ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №10.

Тема: Дві визначні та три необхідні границі.

ПРАКТИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

П р и к л а д : Обчислити наступні границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{3x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x+2}\right)^{2x-1}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+7x)}{3x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7^x-5^x}{x}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+12x)^4-1}{5x}$.

Розв'язання:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{3x}$. Скористаємося першою визначною границею: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\ x}{x}=1$. Введемо заміну $7x=y\Rightarrow y\to 0$ при $x\to 0$.

Маємо: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{3x}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin y}{3\cdot\dfrac{y}{7}}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{7}{3}\cdot\dfrac{\sin y}{y}=\dfrac{7}{3}\cdot 1=\dfrac{7}{3}$.

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x+2}\right)^{2x-1}$. Безпосередня підстановка $x=\infty$ дає невизначеність $\left[1^\infty\right]$, тому скористаємося другою визначною границею: $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^{an+в}=e^a$, $e\approx 2{,}72$.

Введемо заміну $1+\dfrac{1}{n}=\dfrac{x-3}{x+2}$. Зведемо до спільного знаменника і виразимо *x* через *n*: $x=-5n-2$. При чому, якщо $x\to\infty$, то $n\to-\infty$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^{2x-1}=\lim_{n\to-\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2\cdot(-5n-2)-1}=\lim_{n\to-\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-10n-4-1}=e^{-10}=\frac{1}{e^{10}}.$$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+7x)}{3x}$. Безпосередня підстановка $x=0$ дає невизначеність $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, тому скористаємося першою необхідною границею: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$.

Введемо заміну $7x=y\Rightarrow x=\dfrac{1}{7}y$. Якщо $x\to 0$, то $y\to 0$, тоді:

$$\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{3\cdot\frac{y}{7}}=\lim_{y\to 0}\frac{7}{3}\cdot\frac{\ln(1+y)}{y}=\frac{7}{3}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}=\frac{7}{3}\cdot 1=\frac{7}{3}.$$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7^x-5^x}{x}$. Безпосередня підстановка $x=0$ дає невизначеність $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, тому скористаємося другою необхідною границею: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$.

Виносимо в чисельнику за дужки множник 5^x:

$$\lim_{x\to 0}\frac{7^x-5^x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{5^x\left(\left(\frac{7}{5}\right)^x-1\right)}{x}=\lim_{x\to 0}5^x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{7}{5}\right)^x-1}{x}=1\cdot\ln\frac{7}{5}=\ln 7-\ln 5.$$

д). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+12x)^4-1}{5x}$. Безпосередня підстановка $x=0$ дає невизначеність $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, тому скористаємося третьою необхідною границею: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^a-1}{x}=a$

Введемо заміну: $12x=y\Rightarrow x=\dfrac{y}{12}$. Якщо $x\to 0$, то $y\to 0$, тоді:

$$\lim_{y\to 0}\frac{(1+y)^4}{5\cdot\frac{y}{12}}=\lim_{y\to 0}\frac{12}{5}\cdot\frac{(1+y)^4-1}{y}=\frac{12}{5}\lim_{y\to 0}\frac{(1+y)^4-1}{y}=\frac{12}{5}\cdot 4=\frac{48}{5}.$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Обчислити наступні границі:

3.77. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{14x}{\sin 7x}$;

3.78. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctgx}{\arcsin 9x}$;

3.79. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg4x}{\arcsin 5x}$;

3.80. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin(x-\pi)}{x-180^0}$;

3.81. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{cos4x-cos2x}{x^2}$;

3.82. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{5x^2}$;

3.83. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{1}{5x}\right)^x$;

3.84. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x-3}{x+2}\right)^{2x}$;

3.85. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2+2}\right)^{3x^2}$;

3.86. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{4}{6x+5}\right)^{2x}$;

3.87. $\lim\limits_{x\to 0}(3x+3)^{\frac{5}{x}}$;

3.88. $\lim\limits_{x\to 0}(2x-10)^{\frac{5}{2x}}$

3.89. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{tg(2x-6)}{3x-9}$;

3.90. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{5x-3}{5x+3}\right)^{6x-2}$;

3.91. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+5x)}{10x}$;

3.92. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{6x}$;

3.93. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin^2 x)}{tg^2x}$;

3.94. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1-\dfrac{9}{3x-1}\right)^{6-4x}$;

3.95. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_4(1+9x)}{5x}$;

3.96. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-2^x}{2x}$;

3.97. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^x-7^x}{x}$;

3.98. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\lg x}{6-6x}$;

3.99. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8^x-2^x}{x}$;

3.100. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+2x)^3-1}{4x}$;

3.101. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+15x)^4-1}{15x}$;

3.102. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{5^{3-x}-1}{2x-6}$;

3.103. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+3x)^7-1}{9x}$;

3.104. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-1)^5-1}{4-2x}$.

Індивідуальне завдання

Обчислити наступні границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctgnx}{\arcsin 2x}$;

б) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{1}{nx}\right)^{2x-n}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+nx)}{(n+1)x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{n^x-(n+3)^x}{x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+nx)^6-1}{5x}$;

де n – остання цифра номера студента за списком.

Теми рефератів

1. Число e.
2. Порівняння нескінченно малих величин.