МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
БІЛОЦЕРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ ІНСТИТУТ ЕКОНОМІКИ ТА БІЗНЕСУ

Кафедра вищої математики і фізики

Шевченко Р.Л.,
Мельниченко О.П., Непочатенко В.А.

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Навчально-методичний посібник
щодо самостійного вивчення дисципліни за кредитно-модульною технологією для студентів економічних спеціальностей ОКР – бакалавр всіх форм навчання

Біла Церква
2015

УДК 517(075.8)

Рекомендовано до видання

методичною комісією університету

Протокол №2 від 4 вересня 2013 р.

Шевченко Р.Л. Вища математика: навчально-методичний посібник щодо самостійного вивчення дисципліни за кредитно-модульною технологією для студентів економічних спеціальностей ОКР – бакалавр всіх форм навчання / Р.Л. Шевченко, О.П. Мельниченко, В.А. Непочатенко. − Біла Церква, 2015.– с.

У навчально-методичному посібнику подано основні поняття лінійної алгебри, векторного числення, аналітичної геометрії, теорії границь, диференціального та інтегрального числень, диференціальних рівнянь та рядів відповідно до рекомендованої Міністерством освіти України типової навчальної програми для економічних спеціальностей. Перший розділ з основних понять елементарної математики розроблений для студентів, що мали перерву в навчанні після отримання середньої освіти. Наведено необхідний довідковий матеріал, розв’язування типових прикладів та задач, завдання для самостійної та індивідуальної роботи студентів.

Рецензенти:
Гнучій Ю.Б., д-р фіз.-мат. наук, професор, завідувач кафедри вищої та прикладної математики Національного університету біоресурсів і природокористування України;
Ткаченко В.І., д-р фіз.-мат. наук, професор, провідний спеціаліст Інституту математики НАН України.

ЗАТВЕРДЖЕНО
Департаментом аграрної освіти та науки
Міністерства аграрної політики України
27 серпня 2004 року

ПРОГРАМА
навчальної дисципліни для підготовки бакалаврів
в аграрних вищих навчальних закладах II−IV рівнів акредитації з напряму
0501 «Економіка і підприємництво»

ВСТУП

Короткі відомості з історії розвитку математики. Роль математики в економічних дослідженнях та управлінні соціально-економічними процесами. Місце дисципліни в системі підготовки бакалаврів економічного профілю. Мета і завдання дисципліни.

РОЗДІЛ 1. ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ ТА ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

1.1 Визначники

Визначники другого, третього та n-го порядку.

1.2. Системи лінійних рівнянь

Правило Крамера. Однорідні системи лінійних рівнянь. Загальний розв'язок неоднорідної системи лінійних рівнянь. Метод Жордана-Гаусса.

1.3. Елементи векторної алгебри

n-вимірний арифметичний простір R^n. Арифметичні вектори простору R^n. Лінійні операції над векторами. Скалярний добуток у n-вимірному арифметичному просторі. Довжина вектора. Кут між векторами. Відстань між точками.

Системи векторів. Лінійно залежні і лінійно незалежні системи векторів. Базис і ранг системи векторів. Розклад вектора за базисом.

1.4. Елементи теорії матриць

Лінійні операції над матрицями. Поняття оберненої матриці. Знаходження оберненої матриці методом Жордана-Гаусса.

Матрична форма запису системи лінійних рівнянь та її розв'язок. Ранг матриці. Теорема Кронекера-Капеллі.

РОЗДІЛ 2. ЕЛЕМЕНТИ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Геометрія простору R^n.

Пряма і площина у просторі R^n. Площина в R^3. Пряма в R^2 та R^3. Опуклі множини. Системи лінійних нерівностей з n невідомими.

Поняття про лінії та поверхні другого порядку.

РОЗДІЛ 3. ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Множина дійсних чисел. Абсолютна величина дійсного числа. Поняття функції, область визначення, способи задання. Основні елементарні функції, їх властивості та графіки.

Упорядкована змінна, послідовність як функція цілочислового аргументу. Границя послідовності. Нескінчено малі та нескінчено великі величини.

3.1. Границі функції

Границя функції у точці, на нескінченості, односторонні границі функції. Основні теореми про границі. Перша визначна границя та наслідки з неї. Друга визначна границя, число e, натуральні логарифми, експонента. Невизначеності.

3.2. Неперервність функції

Неперервність функції у точці та на відрізку. Точки розриву функції та їх класифікація. Основні теореми про неперервність функцій.

РОЗДІЛ 4. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ТА ЗАСТОСУВАННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

4.1. Похідна функції.

Задачі, що призводять до поняття похідної. Економічний та геометричний зміст похідної. Темп росту та коефіцієнт еластичності. Диференційовність функції. Таблиця похідних. Похідні вищих порядків.

4.2. Диференціал функції

Геометричний зміст диференціалу функції. Інваріантність форми диференціала. Застосування в наближених обчисленнях.

4.3. Диференційовні функції

Основні теореми про диференційовні функції. Правило розкриття невизначеностей (правило Лопіталя).

Зростання та спадання функцій. Достатня умова монотонності. Екстремум функції. Необхідна та достатня умова існування екстремуму функції. Найбільше та найменше значення функції на відрізку. Опуклість і ввігнутість кривої та точки перегину. Ознаки опуклості та угнутості.

Горизонтальні, вертикальні та похилі асимптоти функції.

Повне дослідження функції. Задачі економічного змісту.

РОЗДІЛ 5. ФУНКЦІЇ ДЕКІЛЬКОХ ЗМІННИХ

Функції декількох та двох змінних. Геометричний зміст функції двох змінних. Неперервність. Границя. Частинні похідні функції двох змінних.

Повний диференціал та інваріанти його форм. Застосування повного диференціала в наближених обчисленнях.

Частинні похідні та частинні диференціали вищих порядків.

Екстремум функції двох змінних. Умовний екстремум. Найбільше та найменше значення функції у замкненій області.

Метод найменших квадратів. Поняття про задачі лінійного програмування.

РОЗДІЛ 6. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

6.1. Невизначений інтеграл

Первісна, невизначений інтеграл та його властивості. Таблиця інтегралів.

Найпростіші методи інтегрування. Інтегрування дробово-раціональних, ірраціінальних та тригонометричних функцій.

6.2. Визначений інтеграл

Визначений інтеграл, означення та властивості. Геометричний зміст визначеного інтеграла.

Інтеграл зі змінною верхньою границею. Формула Ньютона-Лейбніца. Невласні інтеграли, їх властивості та методи інтегрування.

Поняття про подвійні інтеграли. Зведення подвійного інтеграла до повторного. Поняття про потрійні інтеграли.

РОЗДІЛ 7. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Задачі економіки, що приводять до поняття диференціального рівняння. Основні поняття та означення.

Диференціальні рівняння першого порядку, задача Коші, теорема існування та єдності розв’язку. Основні класи рівнянь, шо інтегруються в квадратурах.

Диференціальні рівняння другого порядку, задача Коші. Диференціальні рівняння другого порядку, що допускають пониження порядку.

Лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Застосування комплексного числа до розв’язування таких рівнянь. Комплексні числа та їх форми. Дії над комплексними числами. Формули Ейлера.

Розв’язування систем лінійних диференціальних рівнянь.

Використання диференціальних рівнянь в економіці. Різницеві методи розв’язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь.

РОЗДІЛ 8. РЯДИ

8.1. Числові ряди

Означення ряду, частинної суми ряду, збіжності збіжності. Знакопозитивні ряди. Необхідна умова збіжності. Достатні умови збіжності. Знакозмінні ряди. Знакочергувальні ряди. Абсолютна та умовна збіжність знакочергувальних рядів. Теорема Лейбніца.

8.2. Степеневі ряди

Степеневі ряди. Теорема Абеля. Інтервал та радіус збіжності степеневого ряду. Умови диференціювання та інтегрування степеневого ряду. Ряди Тейлора та Маклорена. Розкладання функцій в степеневий ряд.

Застосування розкладання функцій в ряд до наближеного інтегрування та розв’язування диференціальних рівнянь.

8.3. Ряди Фур’є

Тригонометричні ряди Фур’є.

Орієнтований розподіл аудиторного навчального часу

Навчальний курс дисципліни “Вища математика” проводиться впродовж двох семестрів та має наступні види робіт:

- аудиторні заняття: 64 лекцій, 64 практичних робіт;
- самостійна робота студентів – 88 годин;

Аудиторна робота з дисципліни здійснюється за тематичним планом (табл.1).

Таблиця 1.

Тематичний план аудиторної роботи (лекції та практичні заняття)

№ модуля		Теми	К-сть годин
Модуль 1.		**Лінійна алгебра та аналітична геометрія**	
	Тема 1.	Матриці та дії над ними	2
	Тема 2.	Визначники. Мінори. Алгебраїчні доповнення	2
	Тема 3.	Системи лінійних рівнянь	2
	Тема 4.	Застосування матричного числення при розв’язанні економічних задач	2
Всього за 1 модуль			8
Модуль 2.		**Аналітична геометрія**	
	Тема 5.	Вектори	2
	Тема 6.	Прямокутні координати на площині	2
	Тема 7.	Пряма і площина в просторі	2
	Тема 8.	Криві лінії другого порядку	2
Всього за 2 модуль			8
Модуль 3.		**Основи теорії границь**	
	Тема 9.	Функція. Основні елементарні функції	2
	Тема 10.	Границя функції. Основні невизначеності	2
	Тема 11.	Границя функції. Визначні та необхідні границі	2
	Тема 12.	Неперервність та розриви функції	2
	Тема 13.	Економічні задачі, пов’язані з послідовністю та її границею (елементи математики фінансів)	2
Всього за 3 модуль			10
Модуль 4.		**Основи диференціального числення**	
	Тема 14.	Основні правила та формули диференціювання	2
	Тема 15.	Диференціал функції та його застосування	2

	Тема 16.	Застосування похідної до дослідження функції	2
	Тема 17.	Диференціювання функції декількох змінних та його застосування	4
	Тема 18.	Економічні задачі, що зводяться до використання функцій двох змінних	2
Всього за 4 модуль			12
Модуль 5.		**Основи інтегрального числення**	
	Тема 19.	Невизначений інтеграл. Основні методи інтегрування	2
	Тема 20.	Інтегрування дробово-раціональних виразів	2
	Тема 21.	Інтегрування деяких тригонометричних виразів	2
	Тема 22.	Визначений інтеграл та його застосування	2
Всього за 5 модуль			8
Модуль 6.		**Диференціальні рівняння**	
	Тема 23.	Рівняння з відокремлюваними змінними	2
	Тема 24.	Лінійні диференціальні рівняння	2
	Тема 25.	Однорідні диференціальні рівняння	2
	Тема 26.	Системи лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами	2
	Тема 27.	Економічні задачі, що зводяться до диференційних рівнянь	2
Всього за 6 модуль			10
Модуль 7.		**РЯДИ**	
	Тема 28.	Числові ряди	4
	Тема 29.	Степеневі ряди	2
	Тема 30.	Ряди Фур'є	2
Всього за 7 модуль			8

Перелік тем винесених до самостійного опрацювання студентами наведено в таблиці 2.

Таблиця 2.

Тематичний план та перелік тем і питань самостійної роботи, які не розглядаються на аудиторних заняттях

№ модуля		Теми	К-сть годин
Модуль 1.		**Лінійна алгебра та аналітична геометрія**	
	1.	Ранг матриці	5
	2.	Системи лінійних рівнянь. Метод Гауса	5
	3.	Прямокутні системи рівнянь	5

	4.	Власні вектори та власні числа матриці	5
Всього за 1 модуль			20
Література [1-7]			
Форма контролю: написання індивідуальних робіт			
Модуль 2.		**Аналітична геометрія**	
	5.	Нерівності та їх геометричний зміст	5
	7.	Поверхні другого порядку. Циліндричні поверхні	5
	8.	Поверхні другого порядку. Конічні поверхні	5
	9.	Поверхні другого порядку. Поверхні обертання	5
Всього за 2 модуль			20
Література [1-7]			
Модуль 3.		**Основи теорії границь**	
	5.	Змінні величини. Послідовності та функції	5
	7.	Властивості границь	5
	8.	Основні теореми про границі	5
	9.	Правила розкриття невизначеностей (нерозглянуті випадки)	5
Всього за 3 модуль			20
Література [1-7]			
Модуль 4.		**Основи диференціального числення**	
	5.	Правило Лопіталя	5
		Основні теореми диференційного числення	5
Всього за 4 модуль			10
Література [1-7]			
Модуль 6.		**Диференціальні рівняння**	
	5.	Диференціальні рівняння другого порядку	18
Всього за 5 модуль			18
Література [1-7]			

Розрахунок балів для дисципліни “Вища математика ” за пропорційною системою

КМС передбачає визначення за стобальною системою рейтингу студента на основі комплексної оцінки його в тому числі по залишкових знаннях з певної дисципліни за наступною формулою:

$$A = 0{,}4\left(0{,}5\left(a_1 + a_2\right) + a_3 + 3a_4 + 1{,}5a_5 + 1{,}8a_6 + 6a_7 - 0{,}8a_8 - 1{,}5a_9 - 0{,}8a_{10}\right)$$

Орієнтовний розподіл балів по дисципліні:

Назва контролю	Коефіцієнт	Мінімальна кількість балів	Максимальна кількість балів
Відвідування лекцій	a_1	0	4
Відвідування практичних	a_2	0	4
Виконання індивідуальних завдань	a_3	7	10
Написання модуля	a_4	20	30
Усне опитування	a_5	3	7
Написання самостійної роботи	a_6	10	15
Здача заліку	a_7	20	30
Пропуски лекцій та практичних занять	a_8	–	–
Отримана двійка	a_9	–	–
Невчасна здача індивідуального заняття	a_{10}	–	–
ВСЬОГО:		60	100

Шкала оцінювання

Сума балів	Оцінка в ECTS	Оцінка за національною шкалою	
		Екзамен	
90-100	A	Відмінно (5)	Зараховано
82-89	B	Дуже добре(4)	
74-81	C	Добре(4)	
64-73	D	Задовільно (3)	
60-63	E	Достатньо (3)	
35-59	FX	Незадовільно (2)	Не зараховано
1-34	F	Незадовільно (2) з обов’язковим повторним курсом навчання	Не зараховано

МЕТА ВИВЧЕННЯ ДИСЦИПЛІНИ

«Вища математика» є нормативною дисципліною циклу природничо-наукової та загальноекономічної підготовки бакалавра напряму 0501 «Економіка і підприємництво».

Мета вивчення дисципліни − засвоєння студентами базових математичних знань, необхідних під час професійної діяльності, формування логічного мислення та вироблення навичок математичного дослідження прикладних економічних задач.

У результаті вивчення дисципліни студент повинен

знати: основи вищої математики, що є фундаментом математичної освіти спеціалістів економічного профілю; роль та місце математичних методів у розв'язуванні низки практичних задач;

вміти: формулювати економічну задачу в математичних термінах і знаходити шляхи розв'язку цієї задачі; аналізувати одержані результати і на їх основі створювати практичні рекомендації.

Навчання проводиься у формі проведення лекцій, практичних занять, виконання індивідуальних завдань, контрольних робіт та самостійної роботи студентів.

Згідно з освітньо-професійною програмою та навчальними планами підготовки бакалавра напряму 0501 «Економіна і підприємництво» на вивчення дисципліни відведено 216 год, у тім числі 64 год − лекційні заняття, 64 год − практичні заняття, 88 год − самостійна робота.

Підсумковий контроль знань та умінь проводиться у формі складання заліку у першому семестрі та іспиту у другому.

МЕТОДИКА ВИВЧЕННЯ КУРСУ

Робота з літературою

Працюючи з методичними рекомендаціями, особливу увагу потрібно звертати на визначення основних понять та аксіоматику, зміст теорем, формул та інших положень курсу, що відображають кількісні співвідношення та просторові форми навколишнього світу.

Робота з методичними рекомендаціями має супроводжуватися записами визначень, теорем, рівнянь та основних положень. Записи потрібно робити чітко, теореми підкреслювати, а виведені формули бажано обводити рамкою.

Розв’язування задач

Кожен розділ курсу супроводжується підібраним блоком задач, які необхідно розв’язати після вивчення теми та детального ознайомлення з розв’язаними задачами у посібнику. Для глибокого опанування матеріалом під час розв’язуванні задач необхідно робити пояснення, посилаючись на теоретичні положення.

За неможливості самостійно розібратися у матеріалі студент може одержати консультацію на кафедрі вищої математики університету.

Список рекомендованої літератури

1. Шеченко Р.Л. Основи вищої математики / Р.Л. Шевченко. − Біла Церква, 2005.

2. Валєєв К.Г. Вища математика / К.Г. Валєєв, І.А. Джалладова. − Ч. І. – К., 2001.

3. Курош А.Г. Курс высшей алгебры /А.Г. Курош. − М.: Физматгиз, 1959.

4. Натансон И.П. Краткий курс высшей математики / И.П. Натансон. − М.: Физматгиз, 1963.

5. Барковський В.В. Математика для економістів / В.В. Барковський, Н.В. Барковська. − К., 1999.

6. Маркович Э.С. Курс высшей математики с элементами теории вероятностей и математической статистики / Э.С. Маркович. − М.: Физматгиз, 1972.

7. Кудрявцев В.А. Краткий курс высшей математики / В.А. Кудрявцев, Б. П. Демидович. − М.: Наука, 1986.

ВСТУП

У XVII столітті Європа вступила на шлях інтенсивного розвитку ринкової економіки, і точні науки одержали могутні стимули для швидкого розвитку. Розвиток торгівлі, економіки, астрономії, фізики, техніки, машинобудування вимагав рішучого оновлення математичного апарату. Це оновлення пройшло під знаком введення змінної величини, а вивчення її привело до поняття нескінченно малих величин, яке стало основним у математичному аналізі. Саме тому математичний аналіз ще називають аналізом нескінченно малих величин.

Ідеї Архімеда (III ст. до н. е.) та І. Кеплера (1615 р.), роботи Б. Кавальєрі (1635 р.), П. Ферма (1634 р.), Б. Паскаля (1654 р.), Д. Валліса (1655 р.), Деттонвілля (1658 р.), А.І. Барроу (1669 р.), Е. Торрічеллі та Ж. де Роберваля (1644 р.) з введенням зачатків понять про нескінченно малі величини та методи обчислення площ і об'ємів створили сприятливі умови для появи нового числення, яке називається диференціальним та інтегральним численням. Творцями його незалежно один від одного стали І. Ньютон та Г. Лейбніц (1671−1675 рр.). Ньютон основну увагу приділив поняттю похідної як швидкості зміни функції, ввів позначення y'. Лейбніц головний наголос зробив на понятті різниці між значеннями дотичної та функції, позначивши його dy. Позначення Лейбніца dy та Ньютона y' залишилися донині, як основні символи диференціального числення.

Відсутність у створеному численні строгого визначення поняття нескінченно малої величини породила багато критичних статей на адресу числення та неприйняття його математиками світу, незважаючи на успішне практичне та теоретичне його застосування. За образним виразом учня Лейбніца маркіза де Лопіталя, прекрасна будівля числення стоїть на піску, і для доказу своєї теореми, що має назву «правила Лопіталя», як до останнього аргументу, зазначив: ”Даю чесне слово дворянина, що ця теорема вірна”. У XVIII столітті роботами Ж. Даламбера, С. Гур'єва, Л. Карно почалась інтенсивна побудова фундаменту числення − теорії границь. Тільки математики XIX століття (Г. Кантор, Б. Больцано, К. Вейерштрас, особливо О. Коші) зробили з поняття границі фундамент для послідовної побудови багатоповерхової споруди математичного аналізу.

Подальший розвиток ідей математичного аналізу в XVIII та XIX століттях привів до створення теорії диференціальних рівнянь (термін ”диференціальні рівняння” введено Г. Лейбніцем), теорії рядів, функціонального аналізу, варіаційного та операційного числень, теорії функцій комплексної змінної тощо. Великий внесок у розвиток математичних наук, особливо в розвиток теорії ймовірностей та математичної статистики, зробили П. Чебишев, М. Остроградський, М. Лобачевський, А. Марков, М. Лузін, А. Ляпунов, Б. Гнеденко та інші. Ці науки стали математичними в строгому розумінні після аксіоматики Б. Гнеденка.

Методи математичного аналізу широко застосовуються у всіх науках, яким доводиться використовувати математику. Багато господарських задач економіки були розв’язані завдяки диференціальному та інтегральному численню.

Застосування в економіці методів математичного моделювання і створення для її потреб таких дисциплін як математичне програмування (лінійне, динамічне тощо), дослідження операцій, економетрія, обумовилинеобхідність вивчення таких підрозділів математики як аналітична геометрія, векторна та лінійна алгебра, теорія ймовірностей та математична статистика.

Вивчення теоретичних основ, підкріплене практичним застосуванням за розв’язування задач, дає студентам можливість опанувати економічні дисципліни і в подальшій роботі складати математичні моделі економічних систем, успішно їх розв’язувати і застосовувати на виробництві та в бізнесі.

Посібник розраховано на студентів стаціонарної та заочної форм навчання. Певна категорія студентів має перерву в освіті після закінчення школи і відчуває труднощі у вивченні курсу. Тому в посібник включено матеріал з основних понять елементарної математики, після повторення якого студенти мають можливість опанувати підрозділи курсу вищої математики згідно з програмою.

Грецька абетка

Α α альфа	Η η ета	Ν ν ні (ню)	Σ σ сигма
Β β бета	Θ θтета	Ξ ξ ксі	Τ τ тау
Γ γ гамма	Ι ι йота	Ο ο омікрон	Φ φ фі Ω
Δ δ дельта	Κ κ каппа	Π π пі	Υ ύ іпсилон
Ε ε епсилон	Λ λ лямбда	Ρ ρ ро	Ψ ψ псі
Ζ ζ дзета	Μ μ мі (мю)	Χ χ хі	ω омега

Латинська абетка

A a (*A a*) а	J j (*J j*) йот	S s (*S s*) ес
B b (*B b*) бе	K k (*K k*) ка	T t (*T t*) те
C c (*C c*) це	L l (*L l*) ель	U u (*U u*) у
D d (*D d*) де	M m (*M m*) ем	V v (*V v*) ве
E e (*E e*) е	N n (*N n*) ен	W w (*W w*) дубль-ве
F f (*F f*) еф	O o (*O o*) о	X x (*X x*) ікс
G g (*G g*) же	P p (*P p*) пе	Y y (*Y y*) ігрек
H h (*H h*) аш	Q q (*Q q*) кю	Z z (*Z z*) зет
I i (*I i*) і	R r (*R r*) ер	

Таблиця множення $a \times b$

a \ b	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Таблиця квадратів чисел

Десятки	Одиниці									
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

Основні математичні позначення

$=$	дорівнює	$a = b$
$\neq$	не дорівнює	$a \neq b$
$\equiv$	тотожньо дорівнює	$a \equiv b$
$\approx$	наближено дорівнює	$a \approx b$
$>$	більше	$a > b$
$<$	менше	$a < b$
$\geq$	більше або дорівнює	$a \geq b$
$\leq$	менше або дорівнює	$a \leq b$
$\vert\;\vert$	модуль	$\vert a\vert$
$\in$	належить	$a \in A$
$\notin$	не належить	$a \notin B$
$\Leftrightarrow$	рівносильно	$a = b \Leftrightarrow b = a$
$\Rightarrow$	слідує	$2a = b \Rightarrow a = 0{,}5b$
$\subset$	включення	$A \subset B$
$\cup$	об'єднання (або)	$c \in A \cup B$
$\cap$	перетин	$c \in A \cap B$
$\sum$	сума	$\sum_{1}^{3} n = 1 + 2 + 3 = 6$
$\parallel$	паралельність	$AB \parallel CD$
$\perp$	перпендикулярність	$AB \perp CD$
$\sim$	подібність	$\Delta ABC \sim \Delta DEF$
$\varnothing$	порожня множина	$x^2 < 0 \Rightarrow x \in \varnothing$

І. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ЕЛЕМЕНТАРНОЇ МАТЕМАТИКИ

§1. Арифметика

Арифметика як наука про числа (від грецького *αριτμοσ* – число) вивчає найпростіші властивості чисел та правила обчислень.

Вся нескінчена множина дійсних чисел (R) складається з підмножин цілих чисел (Z), серед яких виділяються цілі додатні або натуральні числа (N), та дробових чисел, до складу яких входять раціональні та ірраціональні числа. Число 0 (від лат. *nullum* – ніщо) не належить до натуральних чисел у повному розумінні слова (ніхто в старовину не казав, що у нього є 0 овець) і складає разом з множиною натуральних чисел розширений натуральний ряд.

Вся множина чисел записується за допомогою цифр (на арабській сифр – пусте місце), для чого спочатку використовували букви алфавітів, а пізніше перейшли до спеціальних значків. ***Цифра − це письмовий знак, який відображає число***.

Найбільш розповсюдженою стала індійська позиційна система запису числа, в якій його величина залежить не тільки від самої цифри, але й від місця її знаходження (позиції). В позиційній десятковій системі числення число 3275 означає 3·1000+2·100+7·10+5. До Європи система потрапила з написаними арабською мовою науковими працями відомого узбецького вченого Мухаммеда з Хорезму і стала називатись арабською. Використовується також римська система, в основному для позначення ювілейних дат, підрозділів книги тощо. Для арифметичних дій використовується зручніша в користуванні ”арабська” система.

Відголосками більш древніх систем людство користується й досі. Наприклад, при поділі часу та кутів використовується вавілонська шістдесяткова система, тому 1 година (як і градус) складається з 60 хвилин. Поділ дня на 12 годин − наслідок дванадцяткової системи.

Дробом називається частина (доля) одиниці або декілька рівних частин одиниці. Якщо розрізати яблуко на 5 рівних частин, то взята одна частина − це дріб $\frac{1}{5}$ або $1/5$, а якщо взяти 2 частини − отримаємо дріб $\frac{2}{5}$ (це означає два з п’яти). Довільний дріб записується як $\frac{m}{n}$, де число над рискою дробу називається чисельником, а під рискою дробу − знаменником. Отже, чисельником дробу $\frac{2}{5}$ є число 2, а знаменником − 5. Якщо $m < n$, то дріб називається правильним ($\frac{2}{5}$ – правильний дріб), а якщо $m \geq n$, то неправильним ($\frac{12}{5}$, $\frac{5}{5}$ − неправильні дроби). Серед неправильних дробів зустрічаються такі, в яких

$m = kn$, тоді $\dfrac{m}{n} = \dfrac{kn}{n} = k -$ціле число. Отже, можемо стверджувати, що множина цілих чисел − це підмножина дробових чисел.

З неправильного дробу можна виділити цілу частину.

<u>Наприклад</u>, $\dfrac{12}{5} = \dfrac{10+2}{5} = \dfrac{10}{5} + \dfrac{2}{5} = 2 + \dfrac{2}{5} = 2\dfrac{2}{5}$. Отримали мішаний дріб.

Якщо нас цікавить тільки величина числа, без урахування його знаку (додатнє воно чи від'ємне), то така величина називається ***модулем*** числа a і позначається $|a|$. <u>Наприклад</u>, $|7| = 7$ і $|-7| = 7$.

Якщо за допомогою відрізка n можемо виміряти довжину відрізка m, то дріб $\dfrac{m}{n}$ називається раціональним (лат. *ratio* − зміст). <u>Наприклад</u>, $\dfrac{12}{5}$, $\dfrac{5}{5}$, $\dfrac{105}{5}$ − раціональні дроби. Якщо довжина відрізка n не може бути мірою довжини відрізка m, то $\dfrac{m}{n} -$число ірраціональне. Так, діаметр кола d не може бути мірою довжини кола: l, бо $\dfrac{l}{d} = \pi$, а $\pi -$ число ірраціональне і наближено дорівнює 3,1415926...

Довжина катета прямокутного рівнобедреного трикутника не може бути мірою довжини гіпотенузи: $a^2 + a^2 = 2a^2$. Тоді гіпотенуза має довжину $a\sqrt{2}$, де $\sqrt{2} \approx 1{,}4142...-$ число ірраціональне.

Довільне ірраціональне число записується у вигляді нескінченого неперіодичного дробу. Періодичний десятковий дріб − є числом раціональним ($0{,}33333... = \dfrac{1}{3}$). Ірраціональні числа діляться на алгебраїчні ($\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ тощо) та трансцендентні (π − число Піфагора, e − число Ейлера тощо). Будь-який простий дріб можна записати у вигляді десяткового дробу та навпаки. <u>Наприклад</u>, $\dfrac{7}{8} = 0{,}875$, $0{,}125 = \dfrac{1}{8}$.

В арифметиці додати від'ємне число означає відняти його. Тому $a + (-b)$ означає $a - b$: $7 + (-3) = 7 - 3 = 4$. Також $-b + a = a - b$: $-3 + 7 = 7 - 3 = 4$. Відняти від'ємне число означає додати його: $a - (-b) = a + b$, тобто $7 - (-3) = 7 + 3 = 10$.

Знак добутку чисел визначається за схемою:

$$(+a)\cdot(+b) = +ab \qquad (+a)\cdot(-b) = -ab$$

$$(-a)\cdot(-b) = +ab \qquad (-a)\cdot(+b) = -ab$$

Якщо від яблука, яке поділене на 5 частин, взяти спочатку 1 частину, а потім ще 2 частини, то всього взято 3 частини з 5, тому $\frac{1}{5}+\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$. Отже, ***дроби можна додавати (віднімати) тільки за однакових знаменників***. Якщо дроби мають різні знаменники, то їх слід перед додаванням зробити однаковими, після чого додати чисельники. Наприклад, якщо треба додати дроби $\frac{2}{7}$ і $\frac{4}{9}$, то попередньо необхідно вирівняти їх знаменники: $\frac{2}{7}=\frac{2\cdot 9}{7\cdot 9}=\frac{18}{63}$ і $\frac{4}{9}=\frac{4\cdot 7}{9\cdot 7}=\frac{28}{63}$.

Тоді $\frac{18}{63}+\frac{28}{63}=\frac{46}{63}$. Це записують: $\frac{2}{7}+\frac{4}{9}=\frac{{}^{9\!}/2}{7}+\frac{{}^{7\!}/4}{9}=\frac{18+28}{63}=\frac{46}{63}$. Отже, вирівнювання знаменників, тобто зведення дробів до спільного знаменника, обов'язкове.

За множення дробів окремо перемножуються чисельники і знаменники $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$. Наприклад: $\frac{7}{9}\cdot\frac{2}{5}=\frac{7\cdot 2}{9\cdot 5}=\frac{14}{45}$.

Множення чисельника і знаменника на одне і те ж число не змінює дріб. Ділення чисельника та знаменника на одне і те ж число (операція скорочення дробу) також дріб не змінює. Пригадуємо, що $\frac{a}{a}=1$. Приклади: $\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{2}=\frac{2}{6}$; $\frac{14}{28}=\frac{2\cdot 7}{2\cdot 2\cdot 7}=\frac{1}{2}$.

Ділення числа на дріб $\frac{a}{b}$ означає множення цього числа на обернений дріб $\frac{b}{a}$: $\frac{c}{d}:\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\cdot\frac{b}{a}=\frac{bc}{ad}$. Наприклад: $\frac{2}{3}:\frac{4}{5}=\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{4}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$.

Якщо множення числа a на число n означає, що число a треба додати само до себе n разів ($a\cdot n=\underbrace{a+a+a+...+a}_{n}$), то піднесення числа a до степеня n означає, що число a треба помножити само на себе n разів.

($a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot ...\cdot a}_{n}$), тому в цілому $a\cdot n\neq a^n$ $(3\cdot 2\neq 3^2\Rightarrow 6\neq 3\cdot 3=9)$.

Необхідно пам'ятати, що:

1) $a^0=1$; 2) $a^n\cdot a^m=a^{n+m}$; 3) $a^n\cdot b^n=(ab)^n$; 4) $(a^b)^c=a^{bc}$;

5) $\frac{a^m}{b^m}=\left(\frac{a}{b}\right)^m$; 6) $a^{-m}=\frac{1}{a^m}$; 7) $\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$; 8) $a^{b^c}\neq(a^b)^c$.

В останній властивості необхідно спочатку зробити дію $b^c=d$, після чого знаходити a^d.

Приклади:

1) $3^0 = 1$; 2) $3^2 \cdot 3^3 = 3^{2+3} = 3^5 = 243$; 3) $2^2 \cdot 3^2 = (2 \cdot 3)^2 = 6^2 = 36$;

4) $(3^2)^2 = 3^{2 \cdot 3} = 3^6 = 729$; 5) $\dfrac{5^3}{2^3} = \left(\dfrac{5}{2}\right)^3 = (2{,}5)^3 = 15{,}625$; 6) $3^{-2} = \dfrac{1}{3^2} = \dfrac{1}{9}$;

7) $\dfrac{3^5}{3^2} = 3^{5-2} = 3^3 = 27$; 8) $2^{2^3} = 2^8 = 256$, тоді як $(2^2)^3 = 2^6 = 64$.

Існує степенева форма запису числа:

$300 = 3 \cdot 100 = 3 \cdot 10 \cdot 10 = 3 \cdot 10^2 \Rightarrow 300 = 3 \cdot 10^2; 327 = 3 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 7 =$
$= 3 \cdot 100 + 2 \cdot \dfrac{100}{10} + 7 \cdot \dfrac{100}{100} = 3 \cdot 100 + \dfrac{2}{10} \cdot 100 + \dfrac{7}{100} \cdot 100 = (3 + 0{,}2 + 0{,}07) \cdot 100 =$
$= (3 + 0{,}2 + 0{,}07) \cdot 10^2 = 3{,}27 \cdot 10^2$. Ця форма запису досить компактна для великих чисел: $2\,000\,000\,000 = 2 \cdot 10^9$.

Добування кореня − дія, обернена відносно дії піднесення до степеня: якщо $3^2 = 9$, то $\sqrt{9} = 3$, а якщо $3^3 = 27$, то $\sqrt[3]{27} = 3$. Взагалі $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.

Приклад: $\sqrt{9} = \sqrt{3^2} = 3^{\frac{2}{2}} = 3^1 = 3$, $\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4$, $\sqrt[5]{8} = \sqrt[5]{2^3} = 2^{\frac{3}{5}}$.

Не існує число a, яке за множення на a дорівнює $-a^2$: $a \cdot a = a^2$ і $(-a) \cdot (-a) = a^2$), тому $\sqrt{-a^2}$ не існує. Взагалі для всіх парних степенів корені від'ємних чисел не існують. Разом з тим, $(-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27$, тому $\sqrt[3]{-27} = -3$. Отже, корені непарного степеня від'ємних чисел існують.

Арифметичним коренем називається невід'ємне значення кореня: $\sqrt[n]{a^n} = |a|$. Наприклад, $\sqrt{3^2} = |3| = 3$ і $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$. Отже, $\sqrt{9} = 3$, а не ± 3.

Необхідно пам'ятати, що:

1. $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, де $a \geq 0, b \geq 0$;
2. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, де $a \geq 0$, $b > 0$;
3. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$, де $a \geq 0$;
4. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$, де $a \geq 0$;
5. $\sqrt[n]{a^n \cdot b} = |a| \cdot \sqrt[n]{b} = a \cdot \sqrt[n]{b}$, де $a \geq 0, b \geq 0$.

Якщо існує два рівних по величині відношення чисел, то вони утворюють пропорцію. Якщо $\dfrac{a}{b}$ і $\dfrac{c}{d}$ рівні між собою, то $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ − пропорція, з якої знаходиться будь-яке з чисел. Наприклад, $\dfrac{a}{3} = \dfrac{7}{5} \Rightarrow a \cdot 5 = 7 \cdot 3 \Rightarrow a = \dfrac{21}{5}$.

Величини a і b називаються пропорційними, якщо їх відношення не змінюється: $\frac{a}{b}=k$. Якщо зростання величини a збільшує величину b, то їх відношення прямо пропорційне, а якщо зростання a супроводжується зменшенням b, то маємо обернену пропорційність (тоді $a\cdot b=k$).

Відсотком або процентом (лат. pro cento − від сотні) називається сота частина будь-якої величини і позначається %. Наприклад, 2% від 1000 гривень складає 20 гривень. Банківські нарахування на внески абонентів проводяться за формулою складених відсотків:

$$N=N_0(1+0{,}01p)^n, \tag{1.1}$$

де N_0 – початковий внесок, p – банківський відсоток, n – термін зберігання грошей в банку.

