$ , точку  $A (1; 1)$  і вектор  $\vec{a} (-2; 1)$ . Знайти градієнт функції в точці  $A$  та похідну в точці  $A$  в напрямі вектора  $\vec{a}$ .

**5.49.** Задано функцію  $z = \arccos\left(\frac{x}{y^2}\right)$ , точку  $A (1; 2)$  і вектор  $\vec{a} (12; -5)$ . Знайти градієнт функції в точці  $A$  та похідну в точці  $A$  в напрямі вектора  $\vec{a}$ .

**5.50.** Задано функцію  $z = \arctg\left(\frac{x^2}{y}\right)$ , точку  $A (1; 2)$  і вектор  $\vec{a} (12; 5)$ . Знайти градієнт функції в точці  $A$  та похідну в точці  $A$  в напрямі вектора  $\vec{a}$ .

**5.51.** Задано функцію  $z = \ln(3x^2 + 4y^2)$ , точку  $A(1; 3)$  і вектор  $\vec{a}(3; 4)$ . Знайти градієнт функції в точці  $A$  та похідну в точці  $A$  в напрямі вектора  $\vec{a}$ .

**5.52.** Задано функцію  $z = \ln(3x + y^2)$ , точку  $A(2; 3)$  і вектор  $\vec{a}(3; -4)$ . Знайти градієнт функції в точці  $A$  та похідну в точці  $A$  в напрямі вектора  $\vec{a}$ .

**5.53.** Задано функцію  $z = \frac{\ln x}{y^2}$ , точку  $A(1; -2)$  і вектор  $\vec{a}(6; -8)$ . Знайти градієнт функції в точці  $A$  та похідну в точці  $A$  в напрямі вектора  $\vec{a}$ .

**5.54.** Задано функцію  $z = \frac{\ln x}{2y}$ , точку  $A(1; 2)$  і вектор  $\vec{a}(6; 8)$ . Знайти градієнт функції в точці  $A$  та похідну в точці  $A$  в напрямі вектора  $\vec{a}$ .

### Індивідуальне завдання

Задано функцію  $y = x^n y^n - \frac{1}{x^{2n} y} - \frac{y\sqrt{x}}{n}$ , точку  $A(1; -1)$  і вектор  $\vec{a}(n; -n)$ .

Знайти градієнт функції в точці  $A$  та похідну в точці  $A$  в напрямі вектора  $\vec{a}$ .

### Теми рефератів

1. Частинні похідні вищих порядків.
2. Повні диференціали вищих порядків.