ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №15.

Тема: Застосування похідної до дослідження динаміки функції

П р и к л а д : Дослідити функцію і побудувати її графік: $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$.

Розв'язання:

1. Елементарні дослідження:

Область визначення функції : $x \in (-\infty;-1) \cup (-1;1) \cup (1;\infty)$.

Точки перетину графіка функції з осями координат:

$(0;0)$ − єдина точка перетину з віссю абсцис та ординат.

Функція непарна, так як: $y(-x) = \dfrac{-x}{(-x)^2 - 1} = -\dfrac{x}{x^2 - 1}$. Отже графік функції симетричний відносно початку координат.

2. Дослідження точок розриву:

$\lim\limits_{x \to -1+0} \dfrac{x}{x^2 - 1} = \dfrac{-1}{-0} = \infty$; $\lim\limits_{x \to -1-0} \dfrac{x}{x^2 - 1} = \dfrac{-1}{0} = -\infty$;

$\lim\limits_{x \to 1+0} \dfrac{x}{x^2 - 1} = \dfrac{1}{0} = \infty$; $\lim\limits_{x \to 1-0} \dfrac{x}{x^2 - 1} = \dfrac{1}{-0} = -\infty$.

Отже, $x = -1$ і $x = 1$ − вертикальні асимптоти.

3. Знаходження похилих асимптот:

Похилі асимптоти визначатимемо за формулою: $y = kx + b$. Для цього знайдемо невідомі коефіцієнти k і b:

$$k = \lim_{x \to \infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2 - 1} = \left[\frac{0}{\infty}\right] = 0.$$

$$b = \lim_{x \to \infty}(f(x) - kx) = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{x^2 - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}} = \frac{0}{1} = 0.$$

Тоді рівняння асимптоти набуватиме вигляду: $y = 0$.

4. Дослідження функції на монотонність:

Знайдемо першу похідну функції:

$$y' = \frac{(x^2 - 1) - x \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-1 - x^2}{(x^2 - 1)^2} = -\frac{1 + x^2}{(x^2 - 1)^2}.$$

Прирівняємо першу похідну до нуля: $-\dfrac{1 + x^2}{(x^2 - 1)^2} = 0$.

Так як рівняння не має розв'язків, то критичних точок першого роду не має. Тому на числовій осі $0X$ позначаємо лише точки розриву функції:

	$-$		$-$		$-$	x
		-1		1		

Отже, функція спадає на всій області визначення.

5. Дослідження на опуклість та ввігнутість:

Знайдемо другу похідну функції:

$$y'' = \frac{-2x\cdot\left(x^2-1\right)^2+\left(1+x^2\right)\cdot 2\left(x^2-1\right)\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^4} = \frac{2x\cdot\left(x^2-1\right)\cdot\left(-x^2+1-2+2x^2\right)}{\left(x^2-1\right)^4} =$$

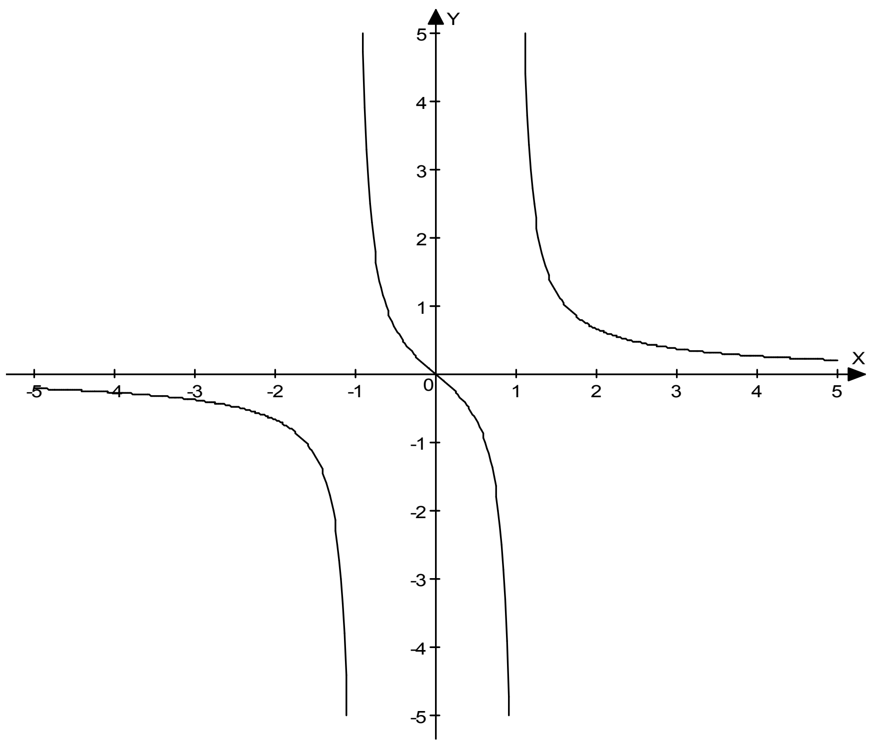
$$= \frac{2x\cdot\left(x^2+3\right)}{\left(x^2-4\right)^3}.$$