§2. Алгебра

Засновником алгебри як науки про розв'язок рівнянь вважається Мухаммед аль-Хваризмі (Хорезмійський), який в IX ст. написав математичну працю під назвою "Книга відновлення та протиставлення" (на арабській аль-джебр означає відновлення). Франсуа Вієт та Рене Декарт ввели в алгебру буквенні позначення та символіку (XVI−XVII ст.), які в основному використовуються й сьогодні.

Основні правила та співвідношення

1. *Множення многочленів*:

$$(a+b)(c+d+e)=a(c+d+e)+b(c+d+e)=ac+ad+ae+bc+bd+be.$$

2. *Ділення многочлена на число*:

$$\frac{a+b+c}{d}=\frac{a}{d}+\frac{b}{d}+\frac{c}{d}.$$

3. *Формули скороченого множення*:

а) $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$; $a-b=(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})$;

б) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$; $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$; $(a^n\pm b^n)^2=a^{2n}\pm 2a^nb^n+b^{2n}$;

в) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$; $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$;

г) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$; $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$;

$a^{3n}\pm b^{3n}=(a^n\pm b^n)(a^{2n}\mp a^n\cdot b^n+b^{2n})$;

$a+b=\left(\sqrt[3]{a}\right)^3+\left(\sqrt[3]{b}\right)^3=(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2})$;

$a-b=\left(\sqrt[3]{a}\right)^3-\left(\sqrt[3]{b}\right)^3=(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2})$.

4. *Біном Ньютона*:

$$(a+b)^n=a^n+A_1a^{n-1}b+A_2a^{n-2}b^2+\ldots+A_{n-1}ab^{n-1}+b^n, \tag{1.2}$$

де біноміальні коефіцієнти $A_1, A_2, ..., A_{n-1}$ знаходяться за так званим трикутником Паскаля , відомим китайцям ще з XIII ст. і повторно відкритим у Європі Штихелем на 250 років пізніше.

n	коефіцієнти
0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1
6	1 6 15 20 15 6 1
7	1 7 21 35 35 21 7 1
8	1 8 28 56 70 56 28 8 1

У кожному з рядків трикутника крайні числа повторюються, а числа всередині утворюються додаванням сусідніх чисел попереднього рядка.

Розкладання $(a-b)^n$ відрізняється від розкладання $(a+b)^n$ тільки почерговою зміною знака: за кожним знаком «+» слідує знак «–» та навпаки. Наприклад, $(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$. Сума степенів у всіх добутках ab завжди співпадає зі степенем бінома.

Дії додавання, віднімання, множення та ділення алгебраїчних дробів аналогічні діям з числовими дробами. Наведемо приклади:

1) $\dfrac{a+b}{a-b} \pm \dfrac{c+d}{c-d} = \dfrac{(a+b)(c-d) \pm (c+d)(a-b)}{(a-b)(c-d)}$.

2) $\dfrac{a+b}{a-b} \cdot \dfrac{c+d}{c-d} = \dfrac{(a+b)(c+d)}{(a-b)(c-d)}$.

3) $\dfrac{a+b}{a-b} : \dfrac{c+d}{c-d} = \dfrac{a+b}{a-b} \cdot \dfrac{c-d}{c+d} = \dfrac{(a+b)(c-d)}{(a-b)(c+d)}$.

5. *Модуль числа*:

$|a| = a$ при $a \geq 0$ і $|a| = -a$ при $a < 0$. Наприклад: $|5| = 5$ і $|-5| = -(-5) = 5$.

Властивості модуля:

1. $|ab| = |a| \cdot |b|$; 2. $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$; 3. $|a| \geq 0$;

4. $|a| = |-a|$; 5. $|a|^2 = a^2$.

Виразом називається сукупність дій, які необхідно виконати в певному порядку над деякими величинами для отримання значення об'єкта. Якщо у виразі використовується скінчена кількість дій додавання, віднімання, множення, ділення, піднесення до степеня та добування кореня, то такі вирази називаються алгебраїчними. Якщо у цих виразах добування кореня відсутнє, то вони називаються раціональними, а якщо корінь присутній − то ірраціональними. Так, $\dfrac{a-b}{a+b}$ − раціональний вираз, а $\dfrac{a-\sqrt{b}}{a+\sqrt{b}}$ − ірраціональний.

Якщо прирівнюються один до одного два вирази, то отримаємо ***рівність***. Якщо ця рівність справедлива за всіх значень її величин, то вона називається ***тотожністю***. Наприклад, рівність $2x-3 \equiv 2x-3$ задовольняється за всіх значень змінної, тому вона утворює тотожність.

Якщо рівність задовольняється не за всіх значень величин, то вона називається ***рівнянням***. Наприклад, рівність $2x+3=5$ задовольняється тільки за $x=1$ і тому називається рівнянням.

Найвищий степінь невідомої величини в рівнянні вказує на його порядок. Наприклад, $x^3+3x^2+5x-9=0$ є рівнянням третього порядку. Число розв'язків рівняння не може перевершувати його порядок.

Рівняння виду $ax^2+bx+c=0$ називається ***квадратним рівнянням*** і має розв'язки:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\ \text{де } b^2-4ac\geq 0. \tag{1.3}$$

Вираз b^2-4ac називається дискримінантом.

Якщо квадратне рівняння можна подати у вигляді $ax^2+2bx+c=0$, то його розв'язки обчислюють за формулою:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a},\ \text{де } b^2-ac\geq 0. \tag{1.4}$$

Якщо квадратне рівняння має вигляд $x+2px+q=0$, то його розв'язки:

$$x_{1,2}=-p\pm\sqrt{p^2-q},\ \text{де } p^2-q\geq 0. \tag{1.5}$$

Використання формул розв'язків для рівнянь, що мають вигляд (1.4) та (1.5), дає можливість значно спростити обчислення.

Наприклад, рівняння $x^2-18x-243=0$ можна розв'язати за формулою $x_{1,2}=\dfrac{18\pm\sqrt{18^2+4\cdot 243}}{2}$. Але задане рівняння має вигляд (1.5), тому $x_{1,2}=9\pm\sqrt{9^2+243}$, що обчислюється набагато простіше.

Якщо дискримінант дорівнює нулю, то квадратне рівняння є повним квадратом, для якого $x_1=x_2$.

Теорема Вієта: Якщо x_1 та x_2 − корені квадратного рівняння $ax^2+bx+c=0$, то правильною є рівність:

$$\begin{cases} x_1x_2=\dfrac{c}{a} \\ x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \end{cases} \qquad (1.6)$$

<u>Наприклад</u>, рівняння $x^2-5x+4=0$ має корені $x_1=2$ і $x_2=3$, бо $x_1x_2=6$ і $x_1+x_2=5$.

Рівняння виду $ax^4+bx^2+c=0$ називаються біквадратними і зводяться до квадратних заміною $x^2=t$. Аналогічно розв'язуються рівняння виду $ax^6+bx^3+c=0$ заміною $x^3=t$ і т. д. Взагалі для рівнянь виду $ax^{2n}+bx^n+c=0$ застосовується заміна $x^n=t$, звідки $at^2+bt+c=0$.

Алгебраїчні нерівності

Нерівність $a>b$ називається строгою, а нерівність $a\geq b$ − нестрогою.

Властивості нерівностей:

1. Якщо $a\geq b$, то $b\leq a$.
2. Якщо $a>b$ і $b>c$, то $a>c$.
3. Якщо $a>b$, то $a+c>b+c$.
4. Якщо $a>b$, то $ka>kb$ за $k>0$.
5. Якщо $a>b$, то $ka<kb$ за $k<0$.

Якщо нерівності містять квадратичний вираз ax^2+bx+c (розглядаємо випадок, коли $a>0$; якщо $a<0$, то множенням нерівності на «−1» переходимо до випадку, коли $a>0$), то за від'ємного дискримінанта нерівність $ax^2+bx+c>0$ для всіх значень x.

Якщо $D=0$, то ax^2+bx+c є повним квадратом, тому нерівності

$ax^2+bx+c>0$ і $ax^2+bx+c<0$ задовольняються для $x\in R$, крім однієї точки $x=x_0$, для якої задовольняється умова $ax^2+bx+c=0$.

Якщо $D>0$, то для $ax^2+bx+c>0 \Rightarrow x\in(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$, а для $ax^2+bx+c<0 \Rightarrow x\in(x_1;x_2)$, де x_1 та x_2 − корені рівняння (1.3).

Якщо нерівність третього порядку перетворюється в рівняння за значень x_1, x_2, x_3, то її можна записати як

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)>0 \text{ або } (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)<0.$$

Для розв'язування нерівностей зручно застосувати метод інтервалів.

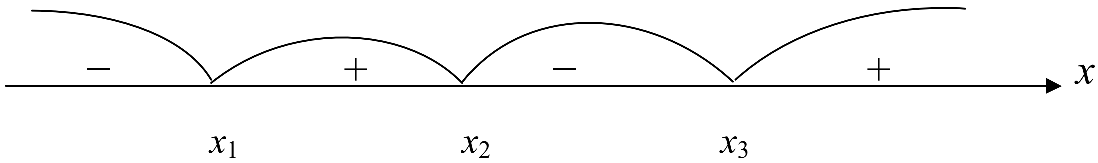


Рис. 1.1.

На різних інтервалах отримаємо різні знаки, тому для множення за схемою $(+)(+)(+)$ та $(-)(+)(-)$ отримаємо, що нерівність >0, а за схемою $(-)(-)(-)$ та $(-)(+)(-)$ – що <0.

Метод інтервалів аналогічно можна застосувати й до нерівностей довільного порядку.

Приклад: $(x+3)(x+1)(x-2)(x-4)>0$

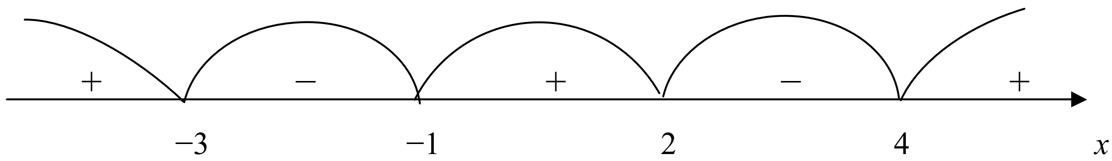


Рис. 1.2.

З рис. 2 видно, що нерівність задовольняється, якщо $x \in (-\infty;-3) \cup$ $\cup (-1;2) \cup (4;+\infty)$.

Послідовності та прогресії

Числовою послідовністю називається множина нумерованих чисел, кожне із значень якої знаходиться за її порядковим номером. Наприклад, послідовність $a_n = 2n$ має вигляд: 2; 4; 6; 8; …; 200; …1000; … .

Арифметичною прогресією називається така числова послідовність, у якої наступний член відрізняється від попереднього на деяку сталу d, що називається різницею прогресії. Якщо $d>0$, то прогресія зростає, а якщо $d<0$, то прогресія спадна. Вона має вигляд: $a_1; a_2; a_3; .....a_n;...$ або $a_1; a_1+d; a_1+2d;$ $a_1+3d; .... a_1+(n-1)d; ...$. Наприклад, якщо $a_1 = 2$, $d = 3$, то маємо арифметичну прогресію: 2; 5; 8; 11; 14;… .

Загальний член прогресії a_n знаходиться за формулою: $a_n = a_1 + d(n-1)$, а сума перших n членів арифметичної прогресії обчислюється за формулою:

$$S = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a + d(n-1)}{2} \cdot n \quad . \tag{1.7}$$

Геометричною прогресією називається така числова послідовність, кожен наступний член якої відрізняється від попереднього в q разів. Величина q називається знаменником прогресії. Геометрична прогресія має вигляд:

$$a_1; a_1q; a_1q^2; a_1q^3; a_1q^4....$$

Сума перших n членів прогресії знаходиться за формулою:

$$S_n = \frac{a_n q - a_1}{q-1} = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1}. \qquad (1.8)$$

Для нескінченно спадної прогресії ($q < 1$): $S = \frac{a_1}{1-q}$. (1.9)

<u>Наприклад</u>, геометрична прогресія 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; …, знаменник якої $q = \frac{1}{2}$, має суму $S = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$.

§3. Функція. Класифікація функцій.

Функцією називають відповідність між елементами двох множин *x* та *y*, за якої кожному елементові першої множини *x* відповідає не більше одного елемента *y* другої множини. Наприклад: $y = x^3$, $y = \frac{1}{x}$, $y = 4x + 2$.

Змінна *x* називається незалежною змінною, або аргументом, а змінна ***y*** – залежною змінною, або функцією; під символом $y = f(x)$ розуміють те правило, за яким кожному *x* відповідає *y,* або ті операції, які треба виконати над аргументом, щоб отримати відповідне значення функції.

Множина всіх тих елементів з *X*, для яких є відповідні елементи множини *У*, називається ***областю визначення***, а множина всіх тих елементів з *У*, що відповідають елементам з *X*, − ***областю значень*** даної функції.

<u>Приклад:</u> Для функції $y = x + 4$ область визначення – всі дійсні числа: $x \in R$. Область значень – це також множина всіх дійсних чисел: $y \in R$.

Для функції $y = \frac{4}{x}$ область визначення $x \in (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$, область значень $y \in (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$.

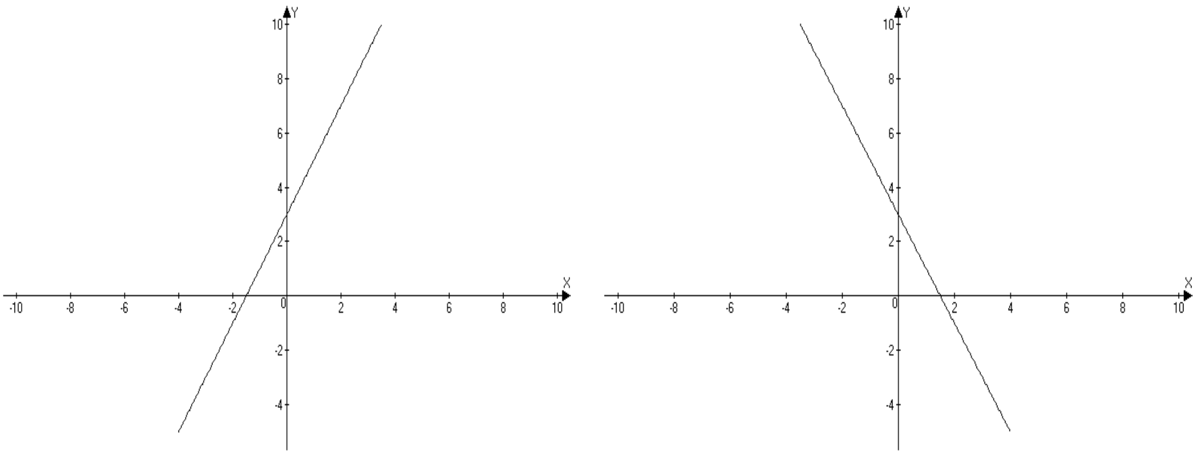
Графіком функції *f* називається множина точок (*x;y*) на координатній площині, таких, що перебігають всю множину D(*f*), а $y = f(x)$.

Лінійна функція

Лінійною називають функцію, яку можна задати формулою $y = ax + b$, де *x* – аргумент, *a* і *b* – будь-які числа.

1. Область визначення: $x \in (-\infty;+\infty)$.
2. Область значень: $y \in (-\infty;+\infty)$.
3. За a > 0 функція зростає, за a < 0 – спадає.

Графіком функції є пряма. Для побудови графіка необхідно мати дві точки.



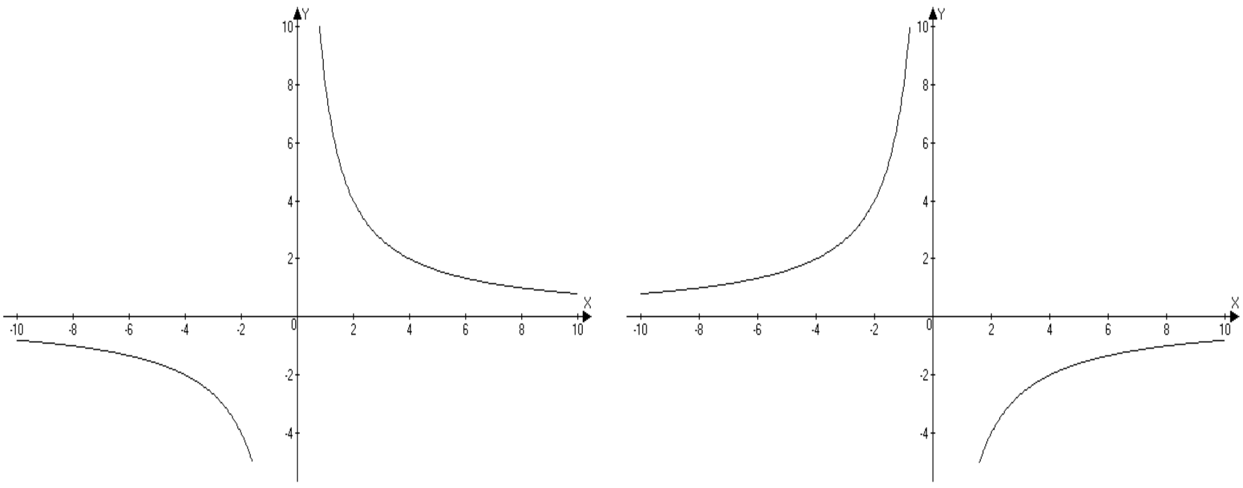
$a > 0$ $\qquad\qquad$ $a < 0$

Рис. 1.3.

Обернена пропорційність

Змінну y називають ***обернено пропорційною*** до змінної x, якщо відповідні значення цих змінних зв'язані рівністю $y = \dfrac{k}{x}$, де k – якесь дійсне число, відмінне від нуля. Число k називають коефіцієнтом оберненої пропорційності. Жодна з змінних не може набувати значення 0.

1. Область визначення: $x \in (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$.
2. Область значень: $y \in (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$.
3. За $k>0$ функція спадає, за $k<0$ – зростає на всій області визначення.



$k>0$ $\qquad\qquad$ $k<0$

Рис. 1.4.

Графіком цієї функції $y = \dfrac{k}{x}$ є крива, що складається з двох гілок. Цю криву називають гіперболою.

Зауважимо, що графіками функцій $y=\frac{1}{x}+3$, $y=\frac{3}{x-2}$, $y=\frac{x+3}{x-2}$ теж є гіперболи, однак вони – необернено пропорційні. Це приклади дробово-раціональних функцій. Обернена пропорційність є найпростішим випадком дробово-раціональних функцій.

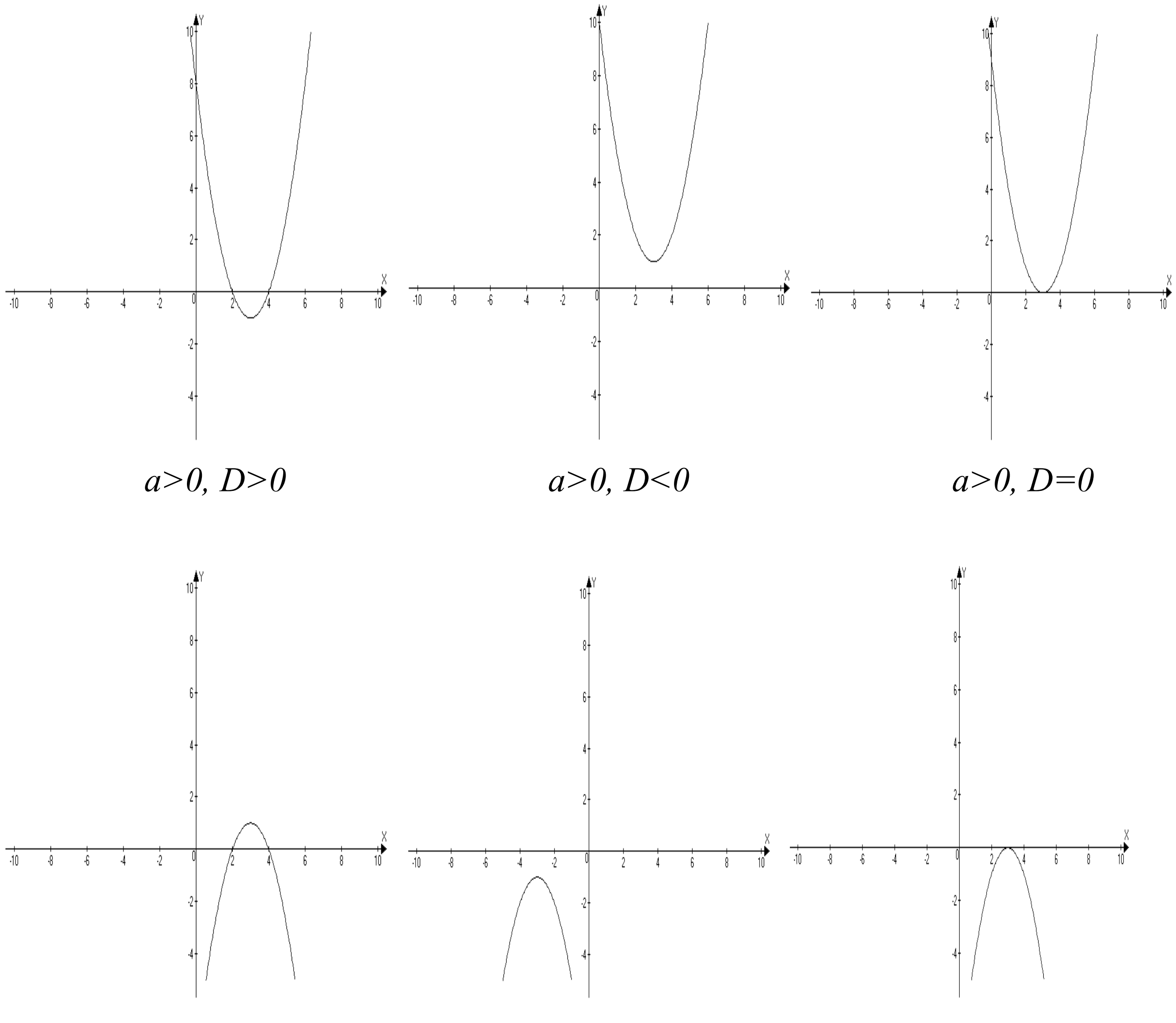
Квадратична функція

Квадратичною називають функцію, яку можна задати формулою $y=ax^2+bx+c$, де x – змінна, $a \neq 0$, b і c – числа.

1. Область визначення: $x \in (-\infty;+\infty)$.

2. Область значень: $y \in (-\infty;+\infty)$.

Графіком квадратичної функції є парабола, її гілки напрямлені вгору, якщо $a > 0$, гілки напрямлені вниз, якщо $a < 0$. Вершина цієї параболи має координати $\left(-\frac{b}{2a};c-\frac{b^2}{4a}\right)$.



a>0, D>0 *a>0, D<0* *a>0, D=0*

a<0, D>0 *a<0, D<0* *a<0, D=0*

Рис. 1.5.

Якщо дискримінант квадратного тричлена ax^2+bx+c додатній, парабола перетинає вісь абсцис у двох точках, що є коренями рівняння: $ax^2+bx+c=0$. Якщо дискримінант дорівнює 0, то графік функції дотикається до осі абсцис, причому абсциса дотику є коренем рівняння $ax^2+bx+c=0$. Якщо дискримінант від'ємний, то графік функції не перетинає вісь абсцис.

Показникова функція

Функція має вигляд: $y = a^x$, де $a > 0$, $a \neq 1$ (рис. 6). Якщо $a < 1$, то її графік співпадає з графіком функції $y = a^{-x}$, де $a > 1$, бо $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$.

Властивості показникової функції:

1. Область завдання: $x \in (-\infty; +\infty)$.
2. Область значень: $y \in (0; +\infty)$.
3. $a^b > a^c$ за $a > 1$, якщо $b > c$.
4. $a^b < a^c$ за $a < 1$, якщо $b > c$.
5. Перехід до іншої основи: $a^x = b^{x \log_b a}$.

Показникову функцію ще називають експоненціальною (лат. exponere − показувати).

З властивостей 1 і 2 робимо висновок: показникова функція відображає всю множину дійсних чисел на множину додатних дійсних чисел.

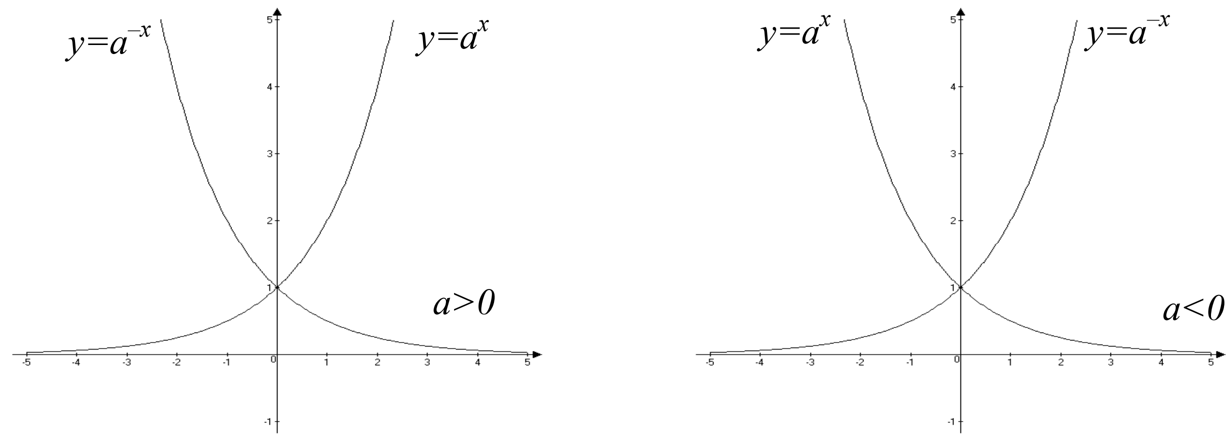


Рис. 1.6.

Логарифмічна функція

Якщо $a^x = y$, то $x = \log_a y$. Бажаючи, як завжди, мати функцію у вигляді $y = f(x)$, поміняємо змінні x та y місцями і отримаємо логарифмічну функцію $y = \log_a x$, де $a \in (0;1) \cup (1;+\infty)$, $x > 0$. Зі сказаного слідує простий спосіб побудови графіка логарифмічної функції: графік показникової функції необхідно повернути проти годинникової стрілки на 90º (заміна місцями змінних x та y), після чого повернути його на 180º навколо вертикальної осі для надання горизонтальній осі напрямку зліва направо (рис. 1.7).

Саме слово логарифм (від грецького logos + arithmos − відношення до числа) в математиці означає показник степеня, до якого треба піднести основу a для отримання даного числа.

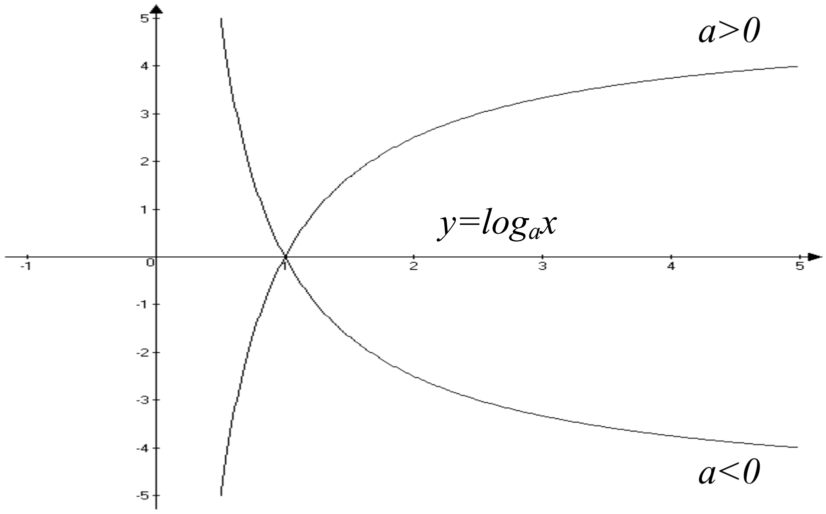


Рис. 1.7.

Властивості логарифмів:

1. $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$.

2. $\log_a \dfrac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$.

3. $\log_a b^c = c\log_a b,\ b > 0$.

4. $\log_{a^n} b = \dfrac{1}{n}\log_a b$.

5. $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ – формула переходу до другої основи.

Властивості логарифмічних функцій:

1. Функція визначена для всіх $x > 0$.
2. Область значень функції: $y \in (-\infty;+\infty)$.
3. З ростом аргументу функція зростає за $a > 0$ і спадає за $a < 0$.
4. Функція додатна для $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 1 \\ a > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x \in (0;1) \\ a \in (0;1) \end{cases} \end{array}\right.$ і від’ємна для $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 1 \\ a \in (0;1) \end{cases} \\ \begin{cases} x \in (0;1) \\ a > 1 \end{cases} \end{array}\right.$.

Показникові та логарифмічна функції взаємно обернені.

Залежно від основи для логарифмів існують спеціальні позначення для двох випадків: $\log_{10} x = \lg x$ (десятковий логарифм) та $\log_e x = \ln x$ (натуральний логарифм).

§4. Геометрія

Геометрія (гр. Γεομετρια − землемірство, Гея − богиня Землі у древніх греків) вивчає просторові властивості предметів, незважаючи на інші ознаки і поділяється на планіметрію (лат.planum − поверхня) та стереометрію (гр. στερεοσ − просторовий).

І. Планіметрія

Основні співвідношення в трикутниках:

1. Прямокутний трикутник:

$c^2 = a^2 + b^2$; $S = \frac{1}{2}ab$; $a = c\sin\alpha = c\cos\beta$.

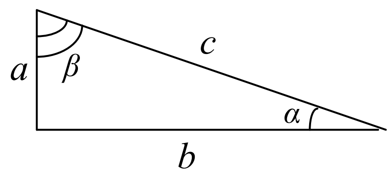


Рис. 1.8.

2. Рівнобедрений трикутник:

$h = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$; $S = \frac{1}{2}ah_a$; $S = \frac{1}{2}b^2\sin(180 - 2\alpha)$;

$S = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$.

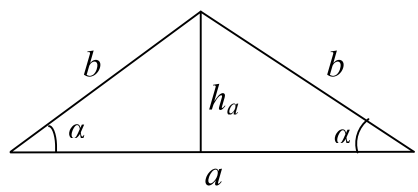


Рис. 1.9.

3. Рівносторонній трикутник:

$\alpha = 60^\circ$; $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

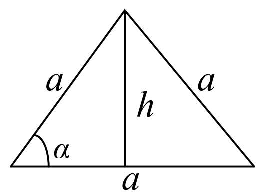


Рис. 1.10.

4. Довільний трикутник:

$h = b\sin(180 - (\alpha + \beta)) = c\sin\alpha$;

медіана: $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + c^2 + 2bc\cos\beta}$;

$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$; $S = rp = \frac{abc}{4R}$;

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, де $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

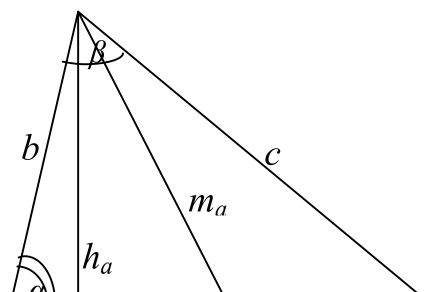


Рис. 1.11.

Теорема синусів:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R.$$

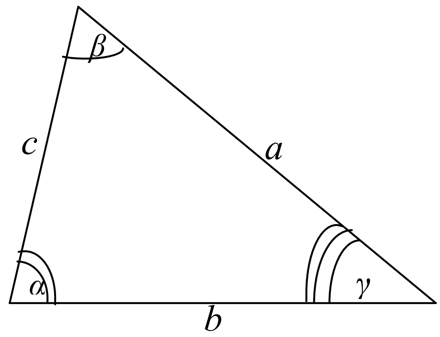


Рис. 1.12.

Теорема косинусів:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha\ .$$

Основні співвідношення в чотирикутниках:

1. Квадрат:

$S=a^2$; $d=a\sqrt{2}$.

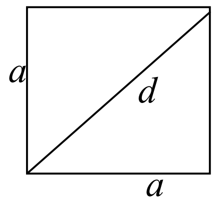


Рис. 1.13.

2. Прямокутник:

$S=ab$; $d=\sqrt{a^2+b^2}$.

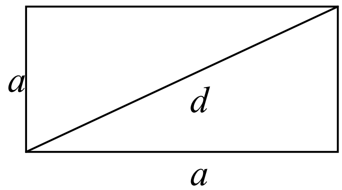


Рис. 1.14.

3. Ромб:

$$S=\frac{d_1d_2}{2}=ah=a^2\sin\alpha\ ;\ d_1^2+d_2^2=4a^2\ ;$$

$$d_1=2a\sin\frac{\alpha}{2};\ d_2=2a\cos\frac{\alpha}{2}.$$

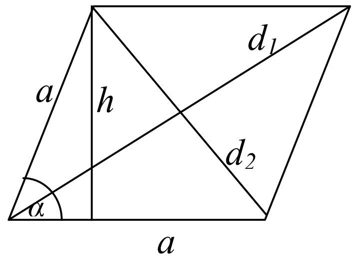


Рис. 1.15.

4. Паралелограм:

$S=ah=ab\sin\alpha$;

$d_1^2+d_2^2=2(a^2+b^2)$.

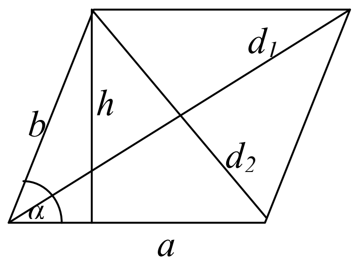


Рис. 1.16.

5. Трапеція:

$$S=\frac{a+b}{2}h=c\cdot h\text{, де } c=\frac{a+b}{2}.$$

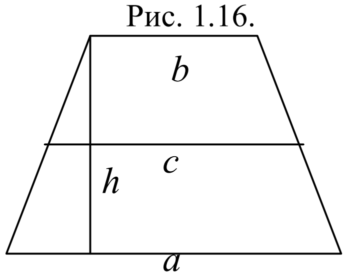


Рис. 1.17.

6. Довільний чотирикутник:

$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\alpha$; $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$.

Якщо $a + c = b + d$, то в чотирикутник можна вписати коло.

Якщо $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D$, то навколо чотирикутника можна описати коло, площа чотирикутника буде:

$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$.

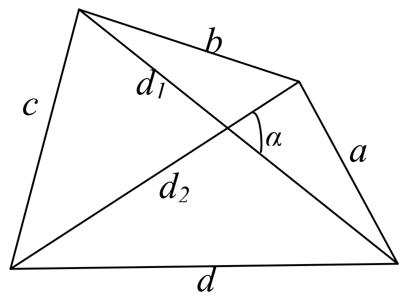


Рис. 1.18.

Коло:

Довжина кола радіуса R : $l = 2\pi R$.

Площа круга: $S = \pi R^2$.

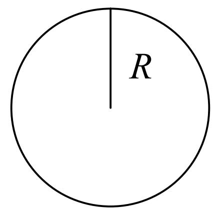


Рис. 1.19.

II.Стереометрія

Многогранники

Усі многогранники − це тіла, обмежені площинами. Введені позначення: V − об'єм тіла, S − площа повної поверхні, S_0 − площа основи, $S_б$ – площа бічної поверхні, h – висота.

1. Призма − це тіло, основи якого − рівні многокутники, а бічні грані − паралелограми. Якщо ребра перпендикулярні до площини основи, то призма називається прямою. Якщо пряма призма в основі має правильні многокутники, то вона називається правильною.

Тоді $V = S_0 h$; $S = S_б + 2S_0$.

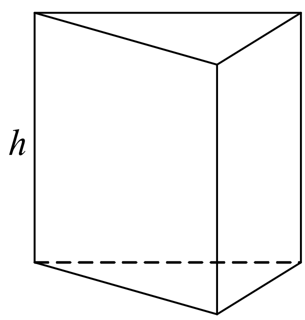


Рис. 1.20.

2. Паралелепіпед − це призма, основами якої є паралелограми. Прямий паралелепіпед, основи якого утворені прямокутниками, називається прямокутним з ребрами a, b, c. В такому паралелепіпеді всі діагоналі d рівні між собою і задовольняють умову: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$. $V = abc$, $S = 2(ab + bc + ac)$.

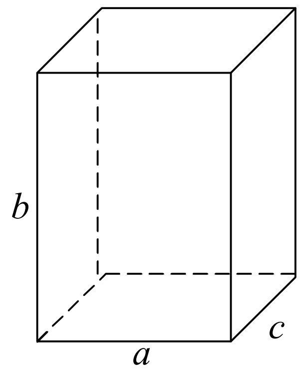


Рис. 1.21.

