ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №13.

Тема: Особливі випадки диференціювання.

П р и к л а д : Знайти похідну від вказаних функцій:

а) $\sin(x+y)+\ln(x-y)=4$; б) $\begin{cases} x=\cos\left(t^2+1\right) \\ y=\sin\left(t^2+1\right) \end{cases}$;

в) $y=\left(x^3+3x^2+4\right)^{\sin 4x}$; г) $y=\log_{\sin x}(1+\sqrt{x})$.

Розв'язання:

а) $\sin(x+y)+\ln(x-y)=4$.

Дана функція задана неявно, тому знаходимо похідну від лівої та правої частини, пам'ятаючи, що y є деякою функцією від x:

$$(\sin(x+y)+\ln(x-y))'=4'\Rightarrow$$

$$\left(\sin(x+y)\right)'+\left(\ln(x-y)\right)'=0\Rightarrow\ \cos(x+y)\cdot(1+y')+\frac{1-y'}{x-y}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\cos(x+y)+\frac{1}{x-y}+y'(\cos(x+y)-\frac{1}{x-y})=0\Rightarrow y'=-\frac{\cos(x+y)+\dfrac{1}{x-y}}{\cos(x+y)-\dfrac{1}{x-y}}.$$

б) $\begin{cases} x=\cos\left(t^2+1\right) \\ y=\sin\left(t^2+1\right) \end{cases}$ – функція задана параметрично, тобто у вигляді $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$, тому її похідна обчислюється за формулою: $y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}$.

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{-\sin\left(t^2+1\right)\cdot 2t}{\cos\left(t^2+1\right)\cdot 2t}=-tg\left(t^2+1\right).$$

в) $y=\left(x^3+3x^2+4\right)^{\sin 4x}$.

Функція задана у вигляді $f(x)=u(x)^{v(x)}$, тому прологарифмуємо функцію зліва та справа за основою *e*:

$\ln y=\ln\left(x^3+3x^2+4\right)^{\sin 4x}$, або $\ln y=\sin 4x\cdot\ln\left(x^3+3x^2+4\right)$;

Для знаходження похідної скористаємося формулою добутку:

$$y'\cdot\frac{1}{y}=4\cos 4x\cdot\ln\left(x^3+3x^2+4\right)+\sin 4x\cdot\frac{1}{x^3+3x+4}\cdot\left(3x^2+6x\right);$$

Тоді шукана похідна:

$$y'=4\cos 4x\cdot\left(x^3+3x^2+4\right)^{\sin 4x}\cdot\ln\left(x^3+3x^2+4\right)+\sin 4x\cdot\frac{3x^2+6x}{x^3+3x+4}\cdot$$
$$\left(x^3+3x^2+4\right)^{\sin 4x}.$$

г) $y = \log_{\sin x}(1+\sqrt{x})$. Перейдемо до нової основи логарифма (наприклад e), скориставшись формулою: $\log_a b = \dfrac{\ln b}{\ln a}$, тоді

$$y = \log_{\sin x}(1+\sqrt{x})$$

$$= \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\ln \sin x} \Rightarrow y' = \frac{(\ln(1+\sqrt{x}))' \cdot \ln \sin x - \ln(1+\sqrt{x}) \cdot (\ln \sin x)'}{(\ln \sin x)^2} =$$

$$\frac{\dfrac{1}{1+\sqrt{x}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln \sin x - \ln(1+\sqrt{x}) \cdot \dfrac{1}{\sin x} \cdot \cos x}{\ln^2 \sin x} =$$

$$\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \sin x \ln \sin x - \cos x(1+\sqrt{x}) \ln(1+\sqrt{x})}{(1+\sqrt{x}) \cdot \sin x \cdot \ln^2 \sin x}.$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Знайти похідні функцій, заданих неявно:

4.71. $y^2x^2 + x = 3y$;

4.72. $x^2 + xy^3 + x = 3y$;

4.73. $e^y - xy = 4y^5$;

4.74. $\sin(x-y) + ctg(x+y) = 2x$;

4.75. $\ln(x^2 + xy) + x = 3y$;

4.76. $e^{xy} - xy = tg(4y)$;

4.77. $\arcsin(x-y) + arctg(x+y) = 2$;

4.78. $\sin \ln(x^2 + x) + xy = 3$;

4.79. $\dfrac{\cos(x^2 - y^3)}{tg(xy + \frac{x}{y})} = 12xy$;

4.80. $e^{xy} - xy + \ln(xy) = tg(xy)$.

Знайти похідні функцій, заданих параметрично:

4.81. $\begin{cases} x = t^2 + t \\ y = t^3 - 4 \end{cases}$;

4.82. $\begin{cases} x = 3t^2 + t - 4 \\ y = t^3 + 6t - 7 \end{cases}$;

4.83. $\begin{cases} x = \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{2}t^3 - 11 \\ y = t^2 - 9t - 3 \end{cases}$;

4.84. $\begin{cases} x = \ln(t^2 + 1) \\ y = \log_2(t^2 + 1) \end{cases}$;

4.85. $\begin{cases} x = \cos(t^2 + t) - \sin t \\ y = \sin(t+1) + \cos 4t \end{cases}$;

4.86. $\begin{cases} x = e^t - 7\sin t \\ y = e^{-t} + \frac{1}{4}\cos 4t \end{cases}$.

Знайти похідні вказаних функцій:

4.87. $y = (1 + \cos x)^{x^2-4}$;

4.88. $y = (x^2 + 3x)^{x^2-4}$;

4.89. $y = \left(\sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{x^2-4}$;

4.90. $y = (e^{-x} + \cos 7x)^x$;

4.91. $y=\left(4-\dfrac{4}{\sqrt{x}}\right)^{e^{3x}}$;

4.92. $y=\left(1+\dfrac{1}{2}x^2\right)^{4x^{-1}}$;

4.93. $y=(x-4)^{x+4}$;

4.94. $y=(\log_x 7)^{tgx}$.

Знайти похідні логарифмічних функцій:

4.95. $y=\log_x\left(x^3+x^2\right)$;

4.96. $y=\log_{\sin 4x}\left(x^3+3x^2+4\right)$;

4.97. $y=\log_{\sqrt{x+5x^2}}\left(3+\dfrac{4}{\sqrt{x}}\right)$;

4.98. $y=\log_{\left(x-2x^2\right)}\left(x+\dfrac{1}{2}x^2\right)$;

4.99. $y=\log_{\sqrt{4x-3}}\left(\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2\right)$;

4.100. $y=\log_{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

Індивідуальне завдання

Знайти похідні вказаних функцій:

а) $x^{2n}+\sqrt[n]{xy^2}+e^x=ny$;

б) $\begin{cases} x=\dfrac{1}{2n}t^n+\sqrt[n]{t}-4t \\ y=t^3+nt-\dfrac{1}{x^n} \end{cases}$;

в) $y=\left(x^{n-2}+nx\right)^{n^x-4}$;

г) $y=\log_{\sqrt[n]{x}}\dfrac{(n+2)x}{\sin x}$.

де n – остання цифра номера студента за списком.

Теми рефератів

1. Означення диференціала. Механічний та геометричний зміст диференціалу.
2. Параметричне завдання функції. Циклоїда.