Прирівняємо другу похідну до нуля: $\frac{2x\cdot\left(x^2-2x-1\right)}{\left(x^2-4\right)^3}=0$, $x=0$ – критична точка другого роду. Визначимо знаки другої похідної на отриманих інтервалах:

	$-$		$+$		$-$		$+$	x
		-1		0		1		

Отже, функція опукла вниз на проміжках: $x\in\left(-1;0\right)\cup\left(1;\infty\right)$, опукла вгору – $x\in\left(-\infty;-1\right)\cup\left(0;1\right)$. Точка (0; 0) – точка перегину.

6. Побудова графіка функції:



ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Знайти екстремуми функцій:

4.119. $y = x^2 - 2x + 3$;

4.120. $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$;

4.121. $y = x^3 - 9x^2 + 15x + 3$;

4.122. $y = -x^4 + 2x^2$;

4.123. $y = x^4 - 8x^2 + 2$;

4.124. $y = \frac{(x-2)(3-x)}{x^2}$;

4.125. $y = (x-2)^3(2x+1)$;

4.126. $y = cosx \cdot sinx$, $x \in (0; \pi)$.

Знайти інтервали монотонності та екстремуми функцій:

4.127. $y = 4x^2 - 6x$;

4.128. $y = 1 + x - x^3$;

4.129. $y = 4x^4 - 2x^2 + 2$;

4.130. $y = x + \frac{1}{x}$;

4.131. $y = x^2(4-x)^2$;

4.132. $y = \frac{x}{1+x^2}$.

Знайти найбільше та найменше значення функції на зазначеному проміжку:

4.133. $y = 4x^4 - 2x^2 + 5$, $[-2;2]$;

4.134. $y = x + \sqrt{x}$, $[0;4]$;

4.135. $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$, $[-1;2]$;

4.136. $y = x^3 - 3x^2 + 6x - 2$, $[-1;1]$.

Дослідити функцію і побудувати її графік:

4.137. $y = \frac{x^2 + x}{x+2}$;

4.138. $y = \frac{4x^2 - x}{x+2}$;

4.139. $y = \frac{x+2}{x^2 - 1}$;

4.140. $y = \frac{x^2}{x+5}$;

4.141. $y = \frac{x^2 - 1}{x}$;

4.142. $y = \frac{3x}{x^2 - 4}$;

4.143. $y = \frac{x^2}{x^2 - 9}$;

4.144. $y = \frac{x-1}{x^2}$;

4.145. $y = \frac{x}{(x+2)^2}$;

4.146. $y = \frac{x}{(x-2)^2}$.

Індивідуальне завдання

Дослідити функцію та побудувати її графік:

$y = \frac{Nx}{(N-10)^2 - (-1)^N x^2}$, N – остання цифра номера студента за списком.

Теми рефератів

1. Економічний зміст похідної. Еластичність.
2. Задачі про найбільші та найменші значення величини.