3. Куб − це прямокутний паралелепіпед, у якого $a = b = c$, $d^2 = 3a^2$,
$V = a^3$, $S = 6a^2$.

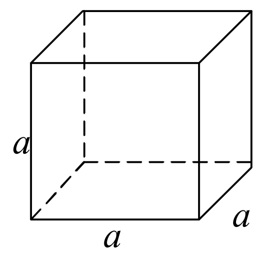


Рис. 1.22.

4. Піраміда − це тіло, основа якого − многокутник, а бічні грані − трикутники, що збігаються в одній вершині, для неї $V = \frac{1}{3} S_0 h$.

Висота будь-якої бічної грані називається *апофемою*. Якщо основа піраміди − правильний многокутник, а висота проходить через центр основи, то піраміда називається правильною, а її бічні грані − рівнобедрені трикутники. Для такої піраміди $S_б = \frac{1}{2} p \cdot l$, де p – периметр основи, l – апофема.

Якщо всі грані і основа рівносторонні трикутники, то піраміда називається тетраедром.

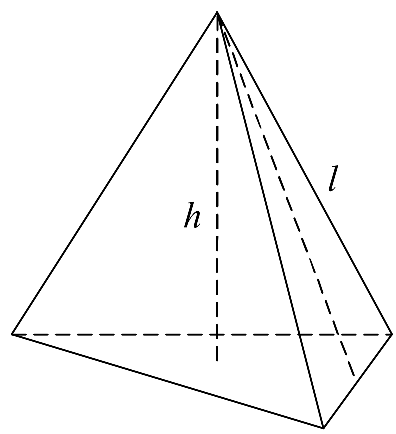


Рис. 1.23.

Тіла обертання:

1. Круговий циліндр − тіло, основа якого − круг радіусом R, а твірна перпендикулярна до площини основи. $S_б = 2\pi Rh$; $S - 2\pi R(R+h)$; $V = \pi R^2 h$.

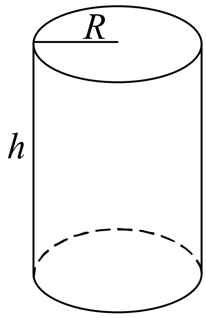


Рис. 1.24.

2. Круговий конус − тіло, утворене обертанням прямокутного трикутника навколо одного з катетів. $S_б = \pi Rl = \pi R\sqrt{R^2 + h^2}$, де l − твірна; $S = \pi R(R+h)$; $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$.

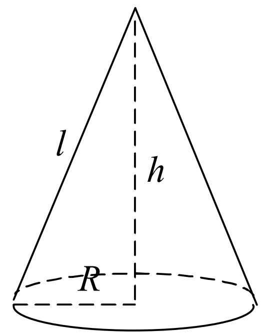


Рис. 1.25.

3. Куля − тіло, утворене обертанням круга навколо діаметра.
$S = 4\pi R^2$; $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

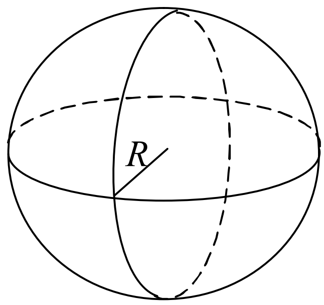


Рис. 1.26.

§5. Тригонометрія

Тригонометрія (гр. Τριγουου − трикутник + μετρεζισ − вимірювання) – це наука, що вивчає способи вимірювання геометричних розмірів на основі неалгебраїчного співвідношення між величинами кутів та сторін трикутника.

Одна дев'яноста частина прямого кута називається градусом (1°). Якщо $\angle\alpha$ опирається на дугу $\overset{\frown}{AB}$ (рис.10), довжина якої дорівнює радіусу, то його величина дорівнює одному радіану.

Одна сота частина прямого кута в міжнародній системі одиниць *SI* називається градом. $360^\circ = 400$ град. Прямий кут складає $\frac{\pi}{2}$ радіан. $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ *радіан* $\approx 0{,}017453$. 1 *радіан* $= \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ 17' 44{,}8''$.

Синусом (лат. sinus − затока) кута α називається відношення BC до радіуса кола (рис. 1.27): $\sin\alpha = \frac{BC}{OB} = \frac{BC}{R}$.

Косинусом (лат. co − при +sinus − затока) кута α називається відношення OC до радіуса кола: $\cos\alpha = \frac{OC}{OB} = \frac{OC}{R}$.

Тангенсом (лат. tangens − дотична) кута α називається відношення дотичної AD, що спирається на кут α, до радіуса кола: $tg\alpha = \frac{AD}{AO} = \frac{AD}{R}$.

Котангенсом кута α називається відношення радіуса кола до дотичної, на яку спирається кут α: $ctg\alpha = \frac{AO}{AD} = \frac{R}{AD} = \frac{1}{tg\alpha}$.

Величини $\sin\alpha, \cos\alpha, tg\alpha, ctg\alpha$ − математичні символи, що означають певні поняття, тому неправильно вважати, що, наприклад, між знаками sin та α існує дія множення ($\sin\alpha$ − це єдиний і нероздільний символ).

Побудовані на колі (рис. 1.27) трикутники OBC та OAD прямокутні, тому можемо стверджувати, що відношення протилежного до кута α катета до гіпотенузи утворює $\sin\alpha$, відношення прилеглого до кута катета до гіпотенузи утворює $\cos\alpha$, відношення протилежного катета до прилеглого − $tg\alpha$ і відношення прилеглого катета до протилежного − $ctg\alpha$. Поняття тригонометричних функцій кута α побудовані на колі, тому називаються круговими тригонометричними функціями.

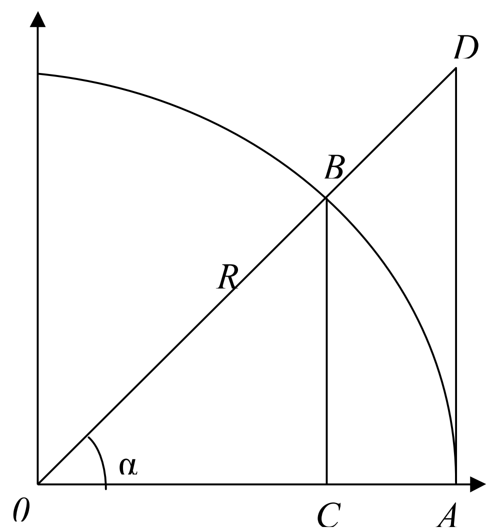


Рис. 1.27.

Якщо $R = 1$, то $\sin\alpha = BC$; $\cos\alpha = OC$; $tg\alpha = AD$; $ctg\alpha = \frac{1}{AD}$. За теоремою Піфагора $BC^2 + OC^2 = OB^2 \Rightarrow BC^2 + OC^2 = R^2 \Rightarrow (\frac{BC}{R})^2 + (\frac{OC}{R})^2 = 1 \Rightarrow$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad (1.10)$$

Отримали теорему Піфагора в тригонометричній формі.

В першій чверті кола всі тригонометричні функції додатні. Знаки функцій в різних чвертях показано на рис. 1.28.

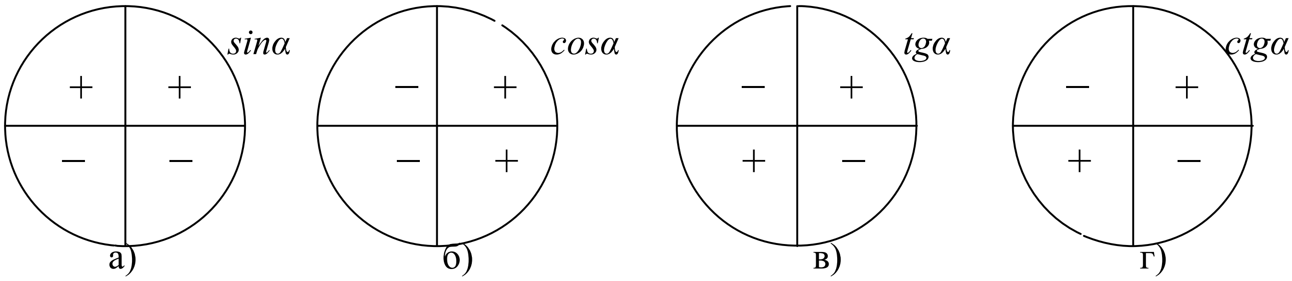


Рис. 1.28.

Кут $720^\circ = 2 \cdot 360^\circ$ означає, що зроблено два повних оберти. Напрямок обертання − проти годинникової стрілки (рис. 1.29). Кут, що належить до першого оберту, є головним значенням кута.

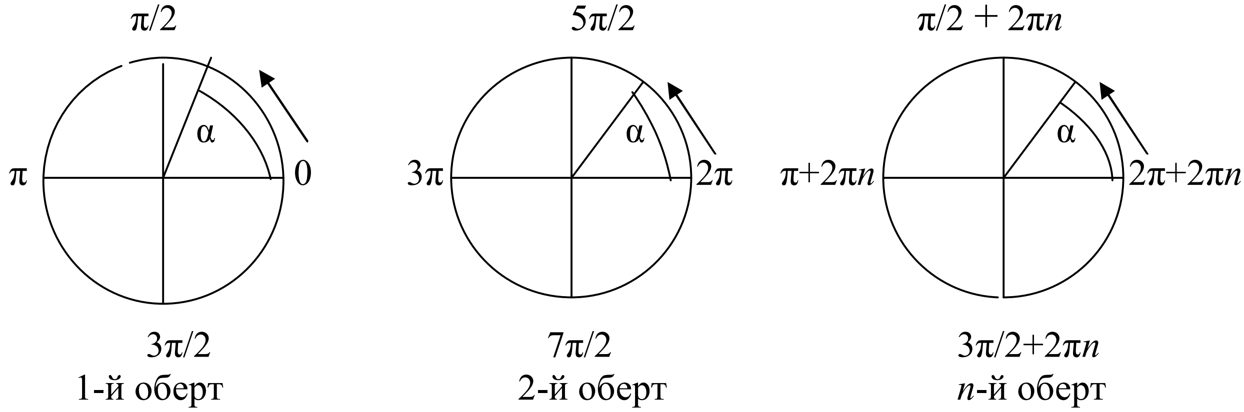


Рис. 1.29.

Значення $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $tg\alpha$ та $ctg\alpha$ змінюються зі зміною кута α, тому вони утворюють тригонометричні функції $\sin x$, $\cos x$, tgx та $ctgx$.

Область значень тригонометричних функцій: $\sin x \in [-1;1]$; $\cos x \in [-1;1]$; $tgx \in (-\infty;+\infty)$; $ctgx \in (-\infty;+\infty)$.

Значення тригонометричних функцій для кутів 0°, 30°, 45°, 60°, 90°:

	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$tg\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	не існує
$ctg\alpha$	не існує	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Формули зведення:

Для знаходження значень тригонометричних функцій будь-якого кута застосовують так звані формули зведення, які дають можливість виразити тригонометричні функції через їх значення в першій чверті.

Якщо задана тригонометрична функція кута $\beta = \pi n \pm \alpha$, то функція не змінюється, а її знак знаходиться згідно з рис. 1.28.

<u>Приклад:</u> $\sin(5\pi + \alpha)$. Число 5 − ціле, тому функція не змінюється. Кут $5\pi + \alpha = 2 \cdot 2\pi + \pi + \alpha$, тобто зроблено два повних оберти, а кут після цього складає $\pi + \alpha$. Отже, гострий кут α знаходиться в третій чверті, де синус має від'ємне значення. Тому $\sin(5\pi + \alpha) = -\sin\alpha$.

Якщо $\beta = \frac{\pi}{2} n \pm \alpha$, то функція змінюється: синус на косинус, тангенс на котангенс та навпаки, а знак функції знаходиться згідно з рис. 027.

Приклад: $\cos\left(\frac{7\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\left(\frac{4\pi + 3\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\left(2\pi + \frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$. Маємо кут $\frac{3\pi}{2} + \alpha$, тобто кут α знаходиться в четвертій чверті. Функція змінюється з косинуса на синус, від'ємний в четвертій чверті, тому $\cos\left(\frac{7\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha$.

Формули зведення можна подати в узагальненій таблиці:

x	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$-\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\pi-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$
$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$
$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$tg\alpha$	$-ctg\alpha$	$tg\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$	$ctg\alpha$	$-tg\alpha$	$ctg\alpha$
$ctg\alpha$	$-tg\alpha$	$ctg\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$	$tg\alpha$	$-ctg\alpha$	$tg\alpha$

Основні співвідношення:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; $\quad tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\quad ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$;

$tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$; $\quad 1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$; $\quad 1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$.

Формули суми та різниці кутів:

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$; $\quad \sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$;

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$; $\quad \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$;

$tg(\alpha + \beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha \cdot tg\beta}$; $\quad tg(\alpha - \beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha \cdot tg\beta}$.

Формули подвійних та половинних кутів:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha\,; \quad \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\,;$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}\,; \qquad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}\,;$$

$$\sin\alpha = \frac{2tg\,\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}\,; \qquad \cos\alpha = \frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}\,; \qquad tg\alpha = \frac{2tg\,\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}\,.$$

Зауваження. Поняття подвійних чи половинних кутів досить умовні. Будь-який кут можна вважати як половинним, так і подвійним. Наприклад, $\sin 4\alpha = \sin 2\beta$, де $\beta = 2\alpha$, або $\sin 4\alpha = \sin\frac{1}{2}\beta$, де $\beta = 8\alpha$.

Сума та різниця тригонометричних функцій:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\,; \qquad \sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\,;$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\,; \qquad \cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\,;$$

$$tg\alpha + tg\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}\,; \qquad tg\alpha - tg\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}\,;$$

$$ctg\alpha + ctg\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}\,; \qquad ctg\alpha - ctg\beta = -\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}\,.$$

Добуток тригонометричних функцій

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))\,;$$

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta))\,;$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))\,.$$

Обернена дія знаходження величини кута за відомими тригонометричними функціями дає обернені тригонометричні функції: $\arcsin a$, $\arccos a$, $arctga$, $arcctga$ (лат. *arcus* − дуга).

$$\alpha = \arcsin a \Rightarrow \sin\alpha = a\,, \quad \arcsin a \in \left[-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}\right];$$

$$\alpha = \arccos a \Rightarrow \cos\alpha = a, \quad \arccos a \in [0;\pi];$$

$$\alpha = arctga \Rightarrow tg\alpha = a\,, \quad arctga \in (\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})\,;$$

$$\alpha = arcctga \Rightarrow ctg\alpha = a\,, \quad arcctga \in (0;\pi)\,.$$

Графіки тригонометричних функцій

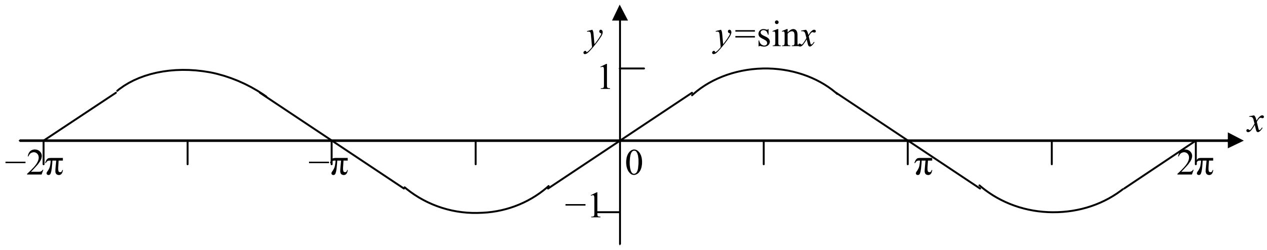


Рис. 1.30.

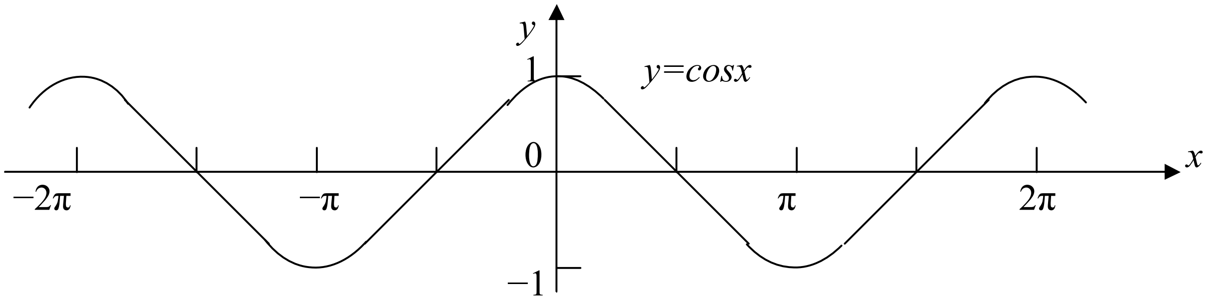


Рис. 1.31.

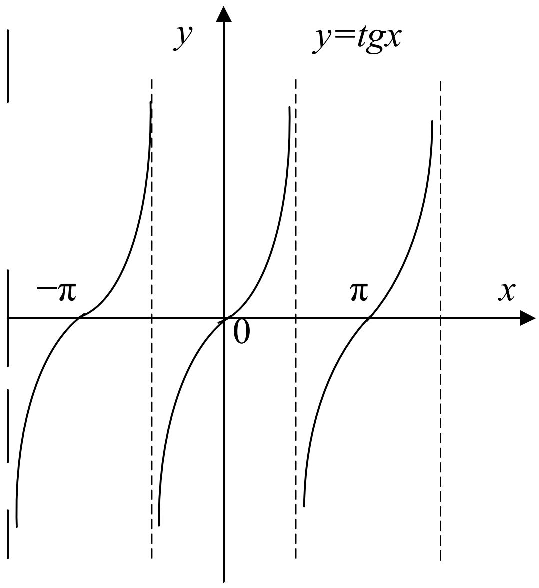


Рис. 1.32.

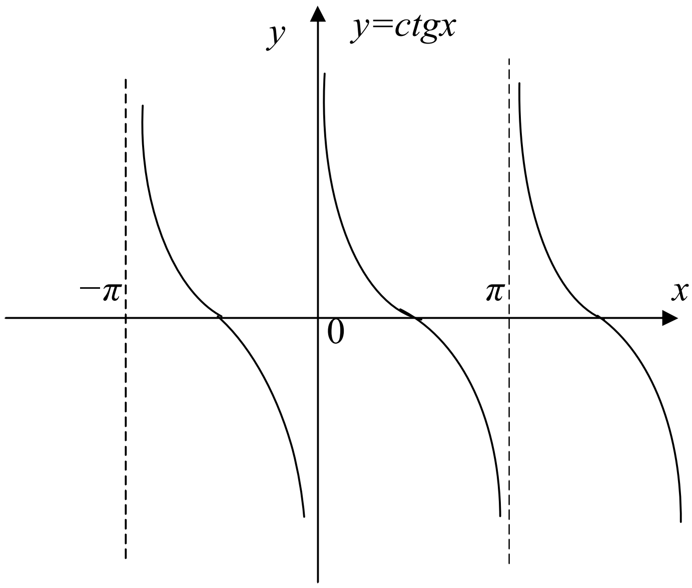


Рис. 1.33.

Графіки обернених тригонометричних функцій

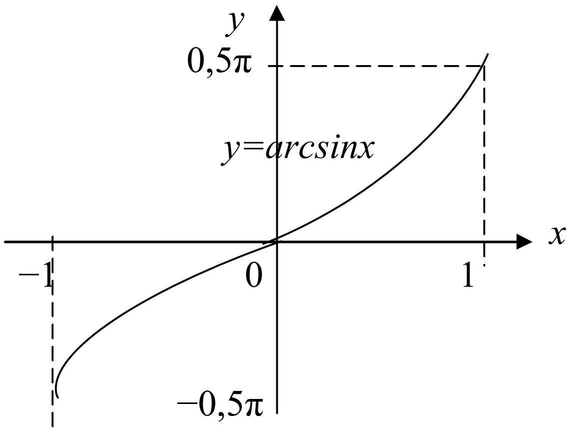


Рис. 1.34.

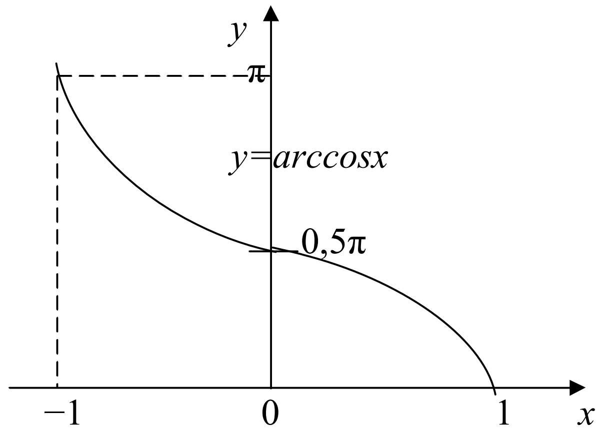


Рис. 1.35.

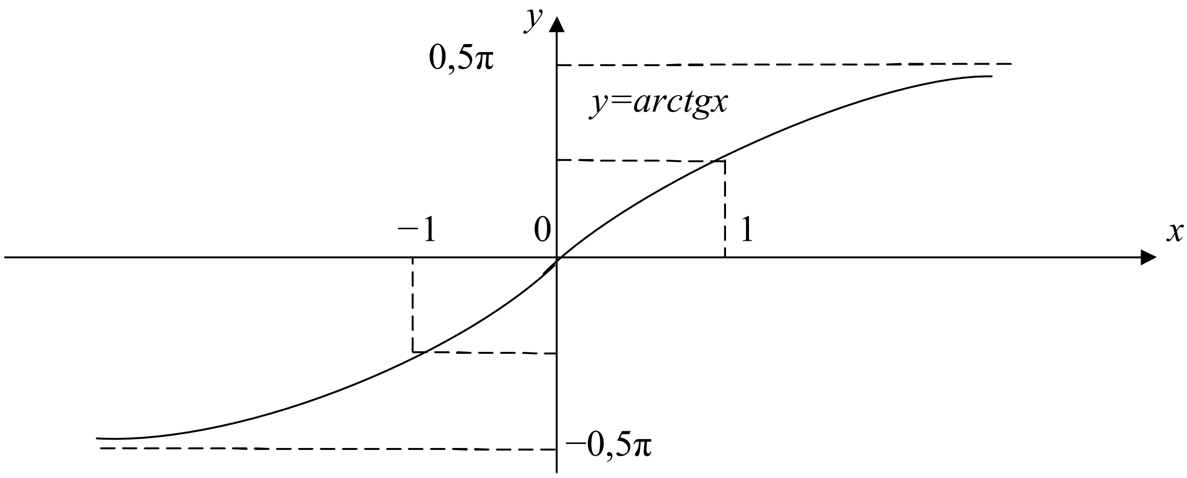


Рис. 1.36.

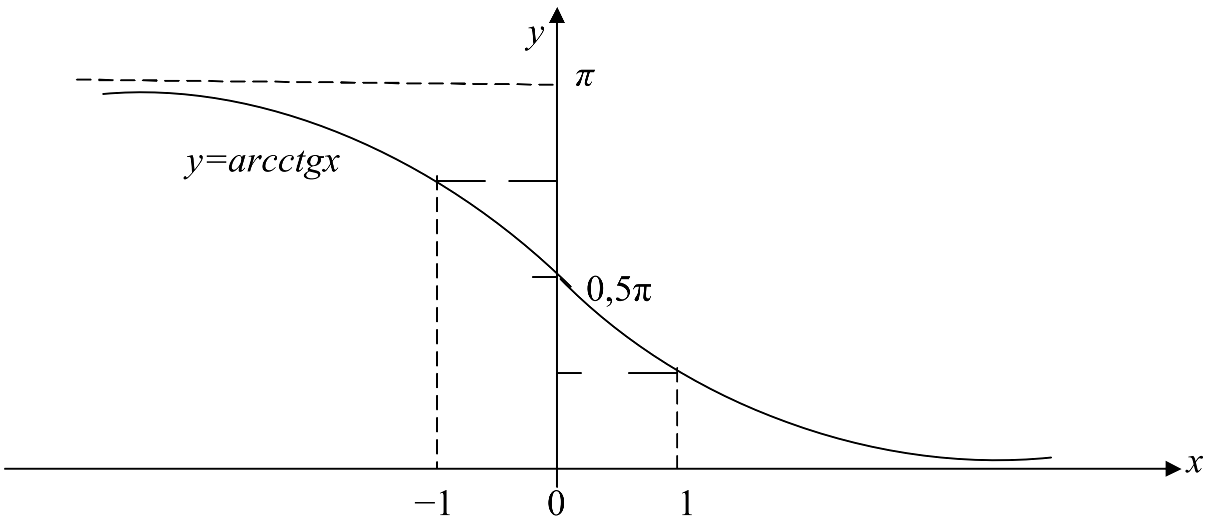


Рис. 1.37.

II. ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

Лінійна алгебра – це один із найбільш важливих підрозділів вищої алгебри, яка займається вивченням довільних систем першого порядку.

Вивчення таких систем привело до введення понять визначника та матриці. Причому, теорія матриць виявилась настільки плідною, що її застосування вийшло далеко за межі лінійної алгебри.

Широке застосування симплексного методу, як методу оптимізації в лінійному програмуванні, спонукало до вивчення основ лінійної алгебри як необхідної бази до розуміння основних понять цього на сьогодні неперевершеного методу послідовного покращення (незважаючи на алгоритмічні та теоретичні негаразди).

§1. Матриці та дії над ними

Нехай задано множину чисел, розміщених у вигляді квадратної таблиці:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{або} \quad A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix} \qquad (2.1)$$

Таку впорядковану множину називають матрицею *(m*х*n)*. Поняття матриці вперше ввели англійські математики У. Гамільтон і Д. Келі. Коротко матрицю позначають так: $A = \left(a_{ij}\right)_{mn}$, або $A = \left\|a_{ij}\right\|_{mn}$. В цьому записі вказується кількість рядків i та стовбців j матриці.

Озн. Матрицею називається упорядкована по рядках та стовпцях таблиця елементів: букв, чисел, функцій тощо. Так, наприклад, сторінка газети є матрицею, оскільки вона має рядки тексту і стовпці у вигляді колонок тексту.

Матриці позначають великими латинськими літерами *A, B, C* тощо.

Числа a_{ij} називають елементами матриці.

Добуток числа рядків m на число стовбців n називають розміром матриці і позначають mхn.

Матриці мають однакові розміри, якщо у них однакова кількість рядків і стовбців.

Озн. Матриці *A* та *B* називають рівними між собою, якщо вони мають однакові розміри, а їх елементи, що знаходять на однакових місцях, рівні між собою. При цьому пишуть $A = B$.

Озн. Квадратною називають таку матрицю $A = \left(a_{ij}\right)_{mn}$, в якій $m = n$, тобто кількість рядочків дорівнює кількості стовпчиків.

Наприклад, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Озн. Діагональною називають матрицю, по головній діагоналі якої розташовані елементи a_{ij}, а інші елементи є нулями, тобто $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{mm} \end{pmatrix}$.

Озн. Одиничною називають діагональну матрицю, по головній діагоналі якої розташовані одиниці, тобто $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$.

Озн. Нульовою називають матрицю, всі елементи якої нулі: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$.

Властивість: Якщо до заданої матриці *A* додати нульову, то отримаємо задану матрицю *A*.

Дії над матрицями:

Нехай задано матриці *A* та *B*: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -11 & 4 & 5 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Сума матриць.

Операція додавання матриць вводиться тільки для матриць однакового розміру. Сумою матриць $A = (a_{ij})_{mn}$ та $B = (b_{ij})_{mn}$ називається матриця $C = (c_{ij})_{mn}$, де $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. При цьому записують $C = A + B$.

<u>Приклад</u>:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+0 & -2+1 & 0+0 \\ 3+(-11) & 5+4 & -3+5 \\ 2+(-3) & 0+(-1) & -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -8 & 9 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Властивість: Для довільних матриць A, B та C однакових розмірів справджуються рівності: $A+B=B+A$; $(A+B)+C=A+(B+C)$.

2. Добуток матриці на число.

Добутком матриці $A=(a_{ij})_{mn}$ на число λ називається матриця $C=(c_{ij})_{mn}$, де $c_{ij}=\lambda a_{ij}$. При цьому записують $C=\lambda A$.

Приклад:

$$-4\cdot A=\begin{pmatrix}-4\cdot 1 & -4\cdot(-2) & -4\cdot 0\\ -4\cdot 3 & -4\cdot 5 & -4\cdot(-3)\\ -4\cdot 2 & -4\cdot 0 & -4\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 8 & 0\\ -12 & -20 & 12\\ -8 & 0 & 4\end{pmatrix}.$$

3. Віднімання матриць.

Різницю матриць A та B розглядають як суму матриць A та $-B$, при чому матриця $-B$ утворена множенням матриці B на -1.

Властивості додавання та множення на число:

Для довільних матриць A, B однакових розмірів та довільних чисел μ і λ справджуються рівності:

1) $A+B=B+A$ – комутативність відносно додавання матриць;

2) $(A+B)+C=A+(B+C)$ – асоціативність відносно додавання матриць;

3) $A+0=A$; $A-A=0$ – роль нульової матриці в діях над матрицями така, як числа нуль в діях над числами;

4) $(\lambda\cdot\mu)\cdot A=\lambda\cdot(\mu\cdot A)$ – асоціативність відносно множення чисел;

5) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$ – дистрибутивність множення на число відносно додавання матриць;

6) $(\lambda+\mu)\cdot A=\lambda\cdot A+\mu\cdot A$ – дистрибутивність множення на матрицю відносно додавання чисел.

4. Добуток матриць.

Операція множення матриць вводиться лише для узгоджених матриць.

Озн. Матриця називається узгодженою, якщо кількість стовпців першої дорівнює кількості рядків другої.

Якщо ця умова не виконується, тобто матриці неузгоджені, то множення таких матриць неможливе.

З узгодженості матриці A з матрицею B випливає узгодженість матриці B з матрицею A. Квадратні матриці одного порядку взаємно узгоджені.

Добутком матриці $A=\left(a_{ij}\right)_{mn}$ на матрицю $B=\left(b_{ij}\right)_{ns}$ називається матриця $C=\left(c_{ij}\right)_{mn}$, де $c_{ij}=\overline{a_i}\cdot\overline{b_j}$ ($\overline{a_i}$ – *i-й* рядок першої матриці, $\overline{b_j}$ – *j-й* стовбець другої матриці). Тобто, щоб визначити елемент c_{24}, що стоїть в другому рядку і четвертому стовбці матриці $C=AB$, потрібно знайти суму добутків елементів другого рядка матриці *A* на відповідні елементи четвертого стовпця матриці *B*. При цьому записують $C=A\cdot B$.

<u>Приклад</u>:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 3 & 5 & -3\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -11 & 4 & 5\\ -3 & -1 & 2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot 0+(-2)\cdot(-11)+0\cdot(-3) & 1\cdot 1+(-2)\cdot 4+0\cdot(-1) & 1\cdot 0+(-2)\cdot 5+0\cdot 2\\ 3\cdot 0+5\cdot(-11)+(-3)\cdot(-3) & 3\cdot 1+5\cdot 4+(-3)\cdot(-1) & 3\cdot 0+5\cdot 5+(-3)\cdot 2\\ 2\cdot 0+0\cdot(-11)+(-1)\cdot(-3) & 2\cdot 1+0\cdot 4+(-1)\cdot(-1) & 2\cdot 0+0\cdot 5+(-1)\cdot 2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}22 & -7 & -10\\ -46 & 26 & 19\\ 4 & 3 & -2\end{pmatrix}.$$

Перевіримо чи справджується переставний закон множення для матриць:

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -11 & 4 & 5\\ -3 & -1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 3 & 5 & -3\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0\cdot 1+1\cdot 3+0\cdot 2 & 0\cdot(-2)+1\cdot 5+0\cdot 0 & 0\cdot 0+1\cdot(-3)+0\cdot(-1)\\ -11\cdot 1+4\cdot 3+5\cdot 2 & -11\cdot(-2)+4\cdot 5+5\cdot 0 & -11\cdot 0+4\cdot(-3)+5\cdot(-1)\\ -3\cdot 1-1\cdot 3+2\cdot 2 & -3\cdot(-2)-1\cdot 5+2\cdot 0 & -3\cdot 0-1\cdot(-3)+2\cdot(-1)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}3 & 5 & -3\\ 11 & 42 & -17\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Отже, переставний закон множення для матриць не справджується $A\cdot B\neq B\cdot A$.

Властивості множення матриць:

Для довільних матриць *A*, *B* однакових розмірів та довільних чисел μ і λ справджуються рівності:

1) $(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$ – асоціативність відносно множення матриць;

2) $A\cdot 0=0\cdot A=0$ – роль нульової матриці в діях над матрицями така, як числа нуль в діях над числами;

3) $(\lambda \cdot A)\cdot B = A\cdot(\lambda \cdot B) = \lambda \cdot (B\cdot A)$ – асоціативність відносно множення матриць і числа;

4) $C\cdot(A+B) = C\cdot A + C\cdot B$; $(A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$ – дистрибутивність множення відносно додавання матриць;

5) $A\cdot E = E\cdot A = A$ – роль одиничної матриці в діях над матрицями така, як одиниці в діях над числами;

5. Піднесення матриці до степеня.

Піднесення матриці до степеня *n* розглядають як множення матриці саму на себе *n* раз.

<u>Приклад</u>:

$$A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 1 - 2\cdot 3 + 0\cdot 2 & 1\cdot(-2) - 2\cdot 5 + 0\cdot 0 & 1\cdot 0 - 2\cdot(-3) + 0\cdot(-1) \\ 3\cdot 1 + 5\cdot 3 - 3\cdot 2 & 3\cdot(-2) + 5\cdot 5 - 3\cdot 0 & 3\cdot 0 + 5\cdot(-3) - 3\cdot(-1) \\ 2\cdot 1 + 0\cdot 3 - 1\cdot 2 & 2\cdot(-2) + 0\cdot 5 - 1\cdot 0 & 2\cdot 0 + 0\cdot(-3) - 1\cdot(-1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -5 & -12 & 6 \\ 12 & 19 & -12 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Транспонування матриць.

Щоб транспонувати матрицю $A = (a_{ij})_{mn}$ необхідно створити матрицю $A^T = (a_{ji})_{nm}$, тобто рядочки замінити стовбцями.

<u>Приклад</u>:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

№1.1. Для матриць *A* та *B*: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$, знайти матриці:

а) $A+B$; б) $-4A$; в) A^T; г) $A\cdot B$; д) $B\cdot A$; е) A^2.

№1.2. Виконати множення матриць $A\cdot B$ та $B\cdot A$, якщо $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & 1\\ 3 & -6\end{pmatrix}$ і $B=\begin{pmatrix}1 & -3 & -4\\ 4 & 7 & 2\end{pmatrix}$.

№1.3. Для матриць $A=\begin{pmatrix}1 & 11\\ 3 & -7\end{pmatrix}$ та $B=\begin{pmatrix}9 & 2\\ 8 & 1\end{pmatrix}$ знайти матриці:

а) $2A+\frac{1}{2}B$; б) $2AB-B$; в) $2BA+4A$.

№1.4. Для матриць A та B: $A=\begin{pmatrix}0 & -3 & 1\\ 1 & -4 & 2\\ 2 & -1 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 11 & 9\\ 1 & 0 & 2\\ 4 & 3 & 5\end{pmatrix}$, знайти матриці:

а) $A+B$; б) $-4A$; в) A^T; г) $A\cdot B$; д) $B\cdot A$; е) A^2.

№1.5. Для матриць A та B: $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -3\\ 4 & 5 & -4\\ 3 & -2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 4\\ 1 & 5 & 2\\ -4 & 1 & 3\end{pmatrix}$, знайти матриці: а) $2A+\frac{1}{2}B$; б) $2AB-B$; в) $2BA+4A$.

№1.6. Для матриць $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -5\end{pmatrix}$ та $B=\begin{pmatrix}9 & -2\\ 7 & 3\end{pmatrix}$ перевірити, чи справджуються формули скороченого множення:

а) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$; б) $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

Виконати дії в наступних прикладах:

№1.7. $\left(\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & -3\\ -4 & 1\end{pmatrix}\right)^2$;

№1.8. $\left(\begin{pmatrix}5 & -6\\ 3 & 7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}9 & -11\\ 4 & 7\end{pmatrix}\right)^2$;

№1.9. $\begin{pmatrix}1 & -8 & 5\\ -3 & 4 & 2\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}^2-\begin{pmatrix}1 & -8 & 5\\ -3 & 4 & 2\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}$;

№1.10. $\begin{pmatrix}2 & -7 & 4\\ -1 & 0 & -2\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}^2+\begin{pmatrix}2 & -7 & 4\\ -1 & 0 & -2\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}^T$;

№1.11. $\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}12 & 0\\ 6 & -8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & -3\\ 4 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ -3 & 4\end{pmatrix}$;

№1.12. $\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}12 & 0\\ 6 & -3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}7 & -3\\ 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$;

№1.13. $\begin{pmatrix}-7 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}8 & -1\\ 3 & 2\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}4 & 2\\ 0 & 8\end{pmatrix}$;

№1.14. $\begin{pmatrix}-7 & 5\\ 1 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}8 & -1\\ -7 & 5\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}-6 & 9\\ 0 & 3\end{pmatrix}$;

№1.15. $\begin{pmatrix}4 & 1 & -5\\ 2 & 3 & 7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -4\\ 3 & 5\\ 4 & 6\end{pmatrix}-7\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & -3\end{pmatrix}$;

№1.16. $\begin{pmatrix}2 & -4\\ 3 & 5\\ 4 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 1 & -5\\ 2 & 3 & 7\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}1 & -4 & -5\\ 2 & 4 & 6\\ -3 & 5 & 1\end{pmatrix}$;

№1.17. $7\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & -3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 6 & -5\\ -9 & 3 & 7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -4\\ 3 & 7\\ 1 & 6\end{pmatrix}$;

№1.18. $4\begin{pmatrix}1 & -4 & -5\\ 0 & 7 & 6\\ -2 & 5 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & -4\\ 4 & -5\\ -9 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6 & 3 & -5\\ 2 & 8 & 7\end{pmatrix}$.

Індивідуальне завдання

Виконати дії $\begin{pmatrix}1 & n & 2\\ -3 & n-1 & 5\\ 4 & n+1 & -7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}n-3 & n-4 & n-5\\ -3 & 4 & -5\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}+n\cdot\begin{pmatrix}2 & -n & 1\\ n & 3 & -2\\ 4 & -1 & 0\end{pmatrix}$,

де n – остання цифра номера студента за списком.

§ 2. Визначники. Властивості визначників

Озн. Визначником (детермінантом) порядку n називається число, одержане в результаті певних обчислень квадратної матриці $A=\left(a_{ij}\right)_{nn}$ того ж порядку. Позначається Δ або $\det A$. Поняття визначника ввів В. Лейбніц.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{2.2}$$

На відміну від матриці визначник обмежується справа та зліва одинарною лінією. Матриця − це таблиця, а визначник − це число.

Щоб обчислити визначник другого порядку, від добутку елементів головної діагоналі потрібно відняти добуток елементів допоміжної діагоналі:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

<u>Приклад:</u> $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 4 \cdot 1 = 6 - 4 = 2.$

Правило обчислення визначника випливає із системи двох лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}.$$

Якщо з другого рівняння знайти x_2 і підставити це значення в перше рівняння, то одержимо рівняння з однією невідомою x_1. Розв'язування цього рівняння дає значення:

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}. \tag{2.3}$$

Знаменник $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ складено виключно з коефіцієнтів при невідомих, які утворюють матрицю $\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix}$, тому визначник $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21.}$

Розглядання квадратної системи з трьох рівнянь вказує на правило обчислення визначників третього порядку, яке відрізняється від правила обчислення визначників другого порядку і має три рівносильних варіанти.

1. Обчислюючи визначник третього порядку, знизу необхідно дописати два перших рядки, в результаті одержимо три головні і три допоміжні діагоналі:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ \hline a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} +$$

$$+ a_{33}a_{12}a_{21}).$$

2. Крім приписування знизу двох перших рядків, можна приписати два перших стовпці, що також дає три головні і три допоміжні діагоналі:

$$\Delta = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right| = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} +$$

$$+ a_{12}a_{21}a_{33}).$$

3. Для розкриття визначника третього порядку можна також застосувати правило трикутників:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31}) -$$

$$(a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{21}a_{12}a_{33}) \qquad (2.4)$$

Для застосування правила трикутників проводимо наступні дії:

1. Знаходимо добуток елементів головної діагоналі.

2. Знаходимо два елементи, через які можна провести пряму, паралельну прямій, що проходить через головну діагональ (вище та нижче головної діагоналі).

3. Для кожної знайденої пари знаходимо елемент, розташований у найбільш віддаленому кутку, одержимо трикутник елементів. Ці три числа перемножуємо (їх дві пари) і додаємо до добутку елементів головної діагоналі. Маємо: $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31}$.

4. Знаходимо добуток елементів допоміжної діагоналі.

5. Знаходимо пари чисел аналогічно пункту 2 і знаходимо добуток трьох елементів двох трикутників. Одержимо суму: $a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{12}a_{21}a_{33}$.

6. Різниця двох одержаних сум і буде значенням визначника.

Правило розкриття визначника 3-го порядку ще називають ***правилом Сарріюса***.

Приклад : $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 6 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 4\cdot 5\cdot 5 + 2\cdot(-3)\cdot(-2) + (-3)\cdot 3\cdot 6 -$

$$-(-2)\cdot 5\cdot 6-(-3)\cdot 3\cdot 4-2\cdot(-3)\cdot 5=100+12-54+60+36+30=184.$$

Властивості визначників:

1. Значення визначника не змінюється, якщо всі його рядки замінити відповідними стовбцями.

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Для доведення цієї властивості досить застосувати правило трикутників і порівняти одержані результати. Доведемо цю властивість для визначника третього порядку:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{21}a_{32}a_{13}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{32}a_{23}a_{11};$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{21}a_{32}a_{13}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{32}a_{23}a_{11}.$$

Отже, $\Delta_1=\Delta_2$, тобто властивість справджується.

2. Перестановка двох рядків визначника рівносильна множенню його на –1.

Тобто, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{12} & a_{1} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Перевіримо дану властивість на прикладі:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}=8+3+20-12-5-8=6;\ \Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix}=8+5+12-20-8-3=-6.$$

3. Якщо визначник має два однакових рядки, або стовпці, то він дорівнює нулю. Тобто, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}=0$.

Перевіримо дану властивість на прикладі:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 4 \end{vmatrix}=8+5+20-20-5-8=0;\ \Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=6+5+4-6-5-4=0.$$

4. Якщо всі елементи якого-небудь рядка, або стовпця визначника містять спільний множник, то його можна винести за знак визначника. Тобто,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & ka_{33} \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Перевіримо дану властивість на прикладі:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 8 & 4 \\ 5 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 32 + 20 + 20 - 80 - 20 - 8 = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 5 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 16 + 10 + 10 - 40 -$$

$$-10 - 4 = -36.$$

5. Якщо всі елементи деякого рядка, або стовпця визначника дорівнюють нулю, то сам визначник дорівнює нулю.

Тобто, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix} = 0$.

6. Якщо відповідні елементи двох рядків визначника пропорційні, то визначник дорівнює нулю. Тобто, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$.

Перевіримо дану властивість на прикладі:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 5 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 20 + 20 - 20 - 20 - 8 = 0.$$

7. Якщо кожен елемент деякого рядка визначника є сумою двох доданків, то визначник може бути зображений у вигляді суми двох визначників, у яких один у згаданому рядку має перші з заданих доданків, а інший другі; елементи, що знаходяться на решті місць у всіх трьох визначниках одні й ті самі. Тобто,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & b_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

8. Якщо до елементів деякого рядка визначника додати відповідні елементи іншого рядка, помножені на довільний спільний множник, то значення визначника при цьому не зміниться. Тобто, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + ka_{13} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} + ka_{23} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} + ka_{33} & a_{33} \end{vmatrix}$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Обчислити визначники в наступних завданнях:

№1.19. $\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 7 & 12 \end{vmatrix}$;

№1.20. $\begin{vmatrix} 9 & 0 \\ 14 & 1 \end{vmatrix}$;

№1.21. $\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$;

№1.22. $\begin{vmatrix} -7 & 1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix}$;

№1.23. $\begin{vmatrix} -6 & 11 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}$;

№1.24. $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -8 & -2 \end{vmatrix}$;

№1.25. $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 3 \\ 7 & 3 & 5 \end{vmatrix}$;

№1.26. $\begin{vmatrix} 4 & 7 & 3 \\ -9 & 6 & 2 \\ 8 & 5 & 1 \end{vmatrix}$;

№1.27. $\begin{vmatrix} -5 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \\ 8 & 3 & 5 \end{vmatrix}$;

№1.28. $\begin{vmatrix} 1 & -4 & 7 \\ -2 & 5 & -8 \\ 3 & -6 & 9 \end{vmatrix}$;

№1.29. $\begin{vmatrix} -5 & 9 & 2 \\ -6 & -5 & 3 \\ 7 & -1 & 0 \end{vmatrix}$;

№1.30. $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & 2 \\ 13 & 7 & 4 \end{vmatrix}$;

№1.31. $\begin{vmatrix} 25 & 8 & 3 \\ -3 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & -2 \end{vmatrix}$;

№1.32. $\begin{vmatrix} 7 & 8 & 3 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & 6 & 5 \end{vmatrix}$;

№1.33. $\begin{vmatrix} 11 & 5 & 6 \\ 1 & -2 & -3 \\ 7 & 4 & 4 \end{vmatrix}$;

№1.34. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 10 & 3 \\ 4 & -1 & 5 \end{vmatrix}$;

№1.35. $\begin{vmatrix} 3 & 9 & 1 \\ 9 & 12 & 5 \\ 2 & -3 & -2 \end{vmatrix}$;

№1.36. $\begin{vmatrix} 20 & 3 & -3 \\ -5 & -6 & 7 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$;

№1.37. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -5 & 2 \end{vmatrix}$;

№1.38. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$.

Індивідуальне завдання

Обчислити визначники в наступних завданнях:

1) $\begin{vmatrix} n & n-1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$;   2) $\begin{vmatrix} n & 2 & n+2 \\ 2 & n-1 & 7 \\ n+2 & -3 & -n \end{vmatrix}$;   3) $\begin{vmatrix} n & 5 & 2 & -2n \\ 1 & n-1 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 2n & 5 \\ 1 & -n & 6 & n+2 \end{vmatrix}$.

де n – остання цифра номера студента за списком.

§ 3. Мінори. Алгебраїчні доповнення

Озн. Мінором M_{ik}, що відповідає елементу a_{ik} матриці (1), називається визначник, який відповідає матриці, утвореній з матриці (1) викреслюванням i-го рядка та k-го стовбця.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

З визначника порядку n можна знайти n^2 мінорів (за числом елементів визначника).

Озн. Алгебраїчним доповненням A_{ik}, що відповідає елементу a_{ik} матриці (1), називається відповідний мінор, взятий зі знаком «плюс», якщо сума його індексів парна, і зі знаком «мінус», якщо сума його індексів непарна: $A_{ik} = (-1)^{i+k} \cdot M_{ik}$.

<u>Приклад</u>: Дано матрицю $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 6 & -3 & 5 \end{pmatrix}$.

Обчислити мінори M_{12} і M_{22} та алгебраїчні доповнення A_{12} і A_{22}.

$M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 18 = -8$; $M_{22} = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 20 - (-12) = 32$;

$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot (2 \cdot 5 - 3 \cdot 6) = -(10 - 18) = 8$;

$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^4 \cdot (4 \cdot 5 - 6 \cdot (-2)) = 20 - (-12) = 32$.

Теорема 1. Значення визначника n-го порядку, що визначає матрицю (2.1), дорівнює сумі добутків елементів довільного рядка або довільного стовпця на відповідні алгебраїчні доповнення.

Доведення: Покажемо, що для визначника $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ виконуються такі рівності:

$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$ $\qquad$ $\Delta = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$

$\Delta = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$ $\qquad$ $\Delta = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$

$\Delta = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}$ $\qquad$ $\Delta = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}$

Доведемо, наприклад, першу з них:

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32} -$$
$$- a_{21}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} = \Delta .$$

Аналогічно доводяться і інші рівності.

<u>Приклад</u>: Обчислити визначник розкладаючи його за елементами третього рядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -7 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & -11 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -7 & 5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (-11) \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 4 \cdot 1 \cdot (-7 \cdot 3 - 5 \cdot (-2)) + 2 \cdot (-1) \cdot (3 \cdot 3 - 5 \cdot 1) + (-11) \cdot 1 \cdot (3 \cdot (-2) - (-7) \cdot 1) = -44 -$$
$$- 8 - 11 = 63 .$$

Теорема 2. Сума добутків елементів будь-якого рядка, або стовпця визначника на алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого рядка, чи стовпця дорівнює нулю.

Доведення: Нехай маємо визначник $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Розглянемо, наприклад, суму добутків елементів першого рядка визначника на алгебраїчні доповнення елементів другого рядка:

$$\Delta = a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = -a_{11}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) +$$
$$+ a_{12}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - a_{13}(a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12}) = 0 .$$

<u>Приклад:</u> Обчислити визначник четвертого порядку:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1 & 2\\ 3 & 0 & 1 & 5\\ 1 & -2 & 0 & 3\\ -2 & -4 & -1 & 6\end{vmatrix}.$$

Додамо перший рядок до другого і четвертого, утворивши визначник:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1 & 2\\ 4 & 2 & 0 & 7\\ 1 & -2 & 0 & 3\\ -1 & -2 & 0 & 8\end{vmatrix}.$$

Переставимо місцями перший і третій стовпчики:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 4 & 7\\ 0 & -2 & 1 & 3\\ 0 & -2 & -1 & 8\end{vmatrix}.$$

Додамо другий рядок до третього і четвертого рядків і винесемо спільний множник елементів третього та четвертого рядків:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 4 & 7\\ 0 & 0 & 5 & 10\\ 0 & 0 & 3 & 15\end{vmatrix}=-5\cdot 3\cdot\begin{vmatrix}1 & 2 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 4 & 7\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 5\end{vmatrix}.$$

Віднявши третій рядок від четвертого, одержимо:

$$\Delta=-5\cdot 3\cdot\begin{vmatrix}1 & 2 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 4 & 7\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{vmatrix}=-15\cdot 1\cdot 2\cdot 1\cdot 3=-90.$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Обчислити мінори та алгебраїчні доповнення в наступних завданнях:

№1.39. $\begin{vmatrix}4 & 5 & -3\\ 1 & 0 & -5\\ 3 & 11 & 2\end{vmatrix}$;

№1.40. $\begin{vmatrix}2 & -1 & 4\\ 14 & 3 & 0\\ 6 & -2 & 1\end{vmatrix}$;

№1.41. $\begin{vmatrix} 4 & 5 & 2 & 1 \\ -4 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 6 & -2 \end{vmatrix}$; **№1.42.** $\begin{vmatrix} 6 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

Обчислити визначник розкладаючи його за елементами рядка або стовпця в наступних завданнях:

№1.43. $\begin{vmatrix} -7 & 11 \\ 13 & -2 \end{vmatrix}$; **№1.44.** $\begin{vmatrix} 33 & 14 \\ 7 & 10 \end{vmatrix}$;

№1.45. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 15 \\ 1 & -3 & -6 \end{vmatrix}$; **№1.46.** $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 14 & 8 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}$;

№1.47. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ -4 & 0 & 5 & 0 \\ -2 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$; **№1.48.** $\begin{vmatrix} 4 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 6 & -2 \end{vmatrix}$.

Індивідуальне завдання

Обчислити визначники в наступних завданнях:

1) $\begin{vmatrix} n & n-1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} n & 2 & n+2 \\ 2 & n-1 & 7 \\ n+2 & -3 & -n \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} n & 5 & 2 & -2n \\ 1 & n-1 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 2n & 5 \\ 1 & -n & 6 & n+2 \end{vmatrix}$.

де n – остання цифра номера студента за списком.

§ 4. Ранг матриці

Нехай задано матрицю $A = (a_{ij})_{mn}$. Виділимо в матриці A будь-які k рядків і стільки ж стовпців, де k – число, не більше чисел m і n.

Озн. Визначник k порядку, складений з елементів, що стоять на перетині виділених рядків і стовпців, називається мінором k-го порядку матриці $A = (a_{ij})_{mn}$.

Озн. Рангом $r(A)$ матриці A називається найбільший з порядків її мінорів, відмінних від нуля.

Безпосередньо з означення випливає, що:

1) ранг існує для будь-якої матриці;

2) $r(A) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $A = 0$;

3) для квадратної матриці n-го порядку ранг дорівнює n тоді і тільки тоді, коли матриця не вироджена.

Озн. Квадратна матриця називається виродженою, якщо її визначник дорівнює нулю.

Ранг матриці можна знайти так. Якщо всі мінори першого порядку дорівнюють нулю, то $r=0$. Якщо хоч один з мінорів першого порядку відмінний від нуля, а всі мінори другого порядку дорівнюють нулю, то $r=1$. У випадку, коли є мінор другого порядку, відмінний від нуля, досліджуємо мінори третього порядку. Так продовжуємо доти, поки не станеться одне з двох: або всі мінори порядку k дорівнюють нулю або мінорів порядку k не існує, тоді $r=k-1$.

Приклад: Знайти ранг матриці: $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 2 & 0 & 4 & 0\\ 3 & 0 & 6 & 0\end{pmatrix}$.

Серед мінорів першого порядку є відмінні від нуля, тому $r\geq 1$. Оскільки один з мінорів другого порядку $\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 4\end{vmatrix}=6\neq 0$, а всі мінори третього порядку дорівнюють нулю, то $r=2$.

Вказаний метод знаходження рангу матриці не завжди зручний, тому що пов'язаний з обчисленням значного числа визначників. Простіший метод ґрунтується на тому, що ранг матриці не змінюється, якщо над матрицею виконати елементарні перетворення, а саме:

а) переставити місцями два рядки, або стовпці;

б) помножити кожен елемент рядка, або стовпця на один і той самий відмінний від нуля множник;

в) додати до елементів рядка, або стовпця відповідні елементи другого рядка, або стовпця, помножені на одне і те саме число.

Приклад: Знайти ранг матриці: $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & 0 & -1\\ 3 & -1 & 4 & -2 & 4\\ 5 & 3 & 10 & 8 & 2\\ 1 & -5 & 0 & -2 & 6\end{pmatrix}$.

Виконуючи елементарні перетворення, маємо:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & 0 & -1\\ 3 & -1 & 4 & -2 & 4\\ 5 & 3 & 10 & 8 & 2\\ 1 & -5 & 0 & -2 & 6\end{pmatrix}\cong\begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & 0 & -1\\ 0 & -7 & -2 & -2 & 7\\ 0 & -7 & 0 & 8 & 7\\ 0 & -7 & -2 & -2 & 7\end{pmatrix}\cong\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -7 & -2 & -2 & 7\\ 0 & -7 & 0 & 8 & 7\\ 0 & -7 & -2 & -2 & 7\end{pmatrix}\cong$$

$$\cong\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&1&1&1\\0&1&0&-4&1\\0&1&1&1&1\end{pmatrix}\cong\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&-1&-5&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\cong\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Знайти ранг матриці:

№1.49. $\begin{pmatrix}2&1&3&1\\1&2&-2n&3\\3&3&1&4\end{pmatrix}$;

№1.50. $\begin{pmatrix}2&-3&1\\1&1&1\\3&-2&1\end{pmatrix}$;

№1.51. $\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\2&0&1&3\\3&-1&2&2\end{pmatrix}$;

№1.52. $\begin{pmatrix}1&-1&2&3\\5&1&7&2\\4&1&1&1\\10&1&10&6\end{pmatrix}$;

№1.53. $\begin{pmatrix}1&2&4&-3\\3&5&6&-4\\4&5&-2&3\\5&8&24&-19\end{pmatrix}$;

№1.54. $\begin{pmatrix}1&-2&-1&0\\4&3&7&11\\5&1&6&11\end{pmatrix}$;

№1.55. $\begin{pmatrix}1&2&-1&2\\0&1&2&3\\1&2&-1&0\\1&3&1&1\\2&5&0&1\end{pmatrix}$;

№1.56. $\begin{pmatrix}0&4&10&1\\4&8&18&7\\10&18&40&17\\1&7&17&3\end{pmatrix}$;

№1.57. $\begin{pmatrix}2&0&2&0&0\\0&1&0&1&0\\2&1&0&2&1\\0&1&0&1&0\end{pmatrix}$;

№1.58. $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&0&0&2\\0&3&6&8&8\end{pmatrix}$.

Індивідуальне завдання

Обчислити ранг матриці: $A=\begin{pmatrix}1&0&n&0\\n&0&2n&0\\3&0&6&0\end{pmatrix}$,

де n – остання цифра номера студента за списком.

§ 5. Обернена матриця. Матричні рівняння

Нехай задано матрицю $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$. Поставимо задачу знайти матрицю $\frac{1}{A}=A^{-1}$.

Озн. Квадратна матриця виду $A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{n1} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$ називається оберненою до матриці А.

Озн. Зведена матриця A^* складається з алгебраїчних доповнень шляхом транспонування: алгебраїчні доповнення, знайдені для даного рядка, записуються відповідним стовпцем: $A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{n1} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$.

Теорема 3: Для існування оберненої матриці A^{-1} необхідно і достатньо, що матриця A була не виродженою.

<u>Приклад:</u> Знайти матрицю, обернену до заданої: $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Обчислимо визначник матриці А і алгебраїчні доповнення всіх елементів:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=-68.$$

$$A_{11}=\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=-17; \qquad A_{12}=-\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=-5; \qquad A_{13}=\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=9;$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=-17; \qquad A_{22}=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=7; \qquad A_{23}=-\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 32 \end{vmatrix}=1;$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}=17; \qquad A_{32}=-\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=-11; \qquad A_{33}=\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}=-21.$$

Обернена матриця має вигляд:

$$A^{-1} = -\frac{1}{68} \cdot \begin{pmatrix} -17 & -17 & 17 \\ -5 & 7 & -11 \\ 9 & 1 & -21 \end{pmatrix}.$$

Матриця A^{-1} знайдена правильно, тому що $A \cdot A^{-1} = E$, тобто:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{68}\right) \cdot \begin{pmatrix} -17 & -17 & 17 \\ -5 & 7 & -11 \\ 9 & 1 & -21 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{68} \begin{pmatrix} 2 \cdot (-17) + 5 \cdot (-5) - 1 \cdot 9 & 2 \cdot (-17) + 5 \cdot 7 - 1 \cdot 1 & 2 \cdot 17 + 5 \cdot (-11) - 1 \cdot (-21) \\ 3 \cdot (-17) - 3 \cdot (-5) + 4 \cdot 9 & 3 \cdot (-17) - 3 \cdot 7 + 4 \cdot 1 & 3 \cdot 17 - 3 \cdot (-11) + 4 \cdot (-21) \\ 1 \cdot (-17) + 2 \cdot (-5) + 3 \cdot 9 & 1 \cdot (-17) + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 17 + 2 \cdot (-11) + 3 \cdot (-21) \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{68} \cdot \begin{pmatrix} -68 & 0 & 0 \\ 0 & -68 & 0 \\ 0 & 0 & -68 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Безпосереднім обчисленням легко переконатися, що для оберненої матриці справджуються рівності: $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Квадратна матриця може мати обернену тоді і тільки тоді, якщо вона не вироджена. Крім того, для не виродженої квадратної матриці А існує єдина обернена матриця.

Вміння знаходити обернену матрицю дає можливість розв’язувати матричні рівняння. Наприклад: $A \cdot X = B \Rightarrow X = \dfrac{B}{A} = B \cdot A^{-1}$.

<u>Приклад:</u> Розв’язати матричне рівняння:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 7 \end{pmatrix};$$

$$X = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}^{-1};$$

Обчислимо обернену матрицю $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}^{-1}$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 10 = -13;$$

$A_{11} = -3$; $A_{12} = -5$; $A_{21} = -2$; $A_{22} = 1$.

Тоді обернена матриця матиме вигляд:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-13} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$X = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{-13} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix};$$

$$X = -\frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} 5 \cdot (-3) + 9 \cdot (-5) & 5 \cdot (-2) + 9 \cdot 1 \\ 4 \cdot (-3) + 7 \cdot (-5) & 4 \cdot (-2) + 7 \cdot 1 \end{pmatrix};$$

$$X = -\frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} -60 & -1 \\ -47 & -1 \end{pmatrix}; \; X = \begin{pmatrix} \frac{60}{13} & \frac{1}{13} \\ \frac{47}{13} & \frac{1}{13} \end{pmatrix}.$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Для заданих матриць знайти обернені матриці:

№1.59. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$;

№1.60. $\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$;

№1.61. $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$;

№1.62. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$;

№1.63. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$;

№1.64. $\begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$;

№1.65. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$;

№1.66. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$;

№1.67. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$;

№1.68. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \\ -2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Розв’язати матричне рівняння:

№1.69. $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -7 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;

№1.70. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 15 & -1 \end{pmatrix}$;

№1.71. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$;

№1.72. $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 11 & 10 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}$;

№1.73. $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$; **№1.74.** $\begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$;

№1.75. $\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 11 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$; **№1.76.** $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

№1.77. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; **№1.78.** $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -4 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

З'ясувати, чи існують матриці, обернені до заданих:

№1.79. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; **№1.80.** $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

Якщо так, то виконати перевірку $A \cdot A^{-1} = E$.

Індивідуальне завдання

1. Знайти обернену матрицю до заданої: $A = \begin{pmatrix} 1 & n & 2 \\ -3 & n-1 & 5 \\ 4 & n+1 & -7 \end{pmatrix}$.

2. Розв'язати матричне рівняння: $\begin{pmatrix} 1 & n \\ n-7 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -n \end{pmatrix}$,

де n – остання цифра номера студента за списком.

§ 6. Системи лінійних рівнянь

Озн. Лінійним називається рівняння, у якому невідомі величини мають перший степінь і між собою не перемножуються.

В алгебрі прийнято всі відомі величини позначати верхньою половиною латинської абетки, а невідомі − нижньою. Для рівнянь з малою кількістю невідомих так і поступають. Оскільки число букв абетки обмежене, для рівняння з великою кількістю членів всі невідомі позначають як x_i, коефіцієнти за невідомих як a_i , а вільні члени $-b_i$. У системі рівнянь невідома x_i зустрічається у декількох рівняннях, тому для її коефіцієнта a_i додається індекс k номера рівняння, а коефіцієнт позначається як a_{ik}, де i − номер невідомої, а k − номер рівняння. Відповідно до цього система лінійних рівнянь має вигляд:

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{22}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n} = b_2 \\
\dots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m
\end{cases}
\tag{2.5}
$$

Коефіцієнти за невідомих утворюють матрицю, яка складається з m рядків та n стовпців.

Вільні члени утворюють матрицю-стовпець:

$$
B = \begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{Vmatrix}
\tag{2.6}
$$

Усі невідомі $x_1; x_2; \dots x_n$ також можна записати у вигляді матриці-стовпця:

$$
X = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{Vmatrix}
\tag{2.7}
$$

Взагалі під час запису системи лінійних рівнянь необов'язково писати в i-му стовпці невідому x_i (крім неї, там інших невідомих просто немає) чи знак «дорівнює» перед вільними членами, тому систему записують у спрощеному вигляді.

$$
\left\Vert \begin{array}{cccc|c}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n
\end{array} \right\Vert
\tag{2.8}
$$

Знак «дорівнює» замінено вертикальною лінією, а знак матриці вказує на наявність системи рівнянь у матричному вигляді.

Озн. Система називається однорідною, якщо всі її вільні члени дорівнюють нулю, і неоднорідною, якщо хоч один з них відмінний від нуля.

Множина чисел $(a_1, a_2, \dots a_n)$ називається розв'язком системи, якщо за підстановки цих чисел в кожне рівняння системи отримаємо рівність.

Озн. Система називається сумісною, якщо вона має розв'язок.

Теорема 4: (критерій сумісності, **теорема Кронекера-Капеллі**):

Система лінійних рівнянь сумісна тільки тоді, коли ранг матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці.

Озн. Дві системи називаються рівносильними, якщо вони мають однакові множини розв'язків.

Розглянемо основні методи розв'язування визначених систем, у яких число рівнянь дорівнює числу невідомих.

Матричний метод розв'язування системи лінійних рівнянь:

Теорема 5: Якщо визначник системи (1.5) відмінний від нуля, то система сумісна і має розв'язок, що визначається формулою:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} A^* \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \tag{2.9}$$

де Δ – головний визначник системи, A^* – зведена матриця, $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ – стовбець вільних елементів.

<u>Приклад:</u> Розв'язати систему лінійних рівнянь матричним методом:

$$\begin{cases} 2x + 7y + z = -17, \\ 7x + 3y + 5z = 8, \\ 3x + 2y + 6z = 9. \end{cases}$$

Обчислимо головний визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 7 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 6 + 1 \cdot 7 \cdot 2 + 7 \cdot 5 \cdot 3 - 1 \cdot 3 \cdot 3 - 2 \cdot 5 \cdot 2 - 7 \cdot 7 \cdot 6 =$$

$$= 36 + 14 + 105 - 9 - 20 - 294 = -168.$$

Оскільки $\Delta \neq 0$, то система має єдиний розв'язок.

Обчислимо алгебраїчні доповнення до кожного елемента матриці за формулою: $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot 6 - 5 \cdot 2 = 18 - 10 = 8;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -(7 \cdot 6 - 5 \cdot 3) = -(42 - 15) = -27;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = 14 - 9 = 5;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -(7 \cdot 6 - 1 \cdot 2) = -(42 - 2) = -40;$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 1 \cdot 3 = 12 - 3 = 9;$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(2 \cdot 2 - 7 \cdot 3) = -(4 - 21) = 17;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 7 \cdot 5 - 1 \cdot 3 = 35 - 3 = 32;$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = -(2 \cdot 5 - 1 \cdot 7) = -(10 - 7) = -3;$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 7 \cdot 7 = 6 - 49 = -43.$$

Запишемо зведену матрицю: $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -40 & 32 \\ -27 & 9 & -3 \\ 5 & 17 & -43 \end{pmatrix}$.

Тоді стовпець невідомих елементів $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ дорівнює: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\Delta} A^* \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} =$

$$= \frac{1}{-168} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 40 & 32 \\ -27 & 9 & -3 \\ 5 & 17 & -43 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -17 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{-168} \cdot \begin{pmatrix} 8 \cdot (-17) - 40 \cdot 8 + 32 \cdot 9 \\ (-27) \cdot (-17) + 9 \cdot 8 + (-3) \cdot 9 \\ 5 \cdot (-17) + 17 \cdot 8 + (-43) \cdot 9 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{-168} \cdot \begin{pmatrix} -136 - 320 + 288 \\ 459 + 72 - 27 \\ -85 + 136 - 387 \end{pmatrix} = \frac{1}{-168} \cdot \begin{pmatrix} -168 \\ 504 \\ -336 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Отже, {1; –3; 2} – шуканий розв'язок системи лінійних рівнянь.

Відповідь: {1; –3; 2}.

Метод Крамера:

Теорема 6: Якщо визначник системи (1.5) відмінний від нуля, то система сумісна і має розв'язок, що визначається формулами: $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta}$; $y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta}$; $z = \dfrac{\Delta_z}{\Delta}$.

<u>Приклад:</u> Розв'язати систему лінійних рівнянь за правилом Крамера:

$$\begin{cases} 2x + 7y + z = -17, \\ 7x + 3y + 5z = 8, \\ 3x + 2y + 6z = 9. \end{cases}$$

Розв'язання:

З попередніх обчислень головний визначник системи дорівнює $\Delta = -168$. Обчислимо додаткові визначники, замінюючи по черзі перший, другий та третій стовпець головного визначника стовпцем вільних елементів:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -17 & 7 & 1 \\ 8 & 3 & 5 \\ 9 & 2 & 6 \end{vmatrix} = (-17)\cdot 3\cdot 6 + 8\cdot 2\cdot 1 + 7\cdot 5\cdot 9 - 1\cdot 3\cdot 9 - 2\cdot 5\cdot(-17) - 8\cdot 7\cdot 6 =$$

$$= -306 + 16 + 315 - 27 + 170 - 336 = -168;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & -17 & 1 \\ 7 & 8 & 5 \\ 3 & 9 & 6 \end{vmatrix} = 2\cdot 8\cdot 6 + 7\cdot 9\cdot 1 + 3\cdot(-17)\cdot 5 - 1\cdot 8\cdot 3 - 2\cdot 5\cdot 9 - 7\cdot 6\cdot(-17) =$$

$$= 96 + 63 - 255 - 24 - 90 + 714 = 504;$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 7 & -17 \\ 7 & 3 & 8 \\ 3 & 2 & 9 \end{vmatrix} = 2\cdot 3\cdot 9 + 7\cdot 8\cdot 3 + 7\cdot 2\cdot(-17) - (-17)\cdot 3\cdot 3 - 2\cdot 2\cdot 8 - 7\cdot 7\cdot 9 =$$

$$= 54 + 168 - 238 + 153 - 32 - 441 = -336.$$

Визначимо корені системи рівнянь за формулами Крамера:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-168}{-168} = 1; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{504}{-168} = -3; \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-336}{-168} = 2.$$

Отже, {1; –3; 2} – шуканий розв'язок системи лінійних рівнянь.

Метод Гауса:

Одним із найпоширеніших методів розв'язування систем лінійних рівнянь є метод послідовного виключення невідомих, або метод Гауса. Цей метод запропонований Гаусом і ґрунтується на елементарних перетвореннях системи рівнянь.

У системі (1.5) (за $m = n$ від другого рівняння необхідно відняти перше, помножене на $\frac{a_{21}}{a_{11}}$; від третього – відняти перше, помножене на $\frac{a_{31}}{a_{11}}$ і т. д. Одержимо систему:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}{}'x_1 + a_{22}{}'x_2 + \ldots + a_{2n}{}'x_n = b_2{}' \\ \ldots \\ a_{n1}{}'x_1 + a_{n2}{}'x_2 + \ldots + a_{nn}{}'x_n = b_m{}' \end{cases} \tag{2.10}$$

У цій системі від третього рівняння віднімемо друге, помножене на a_{32}'/a_{22}', від четвертого – друге, помножене на a_{42}'/a_{22}' і т.д. Одержимо систему:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}{}'x_1 + a_{22}{}'x_2 + \ldots + a_{2n}{}'x_n = b_2{}' \\ a_{33}{}''x_3 + \ldots + a_{3n}{}''x_n = b_3{}'' \\ \ldots \\ a_{n1}{}''x_1 + a_{n2}{}''x_2 + \ldots + a_{nn}{}''x_n = b_m{}'' \end{cases} \qquad (2.11)$$

Далі аналогічно чинимо зі всіма рівняннями, починаючи з третього: від четвертого віднімаємо третє, помножене на a_{43}''/a_{33}'' і т.д. Таку процедуру необхідно провести n разів, у результаті чого одержимо трикутну систему, у якій не буде елементів зліва від головної діагоналі. Штрихи біля коефіцієнтів означають, що за кожної дії коефіцієнти змінюють своє значення

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}{}'x_1 + a_{22}{}'x_2 + \ldots + a_{2n}{}'x_n = b_2{}' \\ a_{33}{}''x_3 + \ldots + a_{3n}{}''x_n = b_3{}'' \\ \ldots \\ a_{nn}{}^{n-1}x_n = b_n{}^{n-1} \end{cases} \qquad (2.11)$$

З останнього рівняння знаходимо $X_n = \dfrac{b_n^{n-1}}{a_{nn}^{n-1}}$; підставивши це значення в $(n-1)$-е рівняння, знайдемо X_{n-1}. Таким чином поступово дійдемо до X_1.

Розглянемо даний метод на прикладі:

<u>Приклад:</u> Розв’язати систему лінійних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + y - z = 0 \end{cases}.$$

Виконаємо елементарні перетворення над рядками розширеної матриці:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Тоді маємо нову систему: $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 3y + z = 9 \\ z = 3 \end{cases}$, з якої отримуємо: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$.

Видозміною методу Гауса є метод Жордана-Гауса, у якому нулі отримують не тільки нижче головної діагоналі, але й вище неї. Для цього після першого ж віднімання методом Гауса від першого рівняння віднімають друге, помножене на a_{1n}/a_{2n}', так щоб в першому рівнянні зникло X_n. Далі аналогічно від третього віднімають друге, помножене на a_{3n}'/a_{2n}' і т. д., поки не зникне X_n у всіх рівняннях крім останнього. Дії ліквідації перших та останніх невідомих виконуються почергово: x_1 і x_n, x_2 і x_{n-1} і т. д. У результаті проведених дій система матиме вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & & & & = b_1' \\ & a_{22}x_2 & & & = b_2' \\ & & a_{33}x_3 & & = b_3' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & a_{nn}^{(n+1)}x_n & = b_n^{(n+1)} \end{cases} \tag{2.12}$$

З цієї системи відразу ж знаходиться будь-яка невідома.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Розв'язати систему лінійних рівнянь:

№1.81. $\begin{cases} 4x - 3y - 2z = 9, \\ 2x + 5y + 3z = -7, \\ 6x - 3y + 5z = 5; \end{cases}$

№1.82. $\begin{cases} x + 2y - 3z = 7, \\ 3x - y - 4z = 13, \\ 4x + y + 2z = 0; \end{cases}$

№1.83. $\begin{cases} 2x + y - z = 0, \\ x - y - 3z = 13, \\ 3x - 2y + 4z = -15; \end{cases}$

№1.84. $\begin{cases} x + y - 2z = 4, \\ 2x - 3y + z = 3, \\ 3x - 2y + 6z = 0; \end{cases}$

№1.85. $\begin{cases} 5x - 3y + 6z = 6, \\ 2x - y - 3z = 8, \\ x + 4y - 2z = 9; \end{cases}$

№1.86. $\begin{cases} x - y + z = 3, \\ 2x + y + z = 11, \\ x + y + 2z = 8; \end{cases}$

№1.87. $\begin{cases} 2x - 3y - 4z = -5, \\ x + 5y - 5z = -6, \\ 8x - 2y + 4z = -10; \end{cases}$

№1.88. $\begin{cases} 2x + 2y + z = 1, \\ 3x + y + 2z = -2, \\ 4x - y - 7z = 7; \end{cases}$

№1.89. $\begin{cases} x - 8y + 3z = 1, \\ 2x - 6y + z = 4, \\ 0{,}1x - 2y + z = 0; \end{cases}$

№1.90. $\begin{cases} x - 5y + z = 4, \\ 2x - y + 3z = 14, \\ 3x + 5y + z = 8; \end{cases}$

№1.91. $\begin{cases} 3x - y - 4z = -2, \\ 6x + 2y + z = 9, \\ 2x + 4y - 3z = 3; \end{cases}$

№1.92. $\begin{cases} 3x + 2y + z = 5, \\ x + y - z = -2, \\ 4x - y + 5z = 3. \end{cases}$

Індивідуальне завдання

Розв'язати систему лінійних рівнянь трьома способами:

1. $\begin{cases} 2x-3y+z=-6, \\ 3x+3y-2z=20, \\ 5x-6y+4z=-12. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 2x+3y+z=0, \\ 2x+y+3z=4, \\ 3x+2y+z=2. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x+5y+9z=-20, \\ 9x-7y+3z=1, \\ 6x+4y+7z=-2; \end{cases}$ 4. $\begin{cases} 4x-2y+3z=-9, \\ 3x+5y-4z=25, \\ 7x+2y+3z=2; \end{cases}$

5. $\begin{cases} x+y+z=-2, \\ 2x+3y-z=1, \\ x-y+2z=-7. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} 3x+4y+2z=-5, \\ 2x-4y+3z=20, \\ 4x-3y-5z=3; \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3x+2y+4z=-3, \\ 2x-3y+z=-4, \\ 4x-5y-2z=10; \end{cases}$ 8. $\begin{cases} x+2y+3z=-2, \\ 3x+4y-2z=-17, \\ 2x+3y+z=-9; \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x+5y-2z=9, \\ 4x+y-4z=9, \\ x+y-4z=9; \end{cases}$ 10. $\begin{cases} x-y+z=3, \\ 2x+y+z=1, \\ x+y+2z=8. \end{cases}$

Завдання обирається за останньою цифрою номера студента в списку. Наприклад, студенти за номерами 3, 13 та 23 розв'язують систему №3.

§ 7. Прямокутні системи

Згідно з теоремою Кронекера-Капеллі для сумісних систем ранг матриці A повинен дорівнювати рангу розширеної матриці. При знаходженні рангу переходять від мінора нижчого порядку до облямовуючого його мінора вищого порядку. Якщо одержаний ранг дорівнює r, то з матриці A вибирають r лінійно незалежних рядків: у системі залишають лише ті рівняння, коефіцієнти яких увійшли у вибрані рядки.

У цих рівняннях зліва залишимо такі r невідомих, для яких визначник з їх коефіцієнтів не дорівнює нулю. Інші невідомі переносимо вправо і вважаємо їх вільними. Цим довільним невідомим надаємо довільні зна-чення і знаходимо невідомі зліва (наприклад, за правилом Крамера).

<u>Приклад:</u>

$$\begin{cases} x_1+x_2-2x_3-x_4+x_5=1 \\ 3x_1-x_2+x_3+4x_4+3x_5=4; \\ x_1+5x_2-9x_3-8x_4+x_5=0 \end{cases} \qquad A=\begin{Vmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & -9 & -8 & 1 \end{Vmatrix}$$

Мінор 2-го порядку: $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$=–3–4=–7≠0.

Мінор 3-го порядку: $\begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ -9 & -8 & 1 \end{vmatrix}$ =−8−8+27+36+1−8=0.

Розширена матриця: $A = \left\| \begin{matrix} 1 & 1 & -2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & -9 & -8 & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{matrix} \right\|$.

Мінор 2-го порядку: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ =4−3=1≠0.

Мінор 3-го порядку: $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \\ -8 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ =0+4−32+24+4–0=0.

Ранг матриці A і ранг розширеної матриці r=2*,* тому система сумісна, але не визначена, (число невідомих більше за число рівнянь). Запишемо два рівняння, у яких зліва залишимо дві невідомі x_1 і x_2 (у нас r =2):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 + 2x_3 + x_4 - x_5 \\ 3x_1 - x_2 = 4 - x_3 - 4x_4 - 3x_5 \end{cases}$$

За додавання одержимо: $4x_1 = 5 + x_3 - 3x_4 - 4x_5 \Rightarrow x_1 = \dfrac{5}{4} + \dfrac{x_3}{4} - \dfrac{3x_4}{4} - x_5$.

Тоді:

$$x_2 = 1 + 2x_3 + x_4 - x_5 - x_1 = 1 + 2x_3 + x_4 - x_5 - \frac{5}{4} - \frac{x_3}{4} + \frac{3x_4}{4} + x_5 = -\frac{1}{4} + \frac{7}{4}x_3 + \frac{7}{4}x_4.$$

Одержали: $\begin{cases} x_1 = \dfrac{5}{4} + \dfrac{1}{4}x_3 - \dfrac{3}{4}x_4 - x_5 \\ x_2 = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{7}{4}x_3 + \dfrac{7}{4}x_4. \end{cases}$

Це загальний розв’язок системи, з якого можна одержати низку розв’язків, надаючи вільним невідомим конкретні значення. Наприклад: ($\dfrac{5}{4}$; $-\dfrac{1}{4}$; 0; 0; 0); (2, 5, 3, 0, 0) і т. д. є розв’язками системи.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Використовуючи теорему Кронекера-Капеллі, встановити чи сумісна система і, якщо сумісна розв’язати:

№1.93. $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 = -2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 3; \end{cases}$

№1.94. $\begin{cases} 7x_1 + 3x_2 = 2, \\ x_1 - 2x_2 = -3, \\ 4x_1 + 9x_2 = 11; \end{cases}$

№1.95. $\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 7, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 0; \end{cases}$

№1.96. $\begin{cases} 7x_1 - 8x_2 = 3, \\ 2x_1 + x_2 = 1, \\ 4x_1 + 7x_2 = -4; \end{cases}$

№1.97. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 + x_5 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 0; \end{cases}$

№1.98. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -1, \\ 3x_1 - x_2 = 4, \\ 2x_1 + x_2 = 1; \end{cases}$

№1.99. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 3, \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -5; \end{cases}$

№1.100. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 2, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 3, \\ 2_1 + 2x_2 - x_3 = -1; \end{cases}$

№1.101. $\begin{cases} -2x_1 + x_2 - 2x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -5; \end{cases}$

№1.102. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$

Індивідуальне завдання

Дослідити систему на несумісність і, якщо вона сумісна розв’язати:

$\begin{cases} Nx_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -2, \\ x_1 - Nx_2 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 + (N+1)x_4 = 3; \end{cases}$ де N – остання цифра номера студента за списком.

Запитання до розділу ІІ:

1. Що називається лінійним рівнянням?
2. Що називають матрицею? Види матриць.
3. Дії над матрицями.
4. Що називають визначником? Властивості визначників.
5. Правила розкриття визначників другого та третього порядків.
6. Мінор та алгебраїчне доповнення.
7. Правило розкриття визначника будь-якого порядку.
8. Розв’язування систем лінійних рівнянь методом Гауса.
9. Правило Крамера.
10. Що називають оберненою матрицею?
11. Матричний метод розв’язування систем лінійних рівнянь.
12. Що таке ранг матриці?
13. Теорема Кронекера-Капеллі.
14. Прямокутні та однорідні системи.

III. ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

§1. Основні поняття

Озн. Скаляром називається величина, яка має тільки чисельне значення (наприклад, маса тіла, об'єм тіла, площа городу тощо). Позначення: a, b, AB тощо.

Озн. Вектором називається величина, яка крім чисельного значення має напрямок (наприклад, сила, швидкість) і позначається літерами зі стрілкою над ними: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\overrightarrow{AB}$ тощо.

Щоб обчислити координати вектора $\overrightarrow{AB}$ необхідно від координат кінця $B\{x_2;\ \ y_2;\ \ z_2\}$ відняти координати початку $A\{x_1;\ \ y_1;\ \ z_1\}$, тобто $\overrightarrow{AB}\ \{x_2 - x_1;\ \ \ y_2 - y_1;\ \ \ z_2 - z_1\}$.

<u>Приклад:</u> Обчислити координати вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо $A\{3;\ \ -1;\ \ 0\}$, $B\{1;\ \ 2;\ \ -4\}$.

Розв'язання: $\overrightarrow{AB}\ \{1-3;\ \ \ 2-(-1);\ \ \ -4-0\} = \{-2;\ \ \ 3;\ \ \ -4\}$.

Озн. Довжина вектора $\vec{a}\{a_x;\ \ \ a_y;\ \ \ a_z\}$ називається абсолютною величиною або модулем вектора і обчислюється за формулою $|\vec{a}| = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2}$.

Якщо задані координати кінця $B\{x_2;\ \ y_2;\ \ z_2\}$ та початку вектора $A\{x_1;\ \ y_1;\ \ z_1\}$, то його довжину обчислюють за формулою: $|\vec{a}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

<u>Приклад:</u> Обчислити довжину вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо $A\{3;\ \ -1;\ \ 0\}$, $B\{1;\ \ 2;\ \ -4\}$.

Розв'язання:

$$\overrightarrow{AB} = \sqrt{(1-3)^2 + (2-(-1))^2 + (-4-0)^2} = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + (-4)^2} = \sqrt{4+9+16} = \sqrt{29}.$$

Щоб визначити вектор, треба вказати:

1) точку, з якої вектор починається (початок);

2) сторону простору, в яку направлено вектор;

3) пряму, якій він паралельний;

4) довжину вектора.

Вектор, вказаний всіма цими елементами, не буде вільним.

Озн. Якщо вектор може мати початок у будь-якій точці прямої, на якій він лежить, то він буде ковзним.

Озн. Вектор, початок якого може знаходитись у будь-якій точці простору, називається вільним.

Як правило, вивчають вільні вектори, як найбільш прості та важливі.

Озн. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ рівні, якщо вони паралельні між собою, спрямовані в один бік і мають однакову довжину, тобто $|\vec{a}| = |\vec{b}|$. Якщо ж вони спрямовані в протилежні сторони, то $|\vec{a}| = -|\vec{b}|$.

Озн. Вектори називаються колінеарними, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих.

Ознакою колінеарності двох векторів $\vec{a}\{a_x;\ a_y;\ a_z\}$ та $\vec{b}\{b_x;\ b_y;\ b_z\}$ є пропорційність їх координат: $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$.

<u>Приклад:</u> Вектори $\vec{a}\{-2;\ a_y;\ -1\}$ та $\vec{b}\{3;\ -6;\ b_z\}$ колінеарні. Знайти координати цих векторів.

Розв’язання: За умовою колінеарності векторів маємо рівність: $\frac{-2}{3} = \frac{a_y}{-6} = \frac{-1}{b_z}$. Звідси: $a_y = \frac{-2\cdot(-6)}{3} = 4$, а $b_z = -\frac{2}{3}$. Тобто вектори мають координати: $\vec{a}\{-2;\ 4;\ -1\}$ та $\vec{b}\left\{3;\ -6;\ -\frac{2}{3}\right\}$.

Озн. Сумою векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називається вектор, початок якого збігається з початком вектора $\vec{a}$, а кінець – з кінцем вектора $\vec{b}$.

Тобто, щоб одержати суму векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$, треба початок першого вектора $\vec{a}$ з’єднати з кінцем другого $\vec{b}$ і спрямувати утворений вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ від початку першого до кінця другого (рис. 3.1).

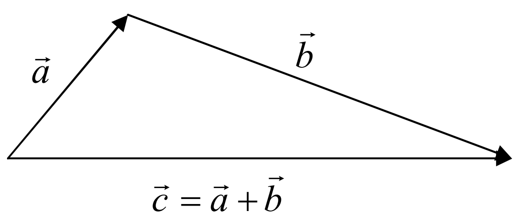


Рис. 3.1.

Щоб знайти різницю векторів, треба сумістити початок векторів як доданків. Тоді вектор, спрямований від кінця другого до початку першого, буде різницею векторів. З $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} \Rightarrow \vec{a} = \vec{c} + \vec{b}$, звідси стає зрозумілим напрямок вектора $\vec{c}$ (рис. 3.2).

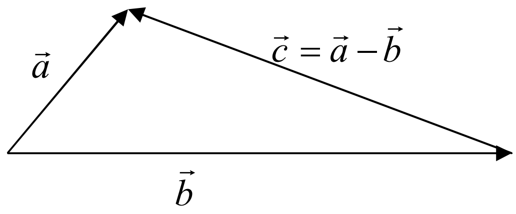


Рис. 3.2.

<u>Приклад:</u> Дано два вектори $\vec{a}=\{2;\ \ -1;\ \ 3\}$ та $\vec{b}=\{3;\ \ 4;\ \ 5\}$. Знайти вектори $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$ та $\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}$.

Розв'язання:

$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}=\{2+3;\ \ -1+4;\ \ 3+5\}=\{5;\ \ 3;\ \ 8\}$,

$\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}=\{2-3;\ \ -1-4;\ \ 3-5\}=\{-1;\ \ -5;\ \ -2\}$.

Суму та різницю векторів можна знайти, користуючись діагоналями паралелограма (рис. 2.3):

Вектори $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{OB}$ рівні, тому вектор $\overrightarrow{OC}$ є сумою векторів $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{AC}$, тобто $\overrightarrow{OC}=\vec{a}+\vec{b}$. Між векторами $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{AC}$ за рис. 23 є кут α, тому з трикутника OAC за теоремою косинусів маємо:

$\left|\overrightarrow{OC}\right|^2=\left|\overrightarrow{OA}\right|^2+\left|\overrightarrow{AC}\right|^2-2\left|\overrightarrow{OA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot cos\alpha$, звідси $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2-2\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot cos\alpha$

Отже, $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2-2\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot cos\alpha}$ (3.1)

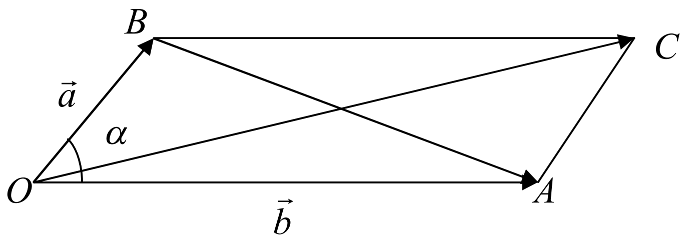


Рис. 3.3.

З трикутника OBA маємо за теоремою косинусів:

$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=\left|\overrightarrow{BA}\right|^2=\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2-2\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot cos\left(180^\circ-\alpha\right)$

Отже, $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2-2\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot sin\alpha}$ (3.2)

<u>Приклад:</u> Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ утворюють кут $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$, а їх довжини відповідно дорівнюють $\left|\vec{a}\right|=5$, $\left|\vec{b}\right|=8$. Знайти суму $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$ та різницю векторів $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$.

Розв'язання:

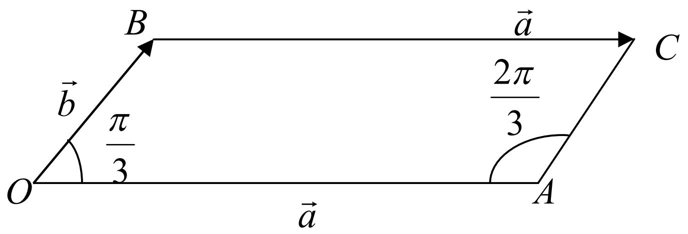


Рис. 3.4.

Маємо: $\angle\, OAC = \frac{\pi}{3}$, тому для вектора $\overrightarrow{OC}$ кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$ є $\frac{2\pi}{3}$. Тоді $\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = \sqrt{\left|\vec{a}\right|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 - 2\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot cos\alpha} = \sqrt{5^2+8^2-2\cdot5\cdot8\cdot cos\frac{2\pi}{3}} =$

$= \sqrt{25+64+40} = \sqrt{129} \approx 11{,}36$

$$\left|\vec{a}-\vec{b}\right| = \sqrt{\left|\vec{a}\right|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 - 2\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot cos\alpha} = \sqrt{5^2+8^2-2\cdot5\cdot8\cdot cos\frac{\pi}{3}} =$$

$= \sqrt{25+64-40} = \sqrt{49} = 7$.

Озн. Добутком вектора $\vec{a}$ на скаляр k є вектор $\vec{a} = k\cdot\vec{b}$, довжина якого дорівнює $\left|\vec{a}\right| = \left|k\right|\cdot\left|\vec{b}\right|$.

<u>Приклад:</u> Дано два вектори $\vec{a} = \{2;\ -1;\ 3\}$ та $\vec{b} = \{3;\ 4;\ 5\}$. Знайти координати вектора $\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b}$.

Розв'язання: $\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b} = \{2\cdot2-3;\ \ 2\cdot(-1)-4;\ \ 2\cdot3-5\}$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

№2.1. Дано два вектори $\vec{a} = \{1;\ -1;\ 2\}$ та $\vec{b} = \{3;\ 4;\ 0\}$. Знайти координати вектора $\vec{c} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$.

№2.2. Дано три вектори $\vec{a} = \{3;\ -2;\ 1\}$, $\vec{b} = \{0;\ 2;\ -4\}$ та $\vec{c} = \{1;\ 1;\ -2\}$. Знайти координати та довжину вектора $\vec{d} = 3\vec{a} - 4\vec{b} + \vec{c}$.

№2.3. Дано точки $A(5;\ 0;\ 2)$, $B(-3;\ 3;\ -1)$, $C(1;\ 2;\ -3)$, $D(5;\ -4;\ 3)$. Чи можуть вони бути вершинами трапеції.

№2.4. Знайти точку N, з якою збігається кінець вектора $\bar{a} = \{3;\ -1;\ 4\}$, якщо його початок збігається з точкою $M\ (1;\ 2;\ -3)$.

№2.5. Знайдіть координати вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AD}$, якщо $A(1;3)$, $B(2;5)$, $C(3;4)$, $D(-1;3)$.

№2.6. Вектори одиничні $\vec{a}$ та $\vec{b}$ утворюють кут $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$. Знайти суму $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$ та різницю векторів $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$.

№2.7. Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ утворюють кут $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$, а їх довжини відповідно дорівнюють $\left|\vec{a}\right| = 2$, $\left|\vec{b}\right| = 3$. Знайти суму $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$ та різницю векторів $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$.

№2.8. Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ утворюють кут $\alpha = 120^\circ$, а їх довжини відповідно дорівнюють $\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right| = 5$. Знайти суму $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$ та різницю векторів $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$.

№2.9. Дано: $\left|\vec{a}\right| = 11$, $\left|\vec{b}\right| = 23$, $\left|\vec{a}-\vec{b}\right| = 30$. Визначити $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$.

№2.10. Визначити суму $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$ та різницю векторів $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$, якщо $\vec{a} \perp \vec{b}$ і $\left|\vec{a}\right| = 5$, $\left|\vec{b}\right| = 12$.

Індивідуальне завдання

1. Обчислити координати та довжину вектора $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$, якщо $\vec{a} = \{0;\ -n;\ 2n\}$, $\vec{b} = \{n-3;\ n-4;\ n-6\}$.

2. Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ утворюють кут $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$, а їх довжини відповідно дорівнюють $\left|\vec{a}\right| = n$, $\left|\vec{b}\right| = n+1$. Знайти суму $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$ та різницю векторів $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$.

n – остання цифра номера студента за списком.

§2. Проекція вектора на вісь

Розглянемо проекцію вектора на вісь (рис. 3.5). Проекція вектора $\vec{a}$ на вісь Ox є AB, тобто пр$_x\vec{a} = AB$. Вектор $\vec{a}$ та його проекція утворюють кут α, тому:

$$np_x\vec{a} = \left|\vec{a}\right| \cdot cos\alpha = a_x .$$

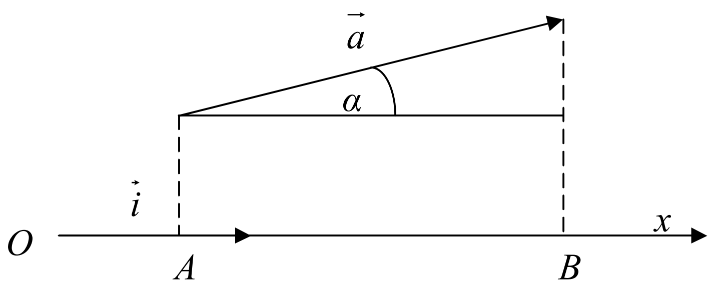


Рис.3.5.

Нехай $\vec{i}$ – вектор на осі $Ox,$ для якого $\left|\vec{i}\right| = 1$. Такий вектор називається одиничним або ортом. Тоді $AB = m \cdot |\vec{i}|$, а значить $np_x \vec{a} = m \cdot |\vec{i}|$.

На площині відповідно матимемо (рис. 3.6):

$$np_x \vec{a} = m_1 \cdot |\vec{i}| = |\vec{a}| \cdot cos\alpha = a_x,$$

$$np_x \vec{a} = m_2 \cdot |\vec{j}| = |\vec{a}| \cdot cos\beta = a_y.$$

При чому $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ (*α+β=90°*). Тоді вектор $\vec{a}$ можна розкласти за ортами $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$.

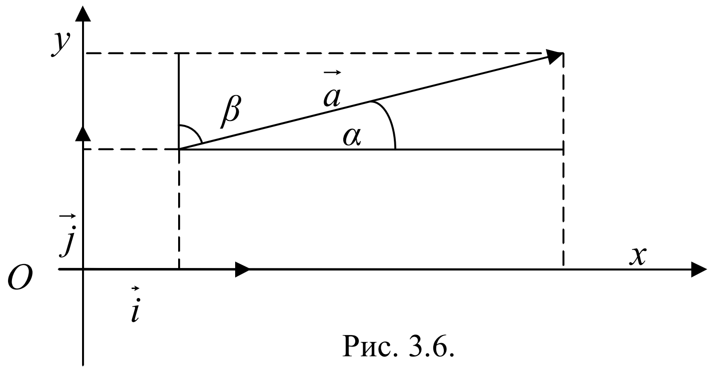


Рис. 3.6.

Аналогічно у просторі матимемо:

$$np_x \vec{a} = m_1 \cdot |\vec{i}| = |\vec{a}| \cdot cos\alpha = a_x,$$

$$np_x \vec{a} = m_2 \cdot |\vec{j}| = |\vec{a}| \cdot cos\beta = a_y,$$

$$np_z \vec{a} = m_3 \cdot |\vec{k}| = |\vec{a}| \cdot cos\gamma = a_z.$$

При чому $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, де $|\vec{a}| = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2}$. Тоді вектор $\vec{a}$ можна розкласти за ортами $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$.

<u>Приклад:</u> Три вектори $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i} + 5\vec{j} + 6\vec{k}$, $\vec{c} = 5\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ задані в базисі векторів $\vec{i}$; $\vec{j}$; $\overline{\vec{k}}$. Знайти проекцію вектора $\vec{d} = 3\vec{a} + 4\vec{b} - 5\vec{c}$ у цьому базисі.

Розв'язання: Додамо вектори:

$$+\begin{cases} 3\vec{a} = 6\vec{i} + 9\vec{j} + 12\vec{k} \\ 4\vec{b} = -4\vec{i} + 20\vec{j} + 24\vec{k} \\ -5\vec{c} - -25\vec{i} - 5\vec{j} - 10\vec{k} \end{cases} \Rightarrow \vec{d} = 3\vec{a} + 4\vec{b} - 5\vec{c} \Rightarrow \vec{d} = 23\vec{i} + 24\vec{j} + 26\vec{k}.$$

Отже, координати шуканого вектора $\vec{d}\{-23; \quad 24; \quad 26\}$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

№2.11. У ромбі *ABCD* дано вектори-діагоналі $\overrightarrow{AC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BD} = \vec{b}$. Розкласти по цих векторах усі вектори-сторони ромба: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$.

№2.12. У ромбі *ABCD* дано вектори-сторони $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Розкласти по цих векторах усі вектори: $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$.

№2.13. Знайти координати вектора $\vec{a} = 4$, якщо відомі кути $\alpha = 60^o$; $\beta = 45^o$; $\gamma = 60^o$, які він утворює з осями координат *Ox*, *Oy*, *Oz* і його довжину.

№2.14. Знайти координати вектора $\vec{a} = 8$, якщо відомі кути $\alpha = 135^o$; $\beta = 60^o$; $\gamma = 60^o$, які він утворює з осями координат *Ox*, *Oy*, *Oz* і його довжину.

№2.15. Дано вектори $\vec{a} = \{2;\ 2;\ 1\}$, $\vec{b} = \{6;\ 3;\ 2\}$. Знайти проекцію вектора $\vec{b}$ на вектор $\vec{a}$ і проекцію вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$.

№2.16. Розкласти вектор $\vec{b} = \{6;\ 3;\ 2\}$ за ортами.

№2.17. Дано вектори $\vec{a} = 3\vec{i} - 6\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$.Обчислити $np_{\vec{c}}\left(\vec{a} + \vec{b}\right)$.

№2.18. Знайти довжину вектора $\vec{a} = 20\vec{i} + 30\vec{j} - 60\vec{k}$.

№2.19. Дано вектор $\vec{a} = \{-2;\ 2;\ 1\}$. Знайти проекцію вектора $\vec{a}$ на координатні осі.

№2.20. Дано вектора $\vec{a} = \{5;\ -2;\ -4\}$ та $\vec{b} = \{6;\ 3;\ 2\}$. Знайти проекцію вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ та проекцію вектор $\vec{b}$ на вектора $\vec{a}$.

Індивідуальне завдання

Дано вектор $\vec{b} = \{n-3;\ n-4;\ n-6\}$. Знайти проекцію вектора $\vec{b}$ на координатні осі (*n* – остання цифра номера студента за списком).

§3. Перехід від одного базису до іншого

Озн. Вектори (більше двох) називаються компланарними, якщо вони лежать на одній площині або паралельні цій площині.

Вектор $\vec{d}\{d_1;\ d_2;\ d_3\}$ задано в базисі векторів $\vec{i}$; $\vec{j}$; $\vec{k}$. Існує три некомпланарних вектори $\vec{a}\{a_1;\ a_2;\ a_3\}$, $\vec{b}\{b_1;\ b_2;\ b_3\}$ і $\vec{c}\{c_1;\ c_2;\ c_3\}$, які утворюють новий базис. Вектор $\vec{d}$ у новому базисі має координати $\vec{d}(x;\ y;\ z)$.

Для їх знаходження необхідно розв'язати систему: $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$.

Тобто, існує матриця переходу $A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$.

<u>Приклад:</u> Вектор $\vec{d}\{20;\ \ 11;\ \ -2\}$ задано в базисі векторів $\vec{i};\ \vec{j};\ \vec{k}$. Знайти координати цього вектора у базисі наступних векторів $\vec{a}\{-1;\ 3;\ 5\}$, $\vec{b}\{3;\ \ -2;\ \ 1\}$, $\vec{c}\{5;\ \ 4;\ \ -3\}$.

Розв'язання: У новому базисі вектор $\vec{d}$ матиме координати $\vec{d}\{x;\ \ y;\ \ z\}$. Тоді маємо систему:

$\begin{cases} -x+3y+5z=20 \\ 3x-2y+4z=11 \\ 5x+y-3z=-2 \end{cases}$, яку розв'яжемо методом Крамера:

$$\Delta=\begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 3 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & -3 \end{vmatrix}=150;\ \Delta_x=\begin{vmatrix} 20 & 3 & 5 \\ 11 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix}=150;$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} -1 & 20 & 5 \\ 3 & 11 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix}=300;\ \Delta_z=\begin{vmatrix} -1 & 3 & 20 \\ 3 & -2 & 11 \\ 5 & 1 & -2 \end{vmatrix}=450.$$

Тоді за формулами Крамера: $x=\frac{150}{150}=1$, $y=\frac{300}{150}=2$, $z=\frac{450}{150}=3$.

Отже, у новому базисі вектор $\vec{d}$ матиме координати $\vec{d}\{1;\ \ 2;\ \ 3\}$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

2.21. Вектор $\vec{d}\{0;\ 13;\ -15\}$ задано в базисі векторів $\vec{i};\ \vec{j};\ \vec{k}$. Знайти координати цього вектора у базисі наступних векторів $\vec{a}\{2;\ 1;\ 3\}$, $\vec{b}\{1;\ \ -1;\ \ -2\}$, $\vec{c}\{-1;\ \ -3;\ \ 3\}$.

2.22. Вектор $\vec{d}\{4;\ \ 3;\ \ 0\}$ задано в базисі векторів $\vec{i};\ \vec{j};\ \vec{k}$. Знайти координати цього вектора у базисі наступних векторів $\vec{a}\{1;\ 2;\ 3\}$, $\vec{b}\{1;\ -3;\ -2\}$, $\vec{c}\{-2;\ \ 1;\ \ 6\}$.

2.23. Вектор $\vec{d}\{6;\ \ 8;\ \ 9\}$ задано в базисі векторів $\vec{i};\ \vec{j};\ \vec{k}$. Знайти координати цього вектора у базисі наступних векторів $\vec{a}\{5;\ 2;\ 1\}$, $\vec{b}\{-3;\ 1;\ 4\}$, $\vec{c}\{6;\ \ -3;\ \ -2\}$.

2.24. Вектор $\vec{d}\{3;\ \ 11;\ \ 8\}$ задано в базисі векторів $\vec{i};\ \vec{j};\ \vec{k}$. Знайти координати цього вектора у базисі наступних векторів $\vec{a}\{1;\ 2;\ 1\}$, $\vec{b}\{-1;\ 1;\ 1\}$, $\vec{c}\{1;\ 1;\ 2\}$.

2.25. Вектор $\vec{d}\{-2;\ 9;\ 3\}$ задано в базисі векторів $\vec{i};\ \vec{j};\ \vec{k}$. Знайти координати цього вектора у базисі наступних векторів $\vec{a}\{3;\ 6;\ 2\}$, $\vec{b}\{-1;\ 2;\ 4\}$, $\vec{c}\{-4;\ 1;\ -3\}$.

Індивідуальне завдання

Вектор $\vec{d}\{1;\ 1;\ 1\}$ задано в базисі векторів $\vec{i};\ \vec{j};\ \vec{k}$. Знайти координати цього вектора у базисі наступних векторів $\vec{a}\{-1;\ n;\ n-5\}$, $\vec{b}\{n+1;\ 1;\ n-3\}$, $\vec{c}\{n;\ n-2;\ n-3\}$ (n – остання цифра номера студента за списком).

§4. Скалярний, векторний та мішаний добутки векторів

а) ***Озн.*** Скалярним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (позначається $\vec{a}\cdot\vec{b}$) називають число, що дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута між ними (рис. 3.7). Нехай задано вектори $\vec{a}\{a_1;\ a_2;\ a_3\}$ і $\vec{b}\{b_1;\ b_2;\ b_3\}$, тоді:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot cos\alpha=a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z \qquad (3.3.)$$

У даному записі $\left|\vec{b}\right|\cdot cos\alpha$ є проекцією вектора $\vec{b}$ на вектор $\vec{a}$. Звідси знаходимо:

$$cos\alpha=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}=\frac{a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z}{\sqrt{a_x+a_y+a_z}\cdot\sqrt{b_x+b_y+b_z}} \qquad (3.4.)$$

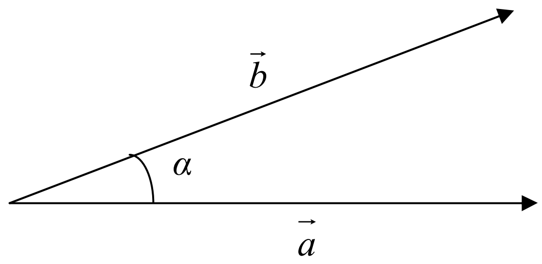


Рис. 3.7.

Приклад: Обчислити кут між векторами $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}$ і $\vec{b}=5\vec{i}-4\vec{j}$, де $\vec{i},\ \vec{j}$ одиничні вектори ($\left|\vec{i}\right|=\left|\vec{j}\right|=1$), що утворюють базис, тобто кут між ними складає 90°.

Розв'язання:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(2\vec{i}+3\vec{j}\right)\cdot\left(5\vec{i}+3\vec{j}\right)=10\vec{i}^{\,2}+15\vec{i}\cdot\vec{j}-8\vec{i}\cdot\vec{j}-12\vec{j}^{\,2}.$$

Відмітимо, що $\vec{i}^{\,2} = |\vec{i}|\cdot|\vec{i}|\cdot cos0^{\circ} = 1$, аналогічно $\vec{j}^{\,2} = |\vec{j}|\cdot|\vec{j}|\cdot cos0^{\circ} = 1$, $\vec{i}\cdot\vec{j} = |\vec{i}|\cdot|\vec{j}|\cdot cos90^{\circ} = 0$. Маємо: $\vec{a}\cdot\vec{b} = 10\cdot 1 + 15\cdot 0 - 8\cdot 0 - 12\cdot 1 = 10 - 12 = -2$.

Тоді кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$:

$$\cos\alpha = -\frac{2}{\sqrt{2^2+3^2}\cdot\sqrt{5^2+4^2}} = -\frac{2}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{41}} = -\frac{2}{\sqrt{533}} = -\frac{2\sqrt{533}}{533} \approx -0{,}087 \Rightarrow \alpha \approx 105{,}5^{\circ}.$$

<u>Приклад:</u> Знайти скалярний добуток векторів $\vec{a}\{3;\ \ 4;\ \ 5\}$, $\vec{b}\{2;\ \ 4;\ \ 6\}$, та косинус кута між ними.

Розв'язання: Скалярний добуток обчислимо згідно з формулою: $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x\cdot b_x + a_y\cdot b_y + a_z\cdot b_z$, тобто $\vec{a}\cdot\vec{b} = 3\cdot 2 + 4\cdot 4 + 5\cdot 6 = 6 + 16 + 30 = 52$.

Тоді косинус кута між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$:

$$\cos\alpha = \frac{52}{\sqrt{3^2+4^2+5^2}\cdot\sqrt{2^2+4^2+6^2}} = \frac{52}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{56}} = \frac{13}{5\sqrt{7}} = \frac{13\sqrt{7}}{35} \approx 0{,}9827\,.$$

б) ***Озн.*** Векторним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (позначається $\vec{a}\times\vec{b}$) називають вектор, модуль якого дорівнює добутку модулів цих векторів на синус кута між ними, а напрямок у нього такий, що якщо дивитися з кінця вектора на його початок, то вектор $\vec{a}$ можна перевести в положення вектора $\vec{b}$ поворотом проти годинникової стрілки (рис 3.8):

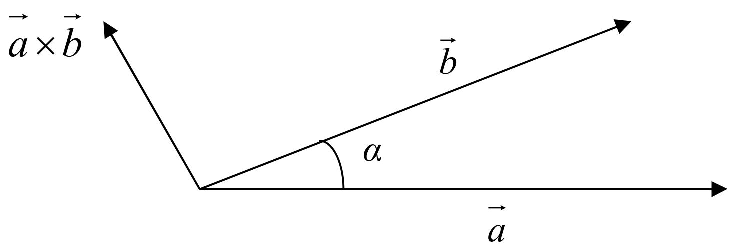


Рис. 3.8.

Модуль векторного добутку є площею паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, як на сторонах:

$$S = |\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot sin\alpha \tag{3.5}$$

Нехай задано вектори $\vec{a}\{a_1;\ \ a_2;\ \ a_3\}$, $\vec{b}\{b_1;\ \ b_2;\ \ b_3\}$ і $\vec{c}\{c_1;\ \ c_2;\ \ c_3\}$, тоді в координатній формі векторний добуток можна записати таким чином:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_x - a_x & b_y - a_y & b_z - a_z \\ c_x - a_x & c_y - a_y & c_z - a_z \end{vmatrix} \tag{3.6}$$

А формулу площі трикутника можна подати у вигляді:

$$S = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| \tag{3.7}$$

Для обчислення модуля використовують його властивість: $|a|^2 = a^2$, звідки добувають корінь. Застосуємо цю властивість до обчислення модуля векторного добутку, ураховуючи, що координати векторів задано $\vec{a}\{a_1;\ \ a_2;\ \ a_3\}$, $\vec{b}\{b_1;\ \ b_2;\ \ b_3\}$ і $\vec{c}\{c_1;\ \ c_2;\ \ c_3\}$:

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|^2 = \begin{vmatrix} b_y - a_y & b_z - a_z \\ c_y - a_y & c_z - a_z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b_x - a_x & b_z - a_z \\ c_x - a_x & c_z - a_z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b_x - a_x & b_y - a_y \\ c_x - a_x & c_y - a_y \end{vmatrix}^2,$$

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \sqrt{\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|^2} \tag{3.8}$$

Якщо вектори колінеарні, то $\alpha = 0$ і відповідно $sin\alpha = 0$, тому векторний добуток дорівнює 0.

в) ***Озн.*** Мішаним добутком векторів (позначається $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}$) називають число, яке дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах.

Нехай задано вектори $\vec{a}\{a_1;\ \ a_2;\ \ a_3\}$, $\vec{b}\{b_1;\ \ b_2;\ \ b_3\}$ і $\vec{c}\{c_1;\ \ c_2;\ \ c_3\}$, то їх мішаний добуток дорівнює

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \tag{3.9}$$

Якщо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ утворюють базис, то їх мішаний добуток не дорівнює нулю. Якщо цей добуток дорівнює нулю, то вектори компланарні.

<u>Приклад:</u> Задано вектори $\vec{a}\{1;\ \ -2;\ \ 3\}$, $\vec{b}\{4;\ \ 3;\ \ -5\}$ і $\vec{c}\{-3;\ \ 2;\ \ 1\}$. Обчислити об'єм паралелепіпеда.

Розв'язання: Ураховуючи означення мішаного добутку, об'єм паралелепіпеда дорівнює: $V = \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & -5 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 42$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

2.26. Дано вектори $\vec{a}\{1;\ \ 2;\ \ -1\}$, $\vec{b}\{1;\ \ -1;\ \ 3\}$, $\vec{c}\{6;\ \ 0;\ \ 8\}$. Обчислити $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a} \cdot \vec{c}$, $\vec{a} \cdot \vec{a}$, $\sqrt{\vec{c} \cdot \vec{c}}$.

2.27. Обчислити скалярний добуток $\vec{a}\cdot\vec{b}$, якщо $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=4$, а кут між цими векторами дорівнює $\dfrac{\pi}{4}$.

2.28. Обчислити скалярний добуток $\vec{a}+\vec{b}$ і $3\vec{a}-2\vec{b}$, якщо $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, а кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює $\dfrac{\pi}{3}$.

2.29. Обчислити скалярний добуток $(2\vec{a}+3\vec{b})(2\vec{a}-\vec{b})$, якщо $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=1$, а кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює $\dfrac{2\pi}{3}$.

2.30. Визначити кут між векторами $\vec{a}\{-2;\ \ 0;\ \ 2\}$, $\vec{b}\{-1;\ \ 1;\ \ 0\}$.

2.31. Визначити кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $\vec{a}=3\vec{i}+4\vec{j}+5\vec{k}$, $\vec{b}=4\vec{i}+5\vec{j}-3\vec{k}$.

2.32. Визначити кут між векторами $-9\vec{a}$ і $\dfrac{1}{9}\vec{b}$, $\vec{a}\{2;\ \ 1;\ \ -2\}$, $\vec{b}\{5;\ \ -1;\ \ 1\}$.

2.33. Знайти площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо вони утворюють кут 45° і $\vec{a}\cdot\vec{b}=18$.

2.34. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо вони утворюють кут 60° і $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\sqrt{3}$.

2.35. За якого значенні p вектори $\vec{a}\{1;\ \ p;\ \ -2\}$, $\vec{b}\{p;\ \ 3;\ \ -4\}$ є взаємно перпендикулярними?

2.36. За якого значенні x вектори $\vec{m}=x\vec{p}+13\vec{q}$ і $\vec{n}=2\vec{p}-\vec{q}$ є взаємно перпендикулярними, якщо $|\vec{p}|=2$, $|\vec{q}|=1$, а кут між векторами $\vec{p}$ і $\vec{q}$ дорівнює $\dfrac{2\pi}{3}$?

2.37. Знайти гострий кут між діагоналями паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}\{3;\ \ 2;\ \ 0\}$, $\vec{b}\{1;\ \ -2;\ \ 2\}$.

2.38. Дано вектор $\vec{a}\{1;\ \ 3;\ \ 4\}$. Знайти колінеарний до нього вектор з початком у точці $A(1;\ \ 2;\ \ 8)$ і кінцем у точці В, що лежить у площині xOy.

2.39. Знайти об'єм тетраедра з вершинами $A(1;\ \ 2;\ \ 3)$, $B(4;\ \ 4;\ \ 4)$, $C(2;\ \ 6;\ \ 4)$, $D(2;\ \ 3;\ \ 6)$.

2.40. Знайти об'єм паралелепіпеда з вершинами $A(1;\ 2;\ 3)$, $B(4;\ 0;\ -4)$, $C(2;\ 6;\ 4)$, $D(2;\ 2;\ -2)$.

2.41. Перевірити на компланарність вектори $\vec{a}\{1;\ 1;\ 5\}$, $\vec{b}\{1;\ 1;\ -3\}$, $\vec{c}\{-2;\ 2;\ -6\}$.

2.42. Перевірити на компланарність наступні вектори $\vec{a}\{-1;\ 1;\ 3\}$, $\vec{b}\{1;\ 1;\ -3\}$, $\vec{c}\{-2;\ 2;\ -6\}$.

Індивідуальне завдання

1. Обчислити об'єм паралелепіпеда, якщо координати його вершин дорівнюють $A(-1;\ n;\ n-5)$, $B(n+1;\ 1;\ n-3)$, $C(n;\ n-2;\ n-3)$, $D(-n;\ n-1;\ n+4)$.

2. Перевірити на компланарність вказані вектори $\vec{a}\{-1;\ n;\ n-5\}$, $\vec{b}\{n+1;\ 1;\ n-3\}$, $\vec{c}\{-2;\ 2n;\ 2n-6\}$ (n – остання цифра номера студента за списком).

Запитання до розділу III:

1. Що таке модуль вектора?
2. Правила додавання та віднімання векторів.
3. Які вектори називаються колінеарними та компланарними?
4. Властивості векторів та дії над ними. Знаходження довжини вектора.
5. Розкладання вектора на складові.
6. Базисні вектори.
7. Проекція вектора на вісь. Що таке одиничний вектор?
8. Що таке скалярний добуток векторів?
9. Як знаходиться кут між векторами?
10. Правило переходу від одного базису до другого. Матриця переходу.
11. Знаходження скалярного добутку за відомими координатами векторів.
12. Що таке векторний добуток?
13. Геометричний зміст модуля векторного добутку.
14. Що таке мішаний добуток векторів?

IV. ОСНОВИ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ НА ПЛОЩИНІ

Аналітична геометрія – це наука, яка вивчає методи розв’язування геометричних задач методами аналізу. Основи аналітичної геометрії заклав французький математик Р. Декарт.

§1. Системи координат

Основою аналітичної геометрії є система координат. Систем координат існує багато, але найбільш розповсюджені прямокутна, або декартова система та полярна системи.

а) Декартова система. На площині розглядають два взаємно перпендикулярні вектори: горизонтально розташований вектор *Ox* (вісь *Ox*) та вертикально розташований вектор *Oy* (вісь *Oy*). Точка *O* є початком координат. Обидві осі мають однаковий або різний масштаб, за допомогою якого для кожної точки на осях знаходиться відстань від початку координат.

Декартова система дозволяє розв’язувати дві задачі:

а) знаходження координат невідомої точки шляхом проведення перпендикулярів на осі координат (рис. 4.1.а);

б) знаходження місця відомої точки на площині як перетину перпендикулярів, побудованих на осях у точках, що відповідають координатам шуканої точки (рис. 4.1.б).

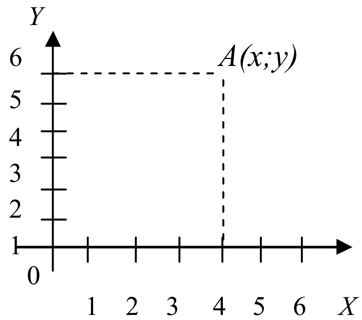


Рис. 4.1.а)

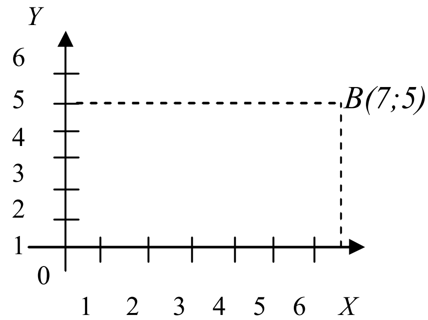


Рис. 4.1.б)

Координатна система дає можливість кожній точці площини поставити у відповідність два числа – координати точки. Перше число є проекцією точки на вісь *Ox*, а друге – проекцією на вісь *Oy*. Ці координати можуть бути відомими або невідомими. Якщо координати точки *M* невідомі, то цю точку позначають $M(x;y)$. Якщо ж вони відомі, то позначають $M(x_1; y_1)$ або $M(x_M; y_M)$, тобто x та y мають при собі числові, або буквені індекси.

б) Полярна система. Ця система складається з деякої точки *O*, що називається полюсом, та горизонтальної осі *Ox*, що називається полярною віссю. Будь-яка точка *M* лежить на прямій $OM=r$, яка називається радіус-вектором і утворює з полярною віссю кут φ, який в полярній системі є аргументом.

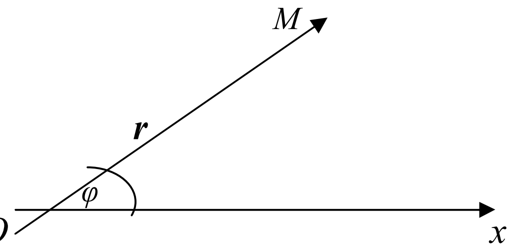


Рис. 4.2.

Величини r і φ називаються полярними координатами. Точка M в полярних координатах записується у вигляді $M(r;\ \varphi)$. Форми запису координат у декартовій і полярній системах співпадають, тому завжди вживають додаткові пояснення щодо системи координат.

Рис. 4.2. показує зв'язок між полярними та декартовими системами.

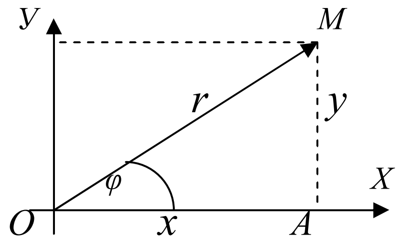


Рис. 4.3.

З трикутника OMA видно, що:

$$x = r \cdot cos\varphi\,,\ x = r \cdot sin\varphi\,,\ tg\varphi = \frac{y}{x},\ r = \sqrt{x^2 + y^2}\ .$$

§2. Найпростіші задачі, що розв'язуються за допомогою методу координат

1. Відстань між двома точками

Нехай задано відрізок AB з координатами кінців відрізка $A(x_1; y_1)$ та $B(x_2; y_2)$.

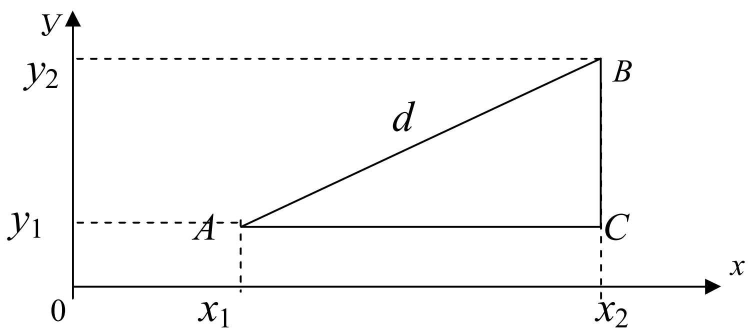


Рис. 4.4.

З трикутника ABC маємо: $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2}$. Звідси:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad (4.1)$$

<u>Приклад:</u> Знайти довжину відрізка AB, якщо $A(3;\ 5)$ і $B(7;\ 8)$.

$$d=\sqrt{(7-3)^2+(8-5)^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5.$$

2. Поділ відрізка пополам

Нехай задано відрізок *AB* з координатами кінців відрізка $A(x_1;y_1)$ та $B(x_2;y_2)$. Точка *C* є серединою відрізка *AB*. Тоді координати точки *C* можна визначити за формулами:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2};\ y=\frac{y_1+y_2}{2} \tag{4.2}$$

<u>Приклад:</u> Знайти середину відрізка *AB*, якщо *A*(3; 5) і *B*(7; 8).

$$x_c=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{3+7}{2}=5;\ y_c=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{5+8}{2}=6{,}5.$$

Отже, координати точки *C* (5; 6,5).

3. Поділ відрізка в даному відношенні

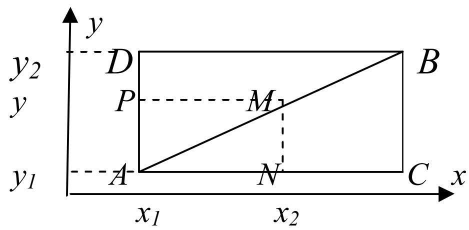


Рис. 4.5.

Необхідно відрізок *AB* поділити в заданому відношенні $|AM|/|MB|=\lambda$. Грецька літера λ читається як "лямбда"("ламбда").

Як видно з рис. 4.5, Δ *ABC* і Δ *AMN* подібні, тому $|AM|/|MB|=|AN|/|NC|$. Координати точки *M* невідомі, але відомо, що точка *M* ділить відрізок у заданому відношенні $\lambda=\frac{|AM|}{|MB|}$. З рис. 35 слідує, що $|AM|=x-x_1$ і $|NC|=x_2-x_1$, тому $\lambda=\frac{x-x_1}{x_2-x}\Rightarrow x=\frac{x+\lambda x}{1+\lambda}x$. З подібності Δ *ABD* і Δ *AMP* аналогічно знаходимо, що $y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$. Отже, маємо формули:

$$x=\frac{x+\lambda x}{1+\lambda};\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}. \tag{4.3}$$

<u>Приклад:</u> Знайти координати точки *M*, яка ділить відрізок *AB* у відношенні $\frac{1}{3}$, якщо *A* (4; 8), *B* (12; −3).

Маємо: $x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}=\frac{4+\frac{1}{3}\cdot 12}{1+\frac{1}{3}}=\frac{4+4}{\frac{4}{3}}=\frac{8}{4}\cdot 3=6.$

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} = \frac{8 - \frac{1}{3}\cdot 3}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{8-1}{\frac{4}{3}} = \frac{7}{4}\cdot 3 = \frac{21}{4}.$$

Отже координати точки М (6; 5,25).

4. Площа трикутника

Нехай задано трикутник ABC з координатами вершин $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ та $C(x_3; y_3)$.

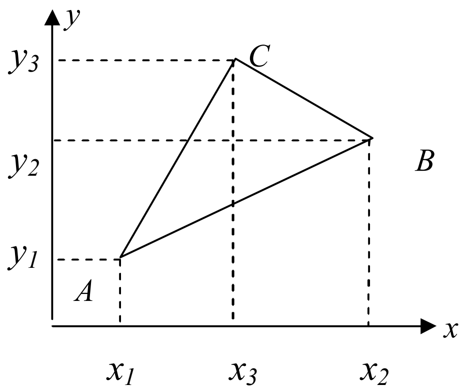


Рис. 4.6.

В ΔABC виберемо порядок обходу точок проти годинникової стрілки (з осі Ox потрапити на вісь Oy найпростішим шляхом можна поворотом осі Ox проти годинникової стрілки). Відповідно до цього вибору, якщо точка A позначена першою, то другою буде точка B, а не C. Площа ΔABC може бути знайдена, якщо від суми площ трапецій x_1ACx_3 і x_3CBx_2 відняти площу трапеції x_1ABx_2:

$$S = \frac{Ax_1 + Cx_3}{2}\cdot(x_3 - x_1) + \frac{Cx_3 + Bx_2}{2}\cdot(x_2 - x_3) - \frac{Ax_1 + Bx_2}{2}\cdot(x_2 - x_1) =$$

$$= \frac{y_1 + y_3}{2}\cdot(x_3 - x_1) + \frac{y_3 + y_2}{2}\cdot(x_2 - x_3) - \frac{y_1 + y_2}{2}\cdot(x_2 - x_1) =$$

$$= \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_2y_1 - x_3y_2 - x_1y_3).$$

Для обчислення існує така схемотехніка: будуючи трикутник, першою записуємо точку A, потім з неї проводимо пряму до точки B, далі від точки B до точки C, а останньою проводимо пряму від точки C до точки A. Саме в такому порядку виписуємо стовпчиком координати точок. Одержимо схему:

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - y_1x_2 - y_2x_3 - y_3x_1).$$

$$- \qquad\qquad +$$

Тоді площа трикутника обчислюється за такою схемою:

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1-y_1x_2-y_2x_3-y_3x_1) \qquad (4.4)$$

<u>Приклад:</u> Обчислити площу трикутника $A(2;7)$, $B(12;1)$, $C(6;15)$.

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 12 & 1 \\ 6 & 15 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\left(2+180+42-84-6-30\right)=34 \quad \textit{кв.од.}$$

За подібною схемою обчислюється площа будь-якого многокутника, але для правильного обходу точок необхідно мати рисунок.

§3. Види рівняння прямої

1. Кутовий коефіцієнт прямої

Озн.: Рівнянням прямої називається такий математичний зв’язок між змінними x та y, взятими зі шкали дійсних чисел, за якого кожному значенню x відповідає одне і тільки одне значення y.

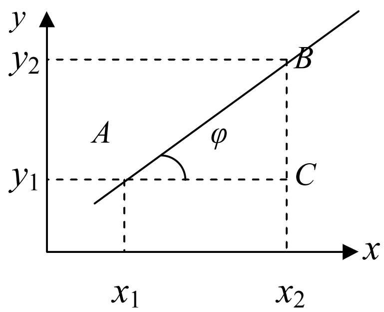


Рис. 4.7.

З $_\Delta ABC$ видно, що $tg\varphi=\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

Озн. В аналітичній геометрії тангенс кута нахилу прямої до осі Ox називається кутовим коефіцієнтом прямої і позначається через k. Отже:

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}. \qquad (4.5)$$

<u>Приклад:</u> Знайти кутовий коефіцієнт прямої AB, якщо $A(6;\,8)$; $B(-10;\,12)$.

$k=\dfrac{-10-6}{12-8}=\dfrac{-16}{4}=-4$. Пряма нахилена до осі Ox під тупим кутом.

2. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом, яка проходить через задану точку

Виберемо на прямій довільну точку M з невідомими координатами x та y. Тоді для кутового коефіцієнта можемо записати:

$$k = \frac{y - y_1}{x - x_1} \Rightarrow y - y_1 = k(x - x_1).$$

Отже, рівняння прямої з відомим кутовим коефіцієнтом, яка проходить через одну задану точку, має канонічний вигляд:

$$y - y_1 = k(x - x_1) \qquad (4.6)$$

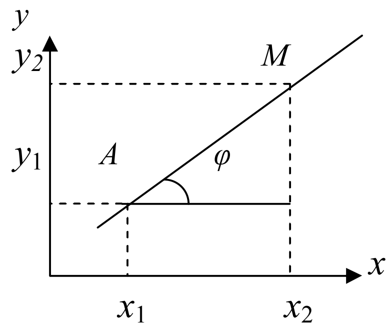


Рис. 4.8.

Приклад: Записати рівняння прямої, що проходить через точку $A(2;\ 4)$ з заданим кутовим коефіцієнтом $k=3$.

Згідно з формулою (4.6) одержимо: $y - 4 = 3(x - 2)$.

3. Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки

Використаємо рівняння прямої через одну задану точку $y - y_1 = k(x - x_1)$. За відомих координат точок A і B маємо:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \text{ Тоді } y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \Rightarrow \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Отже, рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки, має вигляд:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \qquad (4.7)$$

Рівняння (4.7) завдяки відсутності кутового коефіцієнта і необхідності користуватись таблицею тангенсів належить до найбільш вживаних на практиці.

Приклад: Записати рівняння прямої, що проходить через точки A та B з координатами $A(2;\ 3)$; $B(6;\ 8)$.

$$\frac{y-3}{8-3} = \frac{x-2}{6-2} \Rightarrow \frac{y-3}{5} = \frac{x-2}{4}.$$

4. Рівняння прямої у загальному вигляді

Алгебраїчна форма рівняння першого порядку має вигляд:

$$Ax + By + C = 0. \qquad (4.8)$$

До цієї форми зводиться будь-яке з попередніх рівнянь.

З рівняння у загальному вигляді можемо отримати рівняння прямої, яка відтинає на осі ординат відомий відрізок, а також кутовий коефіцієнт прямої:

$$By = -Ax - C \Rightarrow y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B},$$

$$\text{звідки} \quad k = -\frac{A}{B} \tag{4.9}$$

Висновок. Якщо рівняння задане в загальному вигляді, то тангенс кута нахилу прямої визначається відношенням коефіцієнта при x до коефіцієнта при y, взятому з оберненим знаком.

Приклад: Знайти кутовий коефіцієнт прямої, що задана рівнянням $3x - 4y - 12 = 0$.

З формули (4.9) маємо: $k = \frac{3}{-4} = \frac{3}{4}$.

5. Рівняння прямої з відомим кутовим коефіцієнтом, яка відтинає на осі *Oy* відомий відрізок

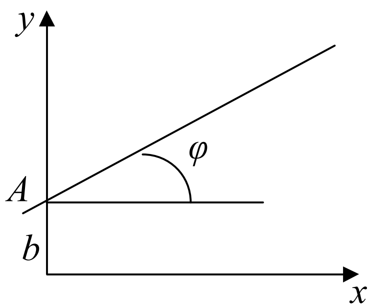


Рис. 4.9.

Координати точки A (рис. 4.9) будуть: $A(0;\ b)$. Використовуючи формулу (3.6), одержимо: $y - b = k(x - 0) \Rightarrow y = kx + b$. Отже, рівняння прямої з відомим кутовим коефіцієнтом, яка відтинає на осі Ox відомий відрізок, має вигляд:

$$y = kx + b \tag{4.10}$$

Приклад: Записати рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом $k = 3$, що відтинає по осі Oy 6 одиниць.

З формули (4.10) маємо: $y=3x+6$.

6. Рівняння прямої, яка відтинає на осях координат відомі відрізки

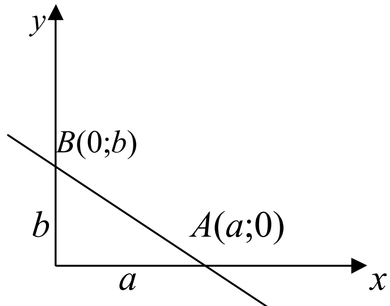


Рис. 4.10

ння прямої через дві задані точки, одержимо:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\Rightarrow\frac{x-a}{0-a}=\frac{y-0}{b-0}\Rightarrow\frac{x}{-a}+1=\frac{y}{b}\Rightarrow\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

Отже, рівняння прямої, яка відтинає на осях координат відомі відрізки і коротко називається рівнянням прямої у відрізках і має вигляд:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \qquad (4.11)$$

<u>Приклад:</u> Пряма відсікає 5 одиниць по осі Ox і 10 одиниць по осі Oy. Записати рівняння прямої.

Згідно з (4.11.) рівняння прямої буде мати вигляд: $\frac{x}{5}+\frac{y}{10}=1$.

§4. Перетин прямих

1. Координати точки перетину прямих

Якщо рівняння прямих, що перетинаються в точці $A(x_0;y_0)$, задані в загальному вигляді, то точка перетину цих прямих є точкою, координати якої є такими, що задовольняють обидва рівняння і знаходяться з розв’язування системи рівнянь:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2=0 \end{cases} \qquad (4.12)$$

<u>Приклад:</u> Знайти точку перетину прямих, що задаються рівняннями $3x+5y-8=0$ та $7x-4y-3=0$.

Координати точки перетину прямих знаходимо із системи рівнянь:

$$\begin{cases} 3x+5y=8 \\ 7x-4y=3 \end{cases}.$$

Систему обчислимо методом Крамера:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & -4 \end{vmatrix}=-12-35=-47;$$

$\Delta = \begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -32 - 15 = -47$; $\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 56 = -47$.

З формул Крамера маємо: $x_0 = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = 1$; $y_0 = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} = 1$. Отже, $A(1;\ 1)$.

2. Кут між двома прямими

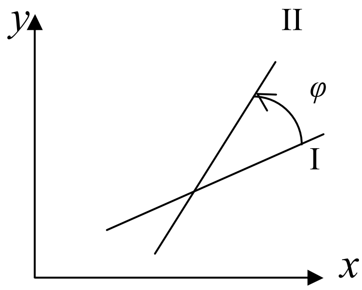


Рис. 4.11.

Кут між прямими знаходимо за годинниковою стрілкою від прямої I до прямої II. Із тригонометричних формул відомо: $tg(\beta - \alpha) = \dfrac{tg\beta - tg\alpha}{1 + tg\alpha \cdot tg\beta}$, де β і α – кути нахилу прямих I і II. Оскільки $tg\alpha = k_1$,а $tg\beta = k_2$, то:

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}. \qquad (4.13)$$

<u>Приклад</u>: Знайти кут між прямими $3x + 5y - 8 = 0$ та $7x - 4y - 3 = 0$.

З формули (3.9) маємо: $k_1 = -\dfrac{3}{5}$ і $k_2 = -\dfrac{7}{4}$.

Тоді $tg\varphi = \dfrac{-7/4 - (-3/5)}{1 + (-7/4)\cdot(-3/5)} = \dfrac{3/5 - 7/4}{1 + 21/20} = \dfrac{(12 - 35)/20}{41/20} = \dfrac{-23}{41}$.

З тригонометричних таблиць маємо $\varphi \approx 151^\circ$

3. Умова паралельності прямих

Якщо прямі паралельні, то кут між ними φ=0. Тоді з умови $\dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} = 0$ маємо: $k_2 - k_1 = 0$. Отже, якщо прямі паралельні, то

$$k_1 = k_2. \qquad (4.14)$$

<u>Приклад:</u> Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $A(1;\ 2)$ і паралельна прямій $2x + 3y - 8 = 0$.

Оскільки прямі паралельні, то їх кутові коефіцієнти рівні $k_1 = k_2 = -\dfrac{2}{3}$, тоді за рівнянням (4.6): $y - y_1 = k(x - x_1)$, тобто $y - 2 = -\dfrac{2}{3}(x - 1)$.

4. Умова перпендикулярності прямих

Якщо для прямих, що перетинаються, $tg\varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$,то $ctg\varphi = \dfrac{1 + k_1 k_2}{k_2 - k_1}$. Для перпендикулярних прямих $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, тобто $ctg\dfrac{\pi}{2}=0$, а значить, $1 + k_1 k_2 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow k_2 = \dfrac{-1}{k_1}$.

Отже, якщо прямі перпендикулярні, то: $k_2 = -\dfrac{1}{k_1}$ (4.15)

<u>Приклад:</u> Знайти рівняння перпендикуляра до прямої $3x - 4y + 1 = 0$, який проходить через точку $A(2; 7)$.

З умови перпендикулярності $k_2 = -\dfrac{1}{k_1} = -\dfrac{1}{-\dfrac{3}{4}} = \dfrac{4}{3}$, тоді за рівнянням (4.6):

$$y - y_1 = k(x - x_1), \text{ тобто } y - 7 = \frac{4}{3}(x - 2).$$

5. Відстань від точки до прямої

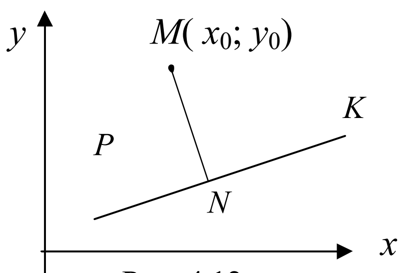


Рис. 4.12.

Відстань від точки до прямої знаходиться за перпендикуляром, тому спочатку треба знайти рівняння перпендикуляра *MN*, далі розв’язати систему рівнянь *MN* та *PK* і знайти координати точки *N*, після чого знайти довжину відрізка *MN*. Виконавши вказані дії, одержимо формулу для відстані від точки *M* до прямої *PK*: $d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$. (4.16)

Чисельник взято за модулем, тому що відстань є невід’ємним числом.

<u>Приклад:</u> Знайти відстань від точки $A(2; 3)$ до прямої $3x+4y+7=0$.

Згідно з формулою (4.16) знаходимо: $d = \dfrac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 7|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \dfrac{25}{\sqrt{25}} = 5$.

Розглянемо узагальнюючий приклад.

Приклад: Дано координати вершин трикутника $\Delta A_1A_2A_3$: $A_1\ (0;\ 6);\ A_2\ (3;\ 2);$ $A_3\ (5;\ 3)$ і точку $A_4\ (2;\ 1)$. Побудувати рисунок в системі координат.

Знайти: а) рівняння прямої A_1A_2;

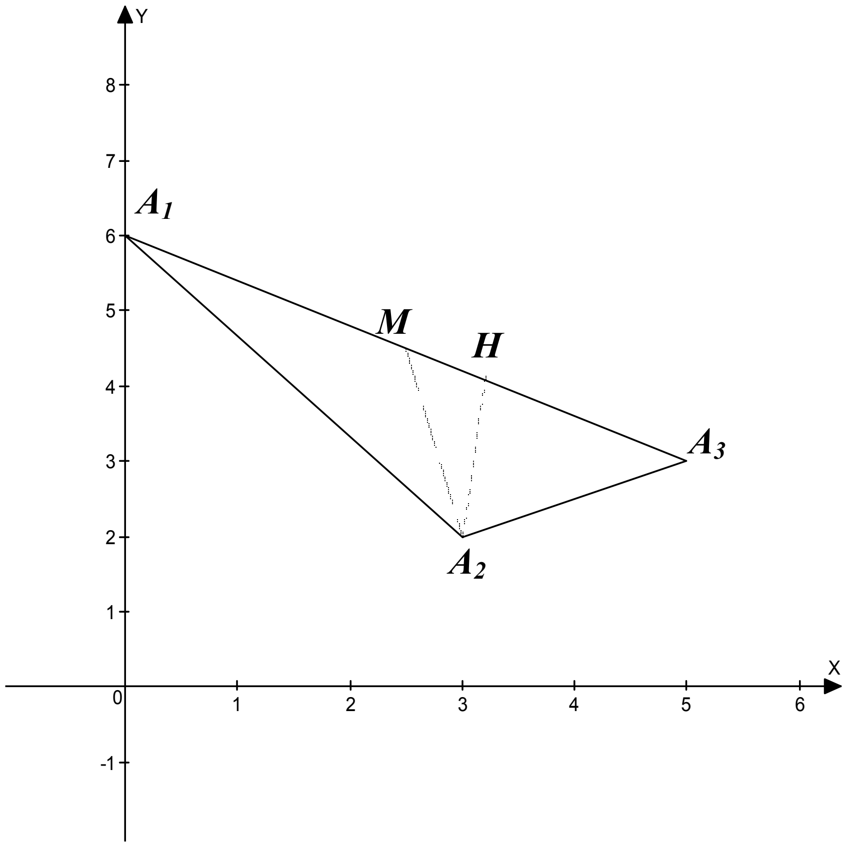
б) рівняння висоти та медіани $\Delta A_1A_2A_3$, опущених з вершини A_2;

в) тангенс кута A_2;

г) площу трикутника $\Delta A_1A_2A_3$;

д) відстань від точки A_4 до прямої A_1A_2.

Розв'язання: Побудуємо рисунок в системі координат:



а) Запишемо рівняння прямої A_1A_2:

Рівняння прямої, що проходить через дві точки, має вигляд: $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$.

Координати точок $A_1\ (0;\ 6)$ і $A_2\ (3;\ 2)$ відомі, тому рівняння набуватиме вигляду: $\dfrac{x-0}{3-0} = \dfrac{y-6}{2-6}$, або після спрощення: $4x + 3y + 18 = 0$.

б) Запишемо рівняння висоти та медіани $\Delta A_1A_2A_3$, опущених з вершини A_2:

Для запису рівняння висоти A_2H, що перпендикулярна стороні A_1A_3, запишемо рівняння сторони A_1A_3, користуючись попередньою формулою:

$\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$. Координати точок *$A_1$ (0; 6)* і *A_3 (5; 3)* відомі, тому рівняння набуватиме вигляду: $\dfrac{x-0}{5-0}=\dfrac{y-6}{3-6}$, або після спрощення: $3x+5y-30=0$.

Кутовий коефіцієнт цієї прямої дорівнює: $k_{A_1A_3}=-\dfrac{A}{B}=-\dfrac{3}{5}$. Кутовий коефіцієнт перпендикулярної прямої: $k_{A_1A_3}=-\dfrac{1}{k_{A_1A_3}}=-\left(-\dfrac{5}{3}\right)=\dfrac{5}{3}$.

Рівняння прямої, що проходить через точку *A_2 (3; 2*) з кутовим коефіцієнтом $k_{A_2H}=\dfrac{5}{3}$ має вигляд: $y-y_2=k(x-x_2)$, або $y-2=\dfrac{5}{3}\cdot(x-3)$. Після перетворення рівняння висоти набуває вигляду: $5x-3y-9=0$.

Для запису рівняння медіани *A_2M* знайдемо координати точки *M*, як середини сторони *A_1A_3*: $x_м=\dfrac{x_{A_1}+x_{A_3}}{2}=\dfrac{0+5}{2}=2{,}5$, $y_м=\dfrac{y_{A_1}+y_{A_3}}{2}=\dfrac{6+3}{2}=4{,}5$.

Запишемо рівняння медіани, як рівняння прямої, що проходить через дві точки: $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$. Оскільки координати точок *A_2* і *M* відомо, то: $\dfrac{x-3}{2{,}5-3}=\dfrac{y-2}{4{,}5-2}$. Після спрощення рівняння медіани: $5x+y-17=0$.

в) Знайдемо <u>тангенс кута A_2</u>, обчисливши кутові коефіцієнти прямих *A_1A_2* і *A_2A_3*. Рівняння прямої *A_1A_2*, з попередніх обчислень: $4x+3y+18=0$, тоді $k_{A_1A_2}=-\dfrac{A}{B}=-\dfrac{4}{3}$. Кутовий коефіцієнт прямої *A_2A_3* обчислимо за формулою: $k_{A_2A_3}=\dfrac{y_2-y_3}{x_2-x_3}=\dfrac{2-3}{3-5}=\dfrac{-1}{-2}=\dfrac{1}{2}$.

Кут між прямими знаходимо за годинниковою стрілкою, користуючись формулою: $tg\varphi=\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}=\dfrac{\frac{1}{2}-\left(-\frac{4}{3}\right)}{1+\left(-\frac{4}{3}\right)\cdot\frac{1}{2}}=\dfrac{11}{6}:\dfrac{1}{3}=\dfrac{11}{2}=5{,}5$. Тоді, користуючись чотиризначними таблицями маємо: $\varphi=78^\circ 42'$.

г) Визначимо <u>площу трикутника $A_1A_2A_3$:</u>

$$S = \pm\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} = \pm\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 3 & 2 \\ 5 & 3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= \pm\frac{1}{2}\left(0\cdot 2 + 3\cdot 3 + 5\cdot 6 - 3\cdot 6 - 5\cdot 2 - 0\cdot 6\right) = \frac{11}{2} = 5{,}5 \quad \textit{кв.од.}$$

д) <u>Відстань від точки A_4 *(2; 1)* до прямої A_1A_2, $4x + 3y + 18 = 0$</u>:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|4\cdot 2 + 3\cdot 1 + 18|}{\sqrt{16+9}} = \frac{29}{5} = 5{,}8 \quad \textit{од.}$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

3.1 Які з точок *M (3; 5)*, *N (2; 7)*, *P (–1; –3)*, *Q (–2; 0)*, *R (3; –5)* лежать на прямій $y = 2x - 1$.

3.2. Загальне рівняння прямої $3x - 4y + 12 = 0$ представити у вигляді:

а) з кутовим коефіцієнтом; б) у відрізках на осях; в) побудувати пряму.

3.3. Знайти рівняння сторін трикутника, вершини якого є точки *A (1; –1), B (3; 5;), C (–7; 11).*

3.4. Знайти кути трикутника, сторони якого задано рівняннями: $5x - 2y - 11 = 0$; $x + 2y + 5 = 0$; $x - 2y + 1 = 0$.

3.5. Знайти площу трикутника, сторони якого задано рівняннями: $5x - 2y - 11 = 0$; $x + 2y + 5 = 0$; $x - 2y + 1 = 0$.

3.6. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку M_0 *(2; 5)* паралельно прямій $3x - 4y + 15 = 0$.

3.7. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку P_0 *(5; –1)* паралельно прямій $3x - 7y + 14 = 0$.

3.8. Задана пряма $2x + 3y + 4 = 0$. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку *M (2; 1)*:

1) паралельно заданій прямій;

2) перпендикулярно до заданої прямої.

3.9. Знайти відстань між двома паралельними прямими: $3x + 4y - 12 = 0$, $3x + 4y + 13 = 0$.

3.10. Знайти точку *M*, яка симетрична точці *P(–6; 13)* відносно прямої $2x - 3y - 3 = 0$.

3.11. Знайти точку *K*, яка симетрична точці *P(8; –9)* відносно прямої, що проходить через точки *A (3; –4), B (–1; –2)*.

3.12. Задано три вершини паралелограма $A\ (–3;\ 1),\ B\ (3;\ 3),\ \ C\ (4;\ –1)$. Знайти координати четвертої вершини.

3.13. Задано вершини трикутника $A\ (12;\ –4),\ B\ (0;\ 5),\ \ C\ (–12;\ –11)$. Знайти:

а) довжини сторін;

б) рівняння сторін;

в) рівняння висоти, що проведена з вершини В;

г) довжину цієї висоти;

д) рівняння медіани, що проведена з вершини А;

е) точку перетину висоти, що проведена з вершини В, та медіани, що проведена з точки А;

ж) кут С;

з) площу трикутника.

Індивідуальне завдання

Дано координати вершин трикутника $\Delta A_1A_2A_3$ і точку A_4. Знайти:

а) рівняння прямої A_1A_2;

б) рівняння висоти та медіани $\Delta A_1A_2A_3$, опущених з вершини A_2;

в) тангенс кута A_2;

г) площу трикутника $\Delta A_1A_2A_3$;

д) відстань від точки A_4 до прямої A_1A_2;

е) побудувати рисунок в системі координат.

1. $A_1\ (1;\ 2);\ A_2\ (–3;\ 2);\ A_3\ (–5;–\ 3);\ A_4\ (2;\ –1)$.
2. $A_1\ (2;\ 1);\ A_2\ (–1;\ 2);\ A_3\ (–2;\ –3);\ A_4\ (1;\ –6)$.
3. $A_1\ (2;\ 2);\ A_2\ (–2;\ 2);\ A_3\ (–3;\ –3);\ A_4\ (2;\ –4)$.
4. $A_1\ (1;\ 1);\ A_2\ (–4;\ 2);\ A_3\ (–4;–\ 3);\ A_4\ (2;\ –7)$.
5. $A_1\ (1;\ 6);\ A_2\ (–3;–\ 2);\ A_3\ (–5;\ 3);\ A_4\ (2;\ –1)$.
6. $A_1\ (2;\ 6);\ A_2\ (–3;\ –1);\ A_3\ (–5;\ 2);\ A_4\ (1;\ –6)$.
7. $A_1\ (3;\ 6);\ A_2\ (–2;\ –2);\ A_3\ (–5;\ 1);\ A_4\ (2;\ –3)$.
8. $A_1\ (4;\ 6);\ A_2\ (–4;\ –2);\ A_3\ (–5;\ 4);\ A_4\ (2;\ –4)$.
9. $A_1\ (6;\ 6);\ A_2\ (–3;\ –5);\ A_3\ (–2;\ 3);\ A_4\ (2;\ –7)$.
10. $A_1\ (7;\ 6);\ A_2\ (–5;\ –2);\ A_3\ (–4;\ 3);\ A_4\ (2;\ –8)$.

Завдання обирається за останньою цифрою номера студента в списку.

§5. Лінії другого порядку

У загальній алгебраїчній формі рівняння II порядку має вигляд:

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0. \qquad (4.17)$$

Для прямої лінії діє принцип взаємооднозначної відповідності, згідно з яким:

1) для будь-якої накресленої в координатній системі прямої можна знайти її рівняння у вигляді рівняння I порядку;

2) для будь-якого заданого рівняння I порядку можна в координатній системі накреслити відповідну цьому рівнянню пряму лінію.

Для рівнянь II порядку цей принцип порушується. Наприклад, можна записати рівняння $x^2+y^2+6=0$, але відповідної цьому рівнянню лінії не існує (студенту рекомендується самому знайти пояснення). Ретельне дослідження рівнянь II порядку і пов'язаних з цими рівняннями ліній показало, що існує всього 4 види кривих ліній, які описуються рівняннями II порядку. Такими лініями є: коло, еліпс, парабола і гіпербола.

1. Коло

Озн. Колом називається геометричне місце точок, кожна з яких рівновіддалена від деякої точки, яку називають центром кола. Відстань від центру до кривої називають радіусом кола.

Радіус, як відстань між двома точками, задається формулою:

$$R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\ .$$

Піднесемо ліву та праву частину виразу до квадрату і одержимо рівняння кола:

$$\left(x - x_0\right)^2 + \left(y - y_0\right)^2 = R^2. \qquad (4.18)$$

У випадку, коли центр кола знаходиться у початку координат, то рівняння кола матиме вигляд:

$$x^2 + y^2 = R^2. \qquad (4.19)$$

Рівняння кола – це рівняння другого порядку. Загальне рівняння кривої другого порядку має вигляд $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Bx + Ey + P = 0$ і являє собою коло, якщо коефіцієнти при квадратах координат рівні між собою $A = C$ та якщо відсутній член з добутком координат xy, тобто $B = 0$.

Приклад: Записати рівняння кола, що проходить через точку $B(6; 0)$ і має центром точку $A(2; 3)$.

З умови маємо, що AB – це радіус кола. Тоді:

$R=\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(6-2)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{16+9} = 5$.

А рівняння кола буде: $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$.

2. Еліпс

Озн. Еліпсом називається геометричне місце точок, для кожної з яких сума відстаней до двох точок, які називаються фокусами, є сталою величиною.

Це визначення дає можливість легко намалювати еліпс. Якщо нитку довжиною L закріпити кнопками по краях до листка паперу (це фокуси), а вістрям олівця водити вздовж натягнутої цим вістрям нитки, то одержимо еліпс.

Канонічне рівняння еліпса з центром на початку координат.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (4.20)$$

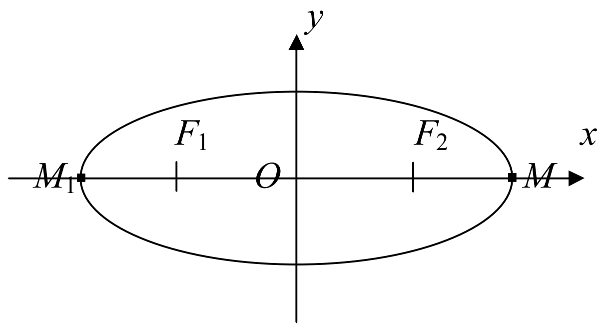


Рис. 4.13 а).

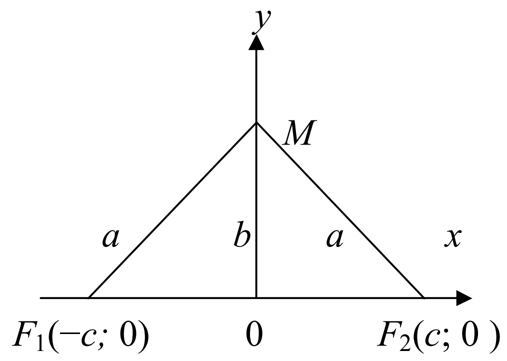


Рис. 4.13 б).

Координати фокусів еліпса $F_1(c;\ 0)$ і $F_2\ (-c;\ 0)$. Відстань між фокусами дорівнює $2c$. Точки перетину еліпса з осями координат $A_1\ (a;\ 0)$, $A_2\ (-a;\ 0)$ і $B_2\ (0;\ b)$, $B_2\ (0;\ -b)$ – називаються вершинами еліпса.

Відрізки $A_1A_2 = 2a$, $B_1B_2 = 2\ b$ – називаються осями еліпса.

Величина $e=\frac{c}{a}$ називається ексцентриситетом гіперболи, звідки $\frac{b}{a}=\sqrt{e^2-1}$. Ексцентриситет еліпса $e=\frac{c}{a}<1$.

Відстані r_1 та r_2 точки $M\ (x,\ y)$ еліпса до його фокусів називаються фокальними радіусами цієї точки і визначаються за формулами: $r_1=a-ex$, $r_1=a+ex$.

Дві прямі, які паралельні до малої осі еліпса і знаходяться від неї на відстані $\frac{a}{e}$, називаються директрисами еліпса. Їхні рівняння: $x=\frac{a}{e}$, $x=-\frac{a}{e}$.

Якщо центр еліпса буде в точці $A(x_0;\ y_0)$, то рівняння еліпса буде таким:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1. \qquad (4.21)$$

Якщо c=0, то ε=0 і b=a (випадок кола).

<u>Приклад:</u> Записати рівняння еліпса та знайти його ексцентриситет, якщо a=5, b=3, а центр еліпса знаходиться в точці A(3; 4).

Для зміщеного центру маємо:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1\Rightarrow\frac{(x-3)^2}{25}+\frac{(y-4)^2}{9}=1.$$

З виразу $\dfrac{b}{a}=\sqrt{1-e^2}$ маємо: $\dfrac{b^2}{a^2}=1-e^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow e^2=1-\frac{b^2}{a^2}=1-\frac{9}{25}=\frac{25-9}{25}=\frac{16}{25}\Rightarrow \varepsilon=\frac{4}{5}.$$

3. Гіпербола

Озн. Гіперболою називається геометричне місце точок, для кожної з яких різниця відстаней до двох деяких точок (фокусів) є величиною сталою.

Канонічне рівняння гіперболи з центром на початку координат:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (4.22)$$

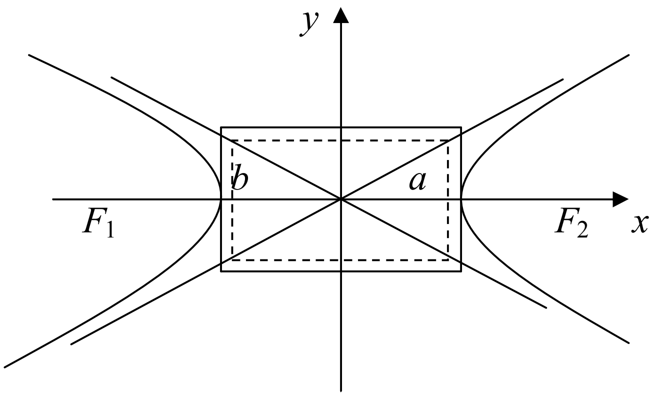


Рис. 4.14.

Координати фокусів гіперболи $F_1(c;\ 0)$ і $F_2\ (-c;\ 0)$. Відстань між фокусами дорівнює $2c$. Точки перетину еліпса з віссю абсцис $A_1\ (a;\ 0)$, $A_2\ (-a;\ 0)$ називаються дійсними вершинами. Відстань $A_1A_2 = 2a$ називається дійсною віссю гіперболи.

Точки $B_2\ (0;\ b)$, $B_2\ (0;\ -b)$ – називаються уявними вершинами гіперболи, а відрізок $B_1B_2 = 2b$ – уявною віссю гіперболи.

Ексцентриситет гіперболи $e=\dfrac{c}{a}>1$.

Відстані r_1 та r_2 точки $M\ (x,\ y)$ гіперболи до його фокусів називаються фокальними радіусами цієї точки і визначаються за формулами: $r_1=a-ex$, $r_1=a+ex$, за умови, що точка M лежить на правій вітці гіперболи.

Дві прямі, які паралельні до уявної осі гіперболи і знаходяться від неї на відстані $\dfrac{a}{e}$, називаються директрисами еліпса. Їхні рівняння: $x=\dfrac{a}{e}$, $x=-\dfrac{a}{e}$.

Прямі, що виражаються рівняннями $y = \pm \frac{b}{a} \cdot x$ називаються асимптотами гіперболи.

Дві прямі, що виражаються рівняннями:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \text{ і } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \qquad (4.23)$$

називаються спряженими.

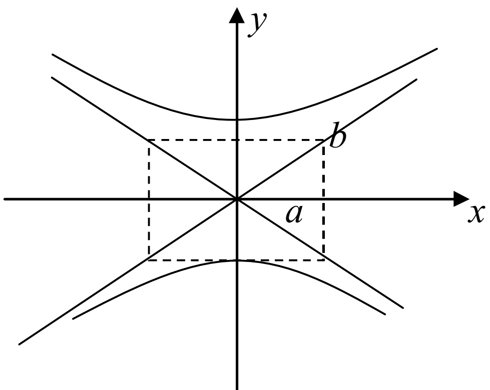


Рис. 4.15 а).

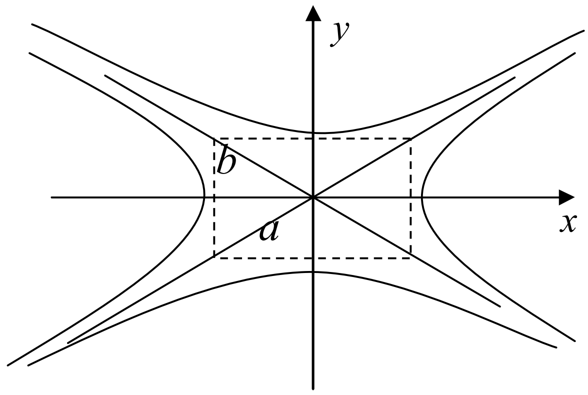


Рис. 4.15 б).

Якщо вісі гіперболи рівні, тобто $a = b$, то гіпербола називається рівнобічною або рівносторонньою. Її рівняння має вигляд: $x^2 - y^2 = a^2$

Якщо центр перетину асимптот не співпадає з початком координат і знаходиться в точці $A(x_0; y_0)$, то рівняння гіперболи відповідно будуть:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = \pm 1 . \qquad (4.24)$$

Приклад: записати рівняння гіперболи, яка проходить через точку $A(5; 5)$, якщо її асимптоти паралельні осям координат і перетинаються у точці $B(3;2)$.

З рівняння $(x-x_0)(y-y_0)=k$ маємо: $(x-3)(y-2)=k$. Підставляючи координати точки A в рівняння, знаходимо: $(5-2)(5-3)=k$ => $k=6$. Отже,

$(x-3)(y-2)=6$ є рівнянням гіперболи.

4. Парабола

Озн. Параболою називається геометричне місце точок, кожна з яких рівновіддалена від деякої точки (фокуса) та деякої прямої (директриси).

Канонічне рівняння параболи з вершиною на початку координат.

$$y^2=2px, \qquad (4.25)$$

де p – відстань від фокуса до директриси. Вершина параболи знаходиться у початку координат, віссю симетрії є вісь абсцис.

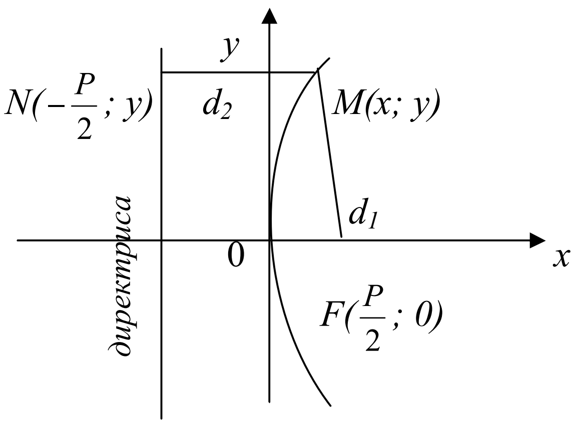


Рис. 4.16 а).

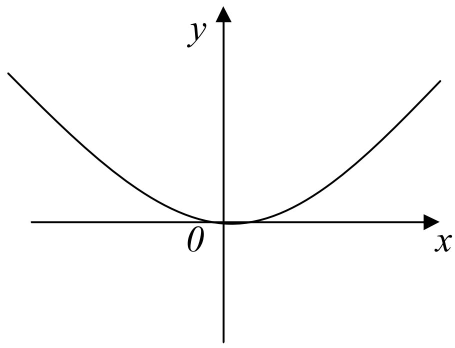


Рис. 4.16 б)

Координати фокуса F $\left(\frac{p}{2};0\right)$. Рівняння директриси параболи: $x=-\frac{p}{2}$.

Фокальний радіус *M (x,y)* параболи дорівнює $r=x+\frac{p}{2}$.

Ексцентриситет параболи вважається рівним одиниці.

Якщо віссю симетрії параболи слугує вісь ординат, то рівняння параболи матиме вигляд:

$$x^2=2py. \qquad (4.26)$$

Якщо ж вершина параболи з точки $O(0;0)$ переміститься в точку $A(x_0;y_0)$, то рівняння параболи буде:

$$(y-y_0)^2=\pm 2p(x-x_0) \text{ або } (x-x_0)^2=\pm 2p(y-y_0).$$

<u>Приклад:</u> Записати рівняння параболи, яка має вершину в точці $A(6;\ 3)$ і проходить через точку $B(0;-8)$.

Гілки параболи спрямовані вниз, отже, її рівняння буде таким: $(x-x_0)^2=-2p(y-y_0)\Rightarrow(x-6)^2=-2p(y-3)$. Точка *B* лежить на параболі, а значить задовольняє її рівняння. Підставивши в рівняння координати точки *B*, одержимо:

$$(0-6)=-2p(-8-3)\Rightarrow 36=22p\Rightarrow p=\frac{36}{22}\Rightarrow 2p=\frac{36}{11}.$$

Отже, рівняння параболи буде: $(x-6)^2=-\frac{36}{11}(y-3)$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

2.14. Скласти рівняння кола з центром в точці *C (2; –3)* і радіусом *6 од*.

2.15. Скласти рівняння кола, що проходить через точку М (2; 6) і його центр співпадає з точкою *C (–1; 2)*.

2.16. Скласти рівняння кола, що проходить через точки *A (–1; 1)* і *B (1; –3)*, якщо центр лежить на прямій $2x - y + 1 = 0$.

2.17. Скласти рівняння кола, що проходить через три точки *A (–1; 5)*, *B (–2; 2)* і *C (5; 5)*.

2.18. Скласти рівняння кола, якщо точки *A (3; 2)* і *B (–1;6)* є кінцями одного з діаметрів.

2.19. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого розміщені на осі абсцис симетрично початку координат. Знаючи, що:

1) його велика вісь дорівнює 10 одиниць, а відстань між фокусами $2c = 8$;
2) його мала вісь дорівнює 24 одиниць, а відстань між фокусами $2c = 10$;
3) відстань між фокусами $2c = 6$ і ексцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{5}$;
4) його велика вісь дорівнює 20 одиниць, а ексцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{5}$;
5) його мала вісь дорівнює 10 одиниць, а ексцентриситет $\varepsilon = \frac{12}{13}$.

2.20. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якого розміщені на осі абсцис симетрично початку координат. Знаючи, що:

1) відстань між фокусами $2c = 10$ і вісь $2в = 8$;
2) відстань між фокусами $2c = 6$ і ексцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{2}$;
3) вісь $2a = 16$ і ексцентриситет $\varepsilon = \frac{5}{4}$;
4) рівняння асимптот $y = \pm\frac{4}{3}x$ і відстань між фокусами $2c = 20$;
5) точки *A (6; –1)* і В *(–8;* $2\sqrt{2}$ *)* знаходяться на гіперболі.

2.21. Скласти рівняння параболи, вершина якої знаходиться в початку координат. Знаючи, що:

1) парабола розміщена симетрично осі *Ox* і проходить через точку *M (9; 6)*;
2) парабола розміщена симетрично осі *Ox* і проходить через точку *P (–1; 3)*;
3) парабола розміщена симетрично осі *Oy* і проходить через точку *A (1; 1)*;
3) парабола розміщена симетрично осі *Oy* і проходить через точку *K (4; –8).*

2.22. Визначити, яка крива задається рівнянням та визначити її основні параметри: $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$.

2.23. Визначити, яка крива задається рівнянням та визначити її основні параметри: $x^2 + 4y^2 + 10x + 8y + 28 = 0$.

Індивідуальне завдання

1. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого розміщені на осі абсцис симетрично початку координат, знаючи, що відстань між фокусами $2c = 2n$ і ексцентриситет $\varepsilon = \frac{2n}{5}$.

2. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якого розміщені на осі абсцис симетрично початку координат, знаючи, що відстань між фокусами $2c = 2n$ і ексцентриситет $\varepsilon = \frac{3n}{2}$.

3. Скласти рівняння параболи, симетричної відносно осі Ox, що проходить через точку $M\ (n;\ -2n)$ і початок координат.

У вказаних завданнях n – номер студента за списком.

Запитання до розділу IV

1. Що називають декартовою та полярною системами координат?
2. Які задачі належать до найпростіших?
3. Назвіть види рівняння прямої.
4. Як знаходиться відстань від точки до прямої?
5. Що таке взаємооднозначна відповідність?
6. Назвіть умови паралельності та перпендикулярності прямих.
7. Як знайти кут між прямими?
8. Чому для ліній II порядку не існує взаємооднозначної відповідності?
9. Що називається колом, еліпсом, параболою, гіперболою?
10. Що таке паралельний перенос та поворот осей координат?
11. Що таке ексцентриситет?
12. Чим відрізняються лінії II порядку зі зміщеним центром від ліній з незміщеним центром?

V. ОСНОВИ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ У ПРОСТОРІ

§1. Найпростіші задачі

Для знаходження співвідношень між точками, лініями та поверхнями застосовуються поняття векторної алгебри. За основу декартової системи взята правостороння система координат, у якій існує порядок обходу проти годинникової стрілки (рис. 4.1 а). Рідше застосовується (рис. 4.1 б) лівостороння система.

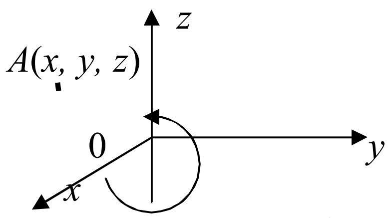


Рис. 5.1 а)

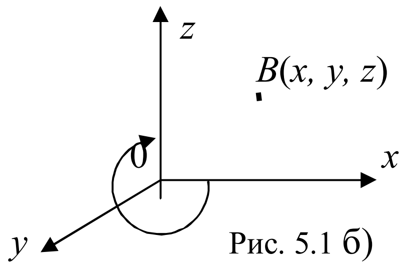


Рис. 5.1 б)

1. Відстань між двома точками:

Відстань між двома точками знаходиться аналогічно, як для точок заданих у площині:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}\,. \qquad (5.1)$$

2. Поділ відрізка в заданому відношенні:

Поділ відрізка у заданому відношенні проводиться за аналогічними для площини формулами:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda};\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda};\ z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}. \qquad (5.2)$$

Якщо відрізок ділиться пополам, то $\lambda=1$.

<u>Приклад:</u> Знайти довжину та координати середини відрізка, заданого точками $A(1;\,2;\,3)$ і $B(2;\,4;\,5)$.

Обчислимо довжину відрізка за формулою (5.1):

$$|AB|=\sqrt{(2-1)^2+(4-2)^2+(5-3)^2}=\sqrt{1+4+4}=3\,.$$

Знайдемо координати середини відрізка за формулами (5.2):

$$x_c=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2};\quad y_c=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{2+4}{2}=3;\quad z_c=\frac{z_1+z_2}{2}=\frac{3+5}{2}=4.$$

Отже, $C(\frac{3}{2};\,3;\,4)$.

§2. Рівняння площини та прямої лінії

1. Рівняння площини з нормальним вектором

Нехай в декартовій системі координат задана площина α з відомою точкою $M(x_0;\,y_0;\,z_0)$, а $\vec{n}$ – вектор, який є перпендикулярним до площини P (рис. 5.2).

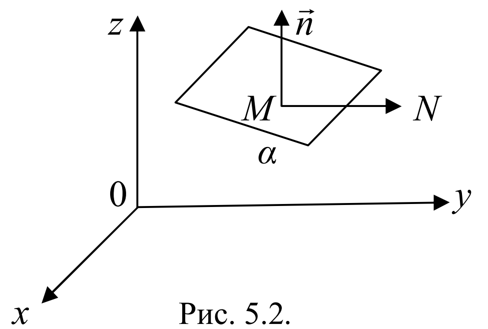


Рис. 5.2.

Вектор $\vec{n}$ називається нормаллю. З умови перпендикулярності векторів $\vec{n}$ і $\overrightarrow{NM}$ випливає: $\overrightarrow{NM} \cdot \vec{n} = 0$.

Якщо $\vec{n}$ $(A;\ B;\ C)$ і $\overrightarrow{NM}$ $(x-x_0;\ y-y_0;\ z-z_0)$, то рівняння площини α матиме вигляд:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

Після спрощення одержимо:

$$Ax+By+Cz+D=0, \tag{5.3}$$

де $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$.

Отже, у просторі будь-якій площині відповідає рівняння I порядку. Множники A, B, C називаються спрямовуючими коефіцієнтами.

Якщо рівняння площини поділити на D, то одержимо:

$$\frac{x}{-\frac{D}{A}}+\frac{y}{-\frac{D}{B}}+\frac{z}{-\frac{D}{C}}=1 \Rightarrow \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \tag{5.4}$$

Отримане рівняння є рівнянням площини у «відрізках» на осях.

<u>Приклад:</u> Скласти рівняння площини, яка перпендикулярна до осі Oy і проходить через точку $M_0\ (-3;\ 4;\ 5)$.

Оскільки орт $\vec{j}(0;1;0)$ перпендикулярний до площини, то його можна розглядати як нормальний вектор. Отже, шукане рівняння має вигляд:
$0(x+3)+1(y-4)+0(z-5)=0$, або $y=4$.

2. Рівняння площини, що проходить через три точки

Нехай на площині α задано три точки: $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$, $M_3(x_3;y_3;z_3)$, які не лежать на одній прямій. Ці точки одночасно визначають площину. Знайдемо її рівняння. Візьмемо на площині довільну точку $M(x;y;z)$ і знайдемо вектори:

$$\overrightarrow{M_1M_3}=(x_3-x_1;y_3-y_1;z_3-z_1),$$
$$\overrightarrow{M_1M}=(x-x_1;y-y_1;z-z_1),$$
$$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1).$$

Ці вектори лежать в площині α, тобто вони компланарні. Оскільки мішаний добуток компланарних векторів дорівнює нулю, то $\overrightarrow{M_1M} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \cdot \overrightarrow{M_1M_3} = 0$, або

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (5.5)$$

Маємо рівняння площини, що проходить через три точки.

<u>Приклад:</u> Записати рівняння площини, що проходить через точки: *A_1 (2; 3; –4); A_2 (5; 7; 9); A_3 (2;– 2; 4).*

Рівняння площини $A_1A_2A_3$ у загальному вигляді:

$$\begin{vmatrix} x-x_a & y-y_a & z-z_a \\ x_в-x_a & y_в-y_a & z_в-z_a \\ x_c-x_a & y_c-y_a & z_c-z_a \end{vmatrix} = 0, \text{ тобто } \begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z+4 \\ 5-2 & 7-3 & 9+4 \\ 2-2 & -2-3 & 4+4 \end{vmatrix} = 0;$$

$$32(x-2)-15(z+4)-24(y-3)+65(x-2)=0 \Rightarrow 97x-24y-15z-182=0.$$

3. Рівняння прямої, що задано точкою і напрямним вектором

Нехай в просторі в прямокутній системі координат задано пряму точкою $M(x_0; y_0; z_0)$ і напрямним вектором $\vec{s}(m; n; p)$, тоді канонічне рівняння прямої в просторі:

$$\frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n} = \frac{z-z_1}{p}. \qquad (5.6)$$

4. Рівняння прямої, що задано двома точками

Нехай в просторі в прямокутній системі координат задано пряму двома точками $A(x_1; y_1; z_1)$ та $B(x_2; y_2; z_2)$, тоді рівняння прямої матиме вигляд:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \qquad (5.7)$$

<u>Приклад:</u> Записати рівняння прямої A_1A_2, якщо *A_1 (2; 3; –4); A_2 (5; 7; 9).*

Для прямої A_1A_2: $\frac{x-2}{5-2} = \frac{y-3}{7-3} = \frac{z-(-4)}{9-(-4)} \Rightarrow \frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+4}{13}$.

5. Рівняння прямої, що задано двома площинами

Якщо дві площини задані рівняннями

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \text{ і } A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$

то при перетині вони утворюють пряму, рівняння якої міститься в розв’язку системи цих двох рівнянь. Задаючись двома значеннями $z=z_1$ і $z=z_2$, одержують дві системи, з яких знаходять x_1, y_1 та x_2, y_2. Отримують дві точки $(x_1; y_1; z_1)$ і $(x_2; y_2; z_2)$, з яких знаходять рівняння прямої.

<u>Приклад:</u> Записати рівняння прямої, утвореної площинами

$$2x+3y+4z-20=0 \text{ та } 5x-y+z-6=0.$$

Нехай $z=0$, то отримаємо систему двох рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} 2x+3y=20 \\ 5x-y=6 \end{cases} \Rightarrow + \begin{cases} 2x+3y=20 \\ 15x-3y=18 \end{cases} \Rightarrow . \begin{cases} x=\dfrac{38}{17} \\ y=\dfrac{88}{17} \end{cases}, \text{ тобто } A\left(\frac{38}{17};\quad \frac{88}{17};\quad 0\right).$$

Нехай z=3, то матимемо рівняння: $\begin{cases} 2x+3=8 \\ 5x-y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$, тобто B(1; 2; 3).

Знайдемо рівняння прямої, що проходить через точки A і B:

$$\frac{x-1}{\frac{38}{17}-1}=\frac{y-2}{\frac{88}{17}-2}=\frac{z-3}{0-3} \Rightarrow \frac{x-1}{\frac{21}{17}}=\frac{y-2}{\frac{54}{17}}=\frac{z-3}{-3}.$$

§3. Перетин прямих і площин

1. Кут між двома прямими.

Нехай прямі a і b задано рівняннями: $\dfrac{x-x_1}{a_x}=\dfrac{y-y_1}{a_y}=\dfrac{z-z_1}{a_z}$ і $\dfrac{x-x_1}{b_x}=\dfrac{y-y_1}{b_y}=\dfrac{z-z_1}{b_z}$. Кут між цими прямими дорівнює куту між їхніми напрямленими векторами $\vec{s}_1(a_x;a_y;a_z)$ та $\vec{s}_2(b_x;b_y;b_z)$, тоді косинус кута між цими прямими дорівнює: $\cos A=\dfrac{a_x в_x+a_y в_y+a_z в_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{в_x^2+в_y^2+в_z^2}}$. (5.8)

<u>Приклад:</u> Обчислити косинус кута $A_3A_1A_2$, якщо $A_1(2;\ 3;\ -4);\ A_2(5;\ 7;\ 9);\ A_3(13;\ 1;\ 2)$.

Враховуючи, що рівняння прямої можна подати у вигляді:

$\dfrac{x-x_1}{a_x}=\dfrac{y-y_1}{a_y}=\dfrac{z-z_1}{a_z}$, то для прямої A_1A_2 $\vec{a}$ $(3;\ 4;\ 13)$, а для A_1A_3 $\vec{в}$ $(11;\ -2;\ 6)$.

Тоді $\cos A=\dfrac{3\cdot 11+4\cdot(-2)+13\cdot 6}{\sqrt{3^2+4^2+13^2}\sqrt{11^2+(-2)^2+6^2}}=\dfrac{103}{\sqrt{194}\cdot\sqrt{161}}\approx 0{,}5829$.

Отже, $\angle A=\arccos 0{,}5829=53^{\circ}30'$.

2. Умова перпендикулярності та паралельності двох прямих.

Нехай прямі a і b задано рівняннями: $\dfrac{x-x_1}{a_x}=\dfrac{y-y_1}{a_y}=\dfrac{z-z_1}{a_z}$ і $\dfrac{x-x_1}{b_x}=\dfrac{y-y_1}{b_y}=\dfrac{z-z_1}{b_z}$.

Тоді умова перпендикулярності прямих матиме вигляд:

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0. \qquad (5.9)$$

Умова паралельності: $$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}. \qquad (5.10)$$

3. Кут між площинами.

Нехай задано дві площини α_1 та α_2 рівняннями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ та $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Двогранний кут між площинами вимірюється лінійним кутом, який дорівнює куту між нормальними векторами $\vec{n_1}(A_1; B_1; C_1)$ і $\vec{n_2}(A_2; B_2; C_2)$ цих площин. Тоді косинус кута дорівнює:

$$cos\varphi = \frac{\vec{n_1}\vec{n_2}}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \qquad (5.11)$$

Приклад: Знайти кут між площинами $2x + y + 3z - 1 = 0$ і $x + y - z + 5 = 0$.

За формулою (5.11) маємо $cos\varphi = \frac{2\cdot 1 + 1\cdot 1 + 3\cdot(-1)}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = 0$, отже дані площини перпендикулярні.

4. Умова перпендикулярності та паралельності двох площин.

Якщо площини α_1 та α_2 перпендикулярні, то скалярний добуток їхніх нормальних векторів дорівнює нулю, тобто рівність:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \qquad (5.12)$$

Є умовою перпендикулярності площин.

Якщо площини α_1 та α_2 паралельні, то координати їхніх нормальних векторів пропорційні, тобто умовою паралельності площин є рівність відношень:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \qquad (5.13)$$

§4. Основні співвідношення

1. Відстань від точки до прямої.

Якщо задане рівняння $Ax + By + Cz + D = 0$ площини α і точка $M(x_0; y_0; z_0)$, що не лежить на цій площині, то відстань d від точки M до площини α знаходиться за формулою:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (5.14)$$

Приклад: Знайти висоту піраміди, заданої своїми вершинами A_1 *(–1; 2; –1); A_2 (1; 0; 2); A_3 (0; 1; –1); A_4 (2; 0; –1).*

Рівняння площини основи, що проходить через точки A_2, A_3, A_4:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0, \text{ звідки } 3x+6y+z-5=0.$$

Висоту знайдемо як відстань від точки A_1 *(–1; 2; –1)* до площини $A_2A_3\,A_4$:

$$A_1H = \frac{|-3+12-1-5|}{\sqrt{3^2+6^2+1^2}} = \frac{5}{\sqrt{46}}.$$

2. Площа трикутника.

Нехай маємо точки $A_1(x_1;y_1;z_1)$, $A_2(x_2;y_2;z_2)$ та $A_3(x_3;y_3;z_3)$. Площу трикутника $A_1A_2A_3$ обчислимо, користуючись властивістю добутку векторів A_1A_2 і A_1A_3:

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3}\right|, \text{ де}$$

$$\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3} = \begin{vmatrix} y_в-y_a & z_в-z_a \\ y_c-y_a & z_c-z_a \end{vmatrix}\cdot\vec{i} + \begin{vmatrix} x_в-x_a & z_в-z_a \\ x_c-x_a & z_c-z_a \end{vmatrix}\cdot\vec{j} + \begin{vmatrix} x_в-x_a & y_в-y_a \\ x_c-x_a & y_c-y_a \end{vmatrix}\cdot\vec{k}. \quad (5.15)$$

Приклад: Дано координати A_1 *(2; 3; –4); A_2 (5; 7; 9); A_3 (2;– 2; 4)*. Обчислити площу трикутника $A_1A_2A_3$.

Площу трикутника обчислимо за формулою: $S_\Delta = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3}\right|$. Для цього знайдемо векторний добуток векторів $\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3}$:

$$\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3} = \begin{vmatrix} 4 & 13 \\ -5 & 8 \end{vmatrix}\cdot\vec{i} + \begin{vmatrix} 3 & 13 \\ 0 & 8 \end{vmatrix}\cdot\vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}\cdot\vec{k} = (32+65)\vec{i} + (24-0)\vec{j} + (-15-0)\vec{k} =$$

$$= 97\vec{i} + (-24)\vec{j} + (-15)\vec{k}.$$

Тоді: $\left|\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3}\right| = \sqrt{97^2+(-24)^2+(-15)^2} = \sqrt{10210}$.

Отже, $S_\Delta = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3}\right| = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{10210} \approx 50$ *кв.од.*

3. Об’єм піраміди.

Нехай задано піраміду вершинами $A_1(x_1;y_1;z_1)$, $A_2(x_2;y_2;z_2)$, $A_3(x_3;y_3;z_3)$ та $A_4(x_4;y_4;z_4)$, тоді її об’єм дорівнює:

$$V = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_в-x_a & y_в-y_a & z_в-z_a \\ x_c-x_a & y_c-y_a & z_c-z_a \\ x_д-x_a & y_д-y_a & z_д-z_a \end{vmatrix} \quad (5.16)$$

Приклад: Знайти об’єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$, якщо задано координати її вершин A_1 *(2; 3; –4); A_2 (5; 7; 9); A_3 (2;– 2; 4); A_4 (13; 1; 2).*

Об’єм піраміди обчислимо за формулою (4.16), тоді:

$$V = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 3 & 4 & 13 \\ 0 & -5 & 8 \\ 11 & -2 & 6 \end{vmatrix} = \pm\frac{1}{6}\left(-90+352+715+48\right) = 170\frac{5}{6} \ \textit{куб.од.}$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

4.1. На якій відстані від початку координат знаходяться точки *A(–3; 0; 4), B(0; 8; –6), C(1; –1; 4)*.

4.2. Задано дві вершини *A(2; –3; –5), B(–1; 3; 2)* паралелограма *АВСД* і точку перетину його діагоналей *M(4; –1; 7)*. Визначити координати двох інших вершин цього паралелограма.

4.3. Задано вершини трикутника *A(3; 2; –1), B(5; –4; 7)* і *C(–1; 1; 2)*. Обчислити довжину його медіани, що проведена із вершини *C*.

4.4. Обчислити відстань від точки *P(–1; 1; –2)* до площини, що проходить через три задані точки *A(1; –1; 1), B(–2; 1; 3)* і *C(4; –5; –2)*.

4.5. Скласти рівняння площини, що проходить через точку перетину трьох площин $2x - y - z - 1 = 0$, $x + 2z - 4 = 0$, $x - y = 0$, через початок координат і через точку *P (7; 1; 2)*.

4.6. Знайти точку перетину площин $2x - y + 3z - 9 = 0$, $3x + y - 4z + 6 = 0$, $x + 2y + 2z - 3 = 0$.

4.7. Знайти довжину відрізка A_1A_2, якщо $A_1(1; 1; 1)$; $A_2(-1; -2; -2)$.

4.8. Дано координати вершин трикутника $A_1A_2A_3\ A_4$: $A_1(1; 1; 1)$; $A_2(-1; -2; -2)$; $A_3(0; -3; 3)$. Знайти рівняння сторін A_1A_2 і A_1A_3.

4.9. Знайти косинус кута $A_3A_1A_2$, якщо $A_1(1; 1; 1)$; $A_2(-1; -2; -2)$; $A_3(0; -3; 3)$.

4.10. Знайти площу грані $A_1A_2A_3$, якщо $A_1(1; 1; 1)$; $A_2(-1; -2; -2)$; $A_3(0; -3; 3)$.

4.11. Знайти рівняння площини $A_1A_2A_3$, якщо $A_1(1; 1; 1)$; $A_2(-1; -2; -2)$; $A_3(0; -3; 3)$.

4.12. Знайти об’єм піраміди $A_1A_2A_3\ A_4$, якщо задано координати її вершин $A_1(1; 1; 1)$; $A_2(-1; -2; -2)$; $A_3(0; -3; 3)$; $A_4(4; 3; -1)$.

Індивідуальне завдання

Дано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3\ A_4$. Знайти:

а) довжину ребра A_1A_2;

б) рівняння ребер A_1A_2 і A_1A_3;

в) косинус кута $A_3A_1A_2$;

г) площу грані $A_1A_2A_3$;

д) рівняння площини $A_1A_2A_3$;

е) об’єм піраміди.

1. $A_1\ (1; 2; 1)$; $A_2\ (-3; 2; -2)$; $A_3\ (-5; -3; 3)$; $A_4\ (0; 2; -1)$.
2. $A_1\ (3; 2; 1)$; $A_2\ (-3; -1; 2)$; $A_3\ (-5; -2; -3)$; $A_4\ (0; 1; -6)$.

3. A_1 *(2; 1; 2)*; A_2 *(–3; –2; 2)*; A_3 *(–3; –5; –3)*; A_4 *(0; 2; –4)*.
4. A_1 *(1; 1; 3)*; A_2 *(–4; –3; 2)*; A_3 *(–4;– 3; –5)*; A_4 *(0; 2; –7)*.
5. A_1 *(1; 2; 6)*; A_2 *(–3; –3; – 2)*; A_3 *(–5; –5; 3)*; A_4 *(0; 2; –1)*.
6. A_1 *(2; 4; 6)*; A_2 *(–3; –3; –1)*; A_3 *(–5; –5; 2)*; A_4 *(0; 1; –6)*.
7. A_1 *(4; 3; 6)*; A_2 *(–2; –3; –2)*; A_3 *(–5; –5; 1)*; A_4 *(0; 2; –3)*.
8. A_1 *(5; 4; 6)*; A_2 *(–4; –3; –2)*; A_3 *(–5; –5; 4)*; A_4 *(0; 2; –4)*.
9. A_1 *(1; 6; 6)*; A_2 *(–3; –3; –5)*; A_3 *(–2; –5; 3)*; A_4 *(0; 2; –7)*.
10. A_1 *(1; 7; 6)*; A_2 *(–5; –3; –2)*; A_3 *(–4; –5; 3)*; A_4 *(0; 2; –8)*.

Завдання обирається за останньою цифрою номера студента в списку.

Запитання до розділу V:

1. Що таке лівостороння та правостороння трійка координат?
2. За якою формулою знаходиться відстань між двома точками.
3. Вказати формулу координат точки, яка ділить відрізок у заданому відношенні.
4. Написати рівняння площини у просторі.
5. Написати рівняння прямої у просторі.
6. Умови паралельності та перпендикулярності прямих.
7. Умови паралельності та перпендикулярності площин.
8. Відстань від точки до площини.
9. Площа трикутника.
10. Об’єм піраміди.

VI. ОСНОВИ ТЕОРІЇ ГРАНИЦЬ

§1. Змінні величини. Послідовності та функції

Озн. Змінною називається величина (x), яка може приймати різноманітні значення.

Наприклад, яскравість добового освітлення змінюється зі зміною часу, тому вона є величина змінна.

Якщо з якоїсь причини змінна величина перестає змінюватись і приймає однакові значення, то вона стає сталою величиною. Тому сталу величину можемо вважати частковим випадком величини змінної.

Будь-яка величина може змінюватися двома способами: або приймати значення шкали дійсних чисел (наприклад, температура повітря), або тільки деякі з них (наприклад, кількість студентів групи може змінюватися тільки на ціле число). Перші величини називають неперервними, а другі ─ дискретними.

Озн. Якщо величина змінюється таким чином, що її значення можна визначити за її номером (від початку зміни), то таку змінну величину називають послідовністю.

Нехай задано послідовність $a_n = 2n + 3$. Якщо n=5, то $a_5 = 2 \cdot 5 + 3$.

Якщо дві змінних x та y, взяті зі шкали дійсних чисел, зв'язані між собою так, що кожному значенню x відповідає одне і тільки одне значення y, то між x та y існує функціональна залежність, яку позначають $y = f(x)$ або $f(x, y) = 0$.

Озн.: Функцією називають відповідність між елементами двох множин x та y, за якої кожному елементові першої множини x відповідає не більше одного елемента y другої множини.

Наприклад: $y = x^3$, $y = \dfrac{1}{x}$, $y = 4x + 2$.

Якщо функція записана у вигляді $y = f(x)$, то такий спосіб запису називається явним аналітичним, а якщо $f(x, y) = 0$, то неявним аналітичним. Прийнята також простіша форма назви: "функція задана явно", або "функція задана неявно". Від явної форми завдання завжди можна перейти до неявної форми. Тобто, якщо функція задана у вигляді $y = x^2 + 4$, то цей запис можна подати і у такому вигляді − $x^2 - y + 4 = 0$. Але перехід від неявної форми до явної можливий не завжди. Наприклад, якщо у вигляді $xy + 8\sin(x + y) = 4$, то y явно не виражається.

Для будь-якої функції існує область існування, або ще кажуть область допустимих значень, область визначення, область завдання. Під цією областю розуміють межі зміни величини x, як аргументу.

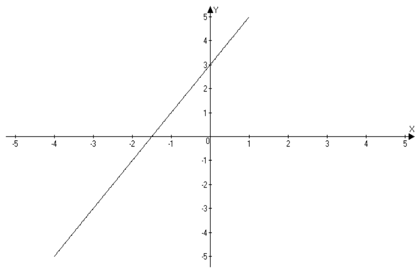
Озн. Множина всіх тих елементів з *X*, для яких є відповідні елементи множини *У*, називається областю визначення, а множина всіх тих елементів з *У*, що відповідають елементам з *X*, − областю значень даної функції.

Приклад: Для функції $y = x + 4$ область визначення – всі дійсні числа: $x \in R$. Область значень – це також множина всіх дійсних чисел: $y \in R$.

Для функції $y = \frac{4}{x}$ область визначення $x \in (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$, область значень $y \in (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$.

Озн. Графіком функції *f* називається множина точок (*x;y*) на координатній площині, таких, що перебігають всю множину D(*f*), а $y = f(x)$.

Приклад: Побудувати графік функції $y = 2x + 3$.



Функції бувають елементарні та неелементарні. До елементарних належать усі алгебраїчні функції, в яких виконуються тільки дії алгебраїчного додавання, множення, ділення, піднесення до сталого степеня та добування кореня, степеневі типу: $y = a^x$, логарифмічні, тригонометричні та обернені тригонометричні. Будь-яка скінчена комбінація цих функцій утворює елементарну функцію. За нескінченної кількості дій функція перестає бути елементарною. Приклад неелементарної функції: $y = \sin x + \sin 2x + ... + \sin kx + ...$.

Існує ряд функцій (інтегральні тощо), які не є елементарними і вивчаються в курсі вищої математики.

Функція $y = f(x)$ називається функцією ***однієї*** змінної, функція $z = f(x, y)$ − функцією двох змінних, а функція $w = f(x, y, z, t, ...)$ є функцією багатьох змінних.

Основними способами завдання функції є аналітичний, графічний і табличний спосіб.

За *аналітичного способу* завдання функції відповідність між аргументом і функцією задається формулою (аналітичним виразом), де зазначено, які дії потрібно виконати над значенням аргументу та сталими числами, щоб отримати відповідне значення функції.

За *графічного способу* завдання функції $y = f(x)$ відповідність між змінними *x* і *y* задається графіком – множиною точок *(x; y)* площини, координати яких задовольняють рівність $y = f(x)$. Залежно від того, яку задано функцію, графік її може складатись з однієї суцільної лінії, кількох ліній, дискретної множини точок площини тощо.

Графічним способом завдання функції широко користуються при дослідженнях, пов’язаних з використанням таких самописних приладів як барограф (для запису змін атмосферного тиску), осцилограф (для запису змін електричного струму або напруги), електрокардіограф (для запису електричних явищ, пов’язаних з діяльністю серця), термограф (для запису змін температури повітря) тощо. Криві (їх називають відповідно барограма, осцилограма, електрокардіограма, термограма), що їх виписують прилади, задають цілком певну функцію, властивості якої характеризують перебіг того чи іншого процесу.

Табличний спосіб завдання функції $y = f(x)$ полягає в тому, що відповідність між змінними x та y задається у вигляді таблиці.

Табличний спосіб досить часто використовується при проведенні експериментів, коли задають певну сукупність $x_1, x_2 \ldots, x_n$ значень аргументу і дослідним шляхом знаходять відповідні значення функції: $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Якщо функція задана аналітично, то для неї можна побудувати таблицю, тобто табулювати функцію. Табулюються, як правило, функції які виражаються складною формулою, але часто зустрічаються в практиці. Такими є, наприклад, таблиці логарифмів, тригонометричні таблиці тощо.

Крім розглянутих існують й інші способи завдання функції. Так, функцію можна задати словесним описом залежності між змінними.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Знайти значення функції у вказаних точках:

5.1. $y = \dfrac{1}{x^2 - x}$ у точках –1; 0,5; 2;

5.2. $y = \sqrt{5 - 2x}$ у точках 0; 1; 2,5;

5.3. $y = arcsin\dfrac{x}{4}$ у точках –2; 4; 2;

5.4. $y = sin\dfrac{x}{2}$ у точках $\dfrac{\pi}{3}$; $\dfrac{\pi}{2}$; π.

5.5. $y = \dfrac{1}{x} + \lg x$ у точках 0,1; 1; 10.

Знайти область визначення функції:

5.6. $y = \dfrac{1}{x^2 - x}$;

5.7. $y = \sqrt{5 - 2x}$;

5.8. $y = \dfrac{2x}{x^2 - 3x + 2}$;

5.9. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 4x}}$;

5.10. $y=\sqrt{x^2-4x+3}$;

5.11 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-3x+2}}$;

5.12. $y=arcsin\dfrac{x}{4}$;

5.13. $y=\dfrac{1}{\lg x}+\sqrt{2+x}$;

5.14. $y=\sqrt{3-x}+arcsin\dfrac{3-2x}{5}$;

5.15. $y=\sqrt{x-1}+\sqrt{1-x}+\sqrt{x^2+1}$;

5.16. $y=\dfrac{1}{4-x^2}+\lg\left(x^3-x\right)$;

5.17. $y=\sqrt{sinx}+\sqrt{16-x^2}$.

Користуючись графіком функції $y=x^2$, побудувати графіки функцій:

5.18. $y=2x^2+2x+2$;

5.19. $y=2x^2-2x+4$;

5.20. $y=-x^2+2x+8$;

5.21. $y=-x^2+4x+10$;

5.22. $y=x^2+x+1$;

5.23. $y=x^2-6x+8$.

Користуючись графіком функції $y=sinx$, побудувати графіки функцій:

5.24. $y=sin\dfrac{x}{2}$;

5.25. $y=2sin\dfrac{x}{2}$;

5.26. $y=1+2sin\dfrac{x}{2}$;

5.27. $y=\dfrac{1}{2}sinx$;

5.28. $y=-\dfrac{1}{2}sinx$;

5.29. $y=2-\dfrac{1}{2}sinx$.

Побудувати графіки функцій:

5.30. $y=\begin{cases}1-x, & x\in\left(-\infty;0\right]\\ 1, & x\in\left(0;\infty\right)\end{cases}$;

5.31. $y=\begin{cases}x^2, & x\in\left(-\infty;2\right]\\ 4, & x\in\left(2;\infty\right)\end{cases}$;

5.32. $y=\begin{cases}x^2+1, & x\in\left(-\infty;0\right]\\ x^2-1, & x\in\left(0;\infty\right)\end{cases}$.

Індивідуальне завдання

Знайти область визначення функції:

а) $y=\dfrac{5}{x^2-(n-1)\cdot x-n}$;

б) $y=\sqrt{x}+\sqrt{n^2-x^2}$;

в) $y=\dfrac{x}{\sqrt{n-x}}+\dfrac{1}{\sqrt{n+x}}$;

г) $y=\dfrac{1}{n-x}+\lg\left(x^2-x\right)$.

Побудувати графіки функцій:

а) $y=x^2+nx+n+1$;

б) $y=2cos(x-1)$.

де n – остання цифра номера студента за списком.

§2. Границя послідовності та функції

Нескінченно великі величини

Розглянемо послідовність $a_n = 2n$, де величина *n* приймає усі значення натуральних чисел. Будемо мати: 2; 4; 6; 8; 10; ... ; 100; ... ; 1000; .... . Дана послідовність з ростом номера її члена має тенденцію до необмеженого зростання.

Змінна величина, яка в процесі зміни необмежено зростає, називається нескінченно великою величиною. Коротко це позначається: ($2n \to \infty$). Таким чином, термін "нескінченно велика величина " означає не якесь стале велике число, а процес неухильного зростання змінної величини.

Для нескінченно великої величини замість $2n \to \infty$ пишуть: $\lim\limits_{n\to\infty} 2n = \infty$. Знак lim (читається "ліміт ") походить від латинського слова limes − границя).

Нескінченна величина n^k є нескінченно великою більш високого порядку порівняно з n^{k-1}. Так, n^2 в нескінченну кількість разів більша від *2n.* $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \infty^2 = \infty \cdot \infty^1$ (у виразі $6^2 = 6 \cdot 6^1$ маємо: $6^2 > 6^1$ у 6 разів).

Властивості нескінченно великих величин

1. Сума нескінченно великих величин є нескінченно великою величиною. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \infty$ і $\lim\limits_{n\to\infty} 2n = \infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2 + 2n) = \infty$.

2. Добуток нескінченно великої величини на число є нескінченно великою величиною. Тобто $\lim\limits_{n\to\infty}(K \cdot n^2) = \infty$.

3. Добуток нескінченно великих величин є нескінченно великою величиною більш високого порядку: $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2 \cdot 2n) = \lim\limits_{n\to\infty}(2n^3)$.

4. Різниця та відношення двох нескінченно великих величин є невизначеності, які схематично позначають $\infty - \infty$ і $\dfrac{\infty}{\infty}$. Але різниця між нескінченно великими величинами різних порядків є нескінченно великою величиною. Наприклад: $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2 - 2n) = \infty^2 - \infty = \infty$.

5. Нескінченно велика величина може бути як додатною так і від'ємною.

Нескінченно малі величини

Розглянемо послідовність $a_n = \dfrac{1}{n}$; одержимо: 1; $^1/_2$; $^1/_3$; $^1/_4$; ...; $^1/_{10}$; ...; $^1/_{100}$; ...; $^1/_{1000}$ ... . З ростом номера члени послідовності стають все меншими, поступово наближаючись до нуля, але ніколи його не досягають (за ділення на будь-яке велике число одержуємо мізерно мале число, але не нуль). Така змінна величина, яка в процесі зміни неухильно наближається до нуля, називається нескінченно малою величиною. Форма запису: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0$. Величина $\dfrac{1}{n^k}$ є нескінченно мала величина вищого порядку, ніж $\frac{1}{n^{k-1}}$. Так, величина $\frac{1}{n^2}$ наближається з ростом n до нуля набагато скоріше, ніж величина $\frac{1}{n}$.

Властивості нескінченно малих величин

1. Сума скінченого числа нескінченно малих величин є нескінченно малою величиною: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)=0$.

2. Добуток нескінченно малої величини на число є нескінченно малою величиною: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(5\cdot\frac{1}{n}\right)=0$.

3. Добуток нескінченно малих величин є нескінченно великою величиною більш високого порядку: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n^2}\right)=0$.

4. Відношення нескінченно малих величин є невизначеніcть, яку схематично позначають $\frac{0}{0}$.

Границя послідовності

Розглянемо послідовність $a_n=\frac{2n}{n+3}$. Її члени: $\frac{2}{4}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{6}{6}$; $\frac{8}{7}$; $\ldots$; $\frac{20}{13}$; $\ldots$; $\frac{200}{103}$; $\ldots$; $\frac{2000}{1003}$; $\ldots$. Відмітимо, що з ростом номера послідовності її значення поступово наближаються до числа 2. Різниця між значенням члена послідовності і числом 2 зменшується з ростом номера послідовності, наближаючись до нуля. Це означає, що змінна величина $2-\frac{2n}{n+3}$ є нескінченно малою величиною. Тому: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{n+3}=2$.

Взагалі, якщо послідовність a_n має границею число A, тобто $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$, то обов'язково $|a_n-A|\to 0$ при $n\to\infty$. Звідси маємо визначення границі послідовності:

Озн. Якщо для послідовності a_n існує таке число A, для якого різниця між ним та членом послідовності прямує до нуля за необмеженого зростання номера члена, то число A називається граничним значенням послідовності, або границею послідовності.

Для функції $y=f(x)$, заданої на інтервалі $[a;b]$ (рис. 5.1), виберемо точку $(x_0\in[a;b])$. Якщо $x\to x_0$, то точка *B* на графіку прямує до точки *A*. Функція має граничне значення $A=f(x_0)$, якщо при $x\to x_0$ величина $f(x)-A\to 0$, тобто: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) = A.$ Звідси видна простота обчислення границі: граничне значення аргументу підставити у функцію, що знаходиться під знаком границі.

Приклад: $\lim\limits_{x\to 3}(x^2+5) = 3^2+5 = 14$.

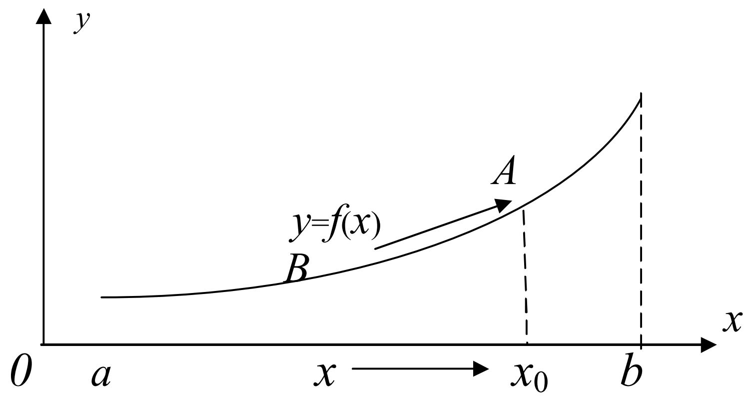


Рис. 6.1.

Властивості границь

1. Границя алгебраїчної суми функцій дорівнює сумі границь кожної з них:

$$\lim_{x\to x_0}(f_1(x) \pm f_2(x)) = \lim_{x\to x_0} f_1(x) \pm \lim_{x\to x_0} f_2(x).$$

2. Сталий множник можна винести за знак границі:

$$\lim_{x\to x_0} C\cdot f(x) = C\lim_{x\to x_0} f(x).$$

3. Границя добутку функцій дорівнює добутку границь кожної з них:

$$\lim_{x\to x_0}(f_1(x)\cdot f_2(x)) = \lim_{x\to x_0} f_1(x)\cdot \lim_{x\to x_0} f_2(x).$$

4. Границя відношення функцій дорівнює відношенню їх границь:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)}.$$

5. Знак границі можна внести під знак будь-якої дії (піднесення до степеня, логарифмування тощо):

$$\lim_{x\to x_0}\log_a f(x) = \log_a \lim_{x\to x_0} f(x).$$

6. Границя сталої величини є сама стала:

$$\lim_{x\to x_0} A = A.$$

7. Змінна величина може мати тільки одне значення границі:

$$\lim_{x\to 2}(x^2+5) = 2^2+5 = 9.$$

Теорема: (Теорема про “середнє”). Якщо дві змінних величини U і V ($U>V$) мають одну і ту ж границю A, то всяка інша змінна величина W, для якої відомо, що $W < U$ і $W > V$ (величина W знаходиться між U та V), також має границею A.

Це схематично можна зобразити так (див. рис. 6.2):

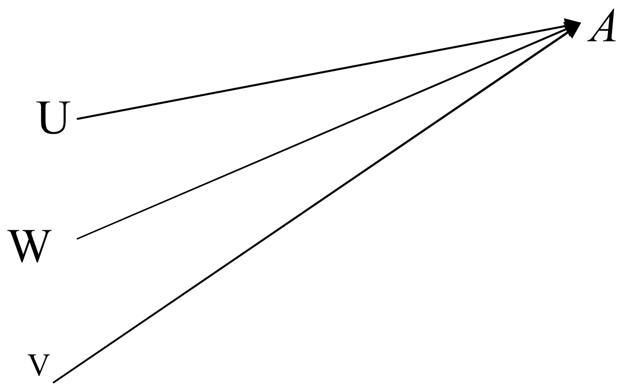


Рис. 6.2.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Знайти границю послідовності:

5.33. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(n+1)^2}{2n^2}$;

5.34. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{n^3-100n^2+1}{100n^2+15n}$;

5.35. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1000n^3+3n^2}{0{,}001n^4-100n^2+1}$;

5.36. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+2}$;

5.37. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{n!}{(n+1)!-n!}$;

5.38. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}$;

5.39. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}$;

5.40. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$.

Користуючись означенням границі послідовності, довести, що:

5.41. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{n-1}{2n+1}=\dfrac{1}{2}$;

5.42. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{n}{2n-1}=\dfrac{1}{2}$;

5.43. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5n}{2n+1}=\dfrac{5}{2}$;

5.44. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2^n-1}{2n+1}=1$;

5.45. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)=0$.

§3. Правила розкриття невизначеностей, утворених алгебраїчними виразами

Нагадаємо, що в теорії границь нуль – це мале число, а нескінченність – велике. Зауваження:

$$\frac{\textit{число}}{\textit{нескінченно мале число}}=\textit{нескінченно велике число}\text{, тобто } \frac{a}{0}=\infty;$$

$$\frac{\textit{число}}{\textit{нескінченно велике число}} = \textit{нескінченно мале число}, \text{ тобто } \frac{a}{\infty} = 0.$$

1. Невизначеність типу $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ від раціональних дробів.

Границі мають вигляд: $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{\infty}{\infty}$, де $R_n(x) = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \ldots A_0$, $Q_m(x) = B_m x^m + B_{m-1} x^{m-1} + \ldots. + B_0$.

Правило: для розкриття невизначеності необхідно чисельник і знаменник поділити на x^n, де $n-$ найбільше значення степеня.

<u>Приклад:</u> Обчислити границю $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x^2 + 5x + 6}{7x^2 + 9x + 4}$.

Розв'язання: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x^2 + 5x + 6}{7x^2 + 9x + 4} = \left[\frac{3 \cdot \infty^2 + 5 \cdot \infty + 6}{7 \cdot \infty^2 + 9 \cdot \infty + 4}\right] = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Найбільше значення степеня n=2, тому ділимо чисельник і знаменник на x^2:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{3x^2}{x^2} + \frac{5x}{x^2} + \frac{6}{x^2}}{\frac{7x^2}{x^2} + \frac{9x}{x^2} + \frac{4}{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{3 + \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}}{7 + \frac{9}{x} + \frac{4}{x^2}} = \left[\frac{3 + \frac{5}{\infty} + \frac{6}{\infty^2}}{7 + \frac{9}{\infty} + \frac{4}{\infty}}\right] = \frac{3 + 0 + 0}{7 + 0 + 0} = \frac{3}{7}.$$

Зауваження: коли проводимо підстановку числа під знак границі, то знак границі не пишемо:

<u>Приклад:</u> Обчислити границю $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x^3 - x + 8}{x^2 + 5x - 6}$.

Розв'язання: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x^3 - x + 8}{x^2 + 5x - 6} = \frac{3 \cdot \infty^3 - \infty + 8}{\infty^2 + 5 \cdot \infty - 6} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$;

Поділимо кожен член чисельника і знаменника на x^3:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3 - \frac{1}{x^2} + \frac{8}{x^3}}{\frac{1}{x} - \frac{5}{x^2} - \frac{6}{x}} = \frac{3 - \frac{1}{\infty^2} + \frac{8}{\infty}}{\frac{1}{\infty} - \frac{5}{\infty^2} - \frac{6}{\infty}} = \frac{3 - 0 + 0}{0 - 0 + 0} = \frac{3}{0} = \infty.$$

<u>Приклад:</u> Обчислити границю $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2 + 6x + 3}{x^3 + x + 9}$.

Розв'язання: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2 + 6x + 3}{x^3 + x + 9} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Поділимо кожен член чисельника і знаменника на x^3:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+6x+3}{x^3+x+9}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{6}{x^2}+\frac{3}{x^3}}{1+\frac{1}{x^2}+\frac{9}{x^3}}= =\frac{\frac{1}{\infty}+\frac{6}{\infty^2}+\frac{3}{\infty^3}}{1+\frac{1}{\infty^2}+\frac{9}{\infty^3}}=\frac{0+0+0}{1+0+0}=\frac{0}{1}=0.$$

Якщо проаналізувати наведені три приклади, то можна отримати висновок: якщо відношення раціональних алгебраїчних многочленів утворює невизначеність ∞/∞, то:

а) якщо найбільші степені многочленів однакові, то відношення прямує до відношення коефіцієнтів при x^n, де $n-$ найбільший степінь;

б) якщо степінь чисельника менший від степеня знаменника, то відношення прямує до нуля;

в) якщо степінь чисельника більший від степеня знаменника, то відношення прямує до безмежності.

2. Невизначеність типу $\left[\frac{0}{0}\right]$ від раціональних дробів $\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{0}{0}$.

Правило: для розкриття невизначеності необхідно розкласти чисельник та знаменник на множники і спільні з них скоротити.

Приклад: Обчислити границю $\lim_{x\to 1}\frac{3x^2+5x-8}{3x^2-5x+2}$.

Розв'язання: $\lim_{x\to 1}\frac{3x^2+5x-8}{3x^2-5x+2}=\frac{3\cdot 1^2+5\cdot 1-8}{3\cdot 1^2-5\cdot 1+2}=\frac{0}{0}$. Розкладаємо квадратичні вирази на множники за теоремою Вієта і отримуємо:

$$\lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)(x+\frac{8}{3})}{3(x-1)(x-\frac{2}{3})}=\lim_{x\to 1}\frac{3x+8}{3x-2}=\frac{3\cdot 1+8}{3\cdot 1-2}=\frac{11}{1}=11.$$

Можемо скоротити на $x-1$, тому що $x-1\to 0$, але нулю не дорівнює.

3. Невизначеність типу $\left[\frac{0}{0}\right]$ від ірраціональних дробів

Правило: позбавитись від ірраціональності множенням чисельника і знаменника на спряжені вирази. Спряженими будемо називати такі ірраціональні вирази, які при перемноженні утворюють раціональні вирази:

$(\sqrt{a}-\sqrt{b})$ і $(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ − спряжені, бо $(\sqrt{a}-\sqrt{b})\cdot(\sqrt{a}+\sqrt{b})=a-b$. Аналогічно $(\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b})\cdot(\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2})=a\pm b$.

Згадуємо, що $(u-v)\cdot(u+v)=u^2-v^2$ і $(u\pm v)\cdot(u^2\mp u\cdot v+v^2)$ тощо.

<u>Приклад:</u> Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{2x+2}}{\sqrt{5x-1}-\sqrt{3x+1}}$.

Розв'язання: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{2x+2}}{\sqrt{5x-1}-\sqrt{3x+1}}=\dfrac{\sqrt{4}-\sqrt{4}}{\sqrt{4}-\sqrt{4}}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$;

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{2x+2}}{\sqrt{5x-1}-\sqrt{3x+1}}\cdot\frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{2x+2}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{2x+2}}\cdot\frac{\sqrt{5x-1}+\sqrt{3x+1}}{\sqrt{5x-1}+\sqrt{3x+1}}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x+3}-\sqrt{2x+2})(\sqrt{x+3}+\sqrt{2x+2})}{(\sqrt{5x-1}-\sqrt{3x+1})(\sqrt{5x-1}+\sqrt{3x+1})}\cdot\frac{\sqrt{5x-1}+\sqrt{3x+1}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{2x+2}}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x+3-2x-2}{5x-1-3x-1}\cdot\frac{\sqrt{5x-1}+\sqrt{3x+1}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{2x+2}}=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{2x-2}\cdot\frac{\sqrt{5x-1}+\sqrt{3x+1}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{2x+2}}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-(x-1)}{2(x-1)}\cdot\frac{\sqrt{5x-1}+\sqrt{3x+1}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{2x+2}}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{5x-1}+\sqrt{3x+1}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{2x+2}}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{4}+\sqrt{4}}{\sqrt{4}+\sqrt{4}}=-\frac{1}{2}\ .$$

4. Невизначеність типу [∞ − ∞]

Правило: необхідно перевести цей тип невизначеності до типу $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ множенням на дріб зі спряжених виразів.

<u>Приклад:</u> обчислити границю $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{16x^2+10x+5}-4x)$.

Розв'язання: безпосередня підстановка дає невизначеність типу $\infty-\infty$:

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{16x^2+10x+5}-4x)=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{16x^2+10x+5}-4x)\cdot\frac{\sqrt{16x^2+10x+5}+4x}{\sqrt{16x^2+10x+5}+4x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{16x^2+10x+5-16x^2}{\sqrt{16x^2+10x+5}+4x}=\lim_{x\to\infty}\frac{10x+5}{\sqrt{16x^2+10x+5}+4x}=\frac{10\cdot\infty+5}{\sqrt{16\cdot\infty^2+10\cdot\infty+5}+4\cdot\infty}=$$

$$=\left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

За правилом обчислення таких невизначеностей поділимо кожен член чисельника і знаменника на x (увага: x^2 під коренем !):

$$\lim_{x\to\infty}\frac{10x+5}{\sqrt{16x^2+10x+5}+4x}=\lim_{x\to\infty}\frac{10+\frac{5}{x}}{\frac{\sqrt{16x^2+10x+5}}{x}+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{10+\frac{5}{x}}{\sqrt{\frac{16x^2+10x+5}{x^2}}+4}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{10+\frac{5}{x}}{\sqrt{16+\frac{10}{x}+\frac{5}{x^2}}+4}=\lim_{x\to\infty}=\frac{10+\frac{5}{\infty}}{\sqrt{16+\frac{10}{\infty}+\frac{5}{\infty^2}}+4}=\frac{10}{\sqrt{16}+4}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}\ .$$

5. Невизначеність типу $[0\cdot\infty]$

Правило: перевести цей тип до виду $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ або $\left[\frac{0}{0}\right]$, пам'ятаючи, що $a=\frac{1}{\frac{1}{a}}$.

Приклад: обчислити границю $\lim\limits_{x\to\infty}(5x+4)\cdot(\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^3})$.

Розв'язання: $\lim\limits_{x\to\infty}(5x+4)\cdot(\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^3})=(5\cdot\infty+4)\cdot(\frac{4}{\infty}+\frac{1}{\infty^2}+\frac{3}{\infty^3})=\infty\cdot 0$.

$$\lim_{x\to\infty}(5x+4)\cdot(\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^3})=\lim_{x\to\infty}\frac{5x+4}{\frac{1}{\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^3}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{5x+4}{\frac{1}{\frac{4x^2+x+3}{x^3}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{5x+4}{\frac{x^3}{4x^2+x+3}}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(5x+4)(4x^2+x+3)}{x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{20x^3+21x^2+19x+12}{x^3}=\frac{\infty}{\infty}=\frac{20}{1}=20\,.$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Обчислити наступні границі:

5.46. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-1}{x+1}$;

5.47. $\lim\limits_{x\to2}\left(\sqrt{x+2}-1\right)$;

5.48. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-4x+3}{x^2+x-2}$;

5.49. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-8}{x^2+x-6}$;

5.50. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3-x+8}{x^2+5x-6}$;

5.51. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+6x+3}{x^3+x+9}$;

5.52. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-8}{x^2+x-6}$;

5.53. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3-x+8}{x^2+5x-6}$;

5.54. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-1}{\sqrt{9x^2-6x}}$;

5.55. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-1}{\sqrt{x}-1}$;

5.56. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-1}{\sqrt{4x}-1}$;

5.57. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+3x+2}{2x^3-2}$;

5.58. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4+8x+22}{2x^3-2}$;

5.59. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+3x+4}{2x^2+3x-2}$;

5.60. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+6x+3}{5x^3+2x+1}$;

5.61. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^5-4x+3}{\sqrt{4x^{10}+4x^2}}$;

5.62. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^5-4x+3}{\sqrt{x^9+4x^2}}$;

5.63. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-7x}{\sqrt{x}-2x}$;

5.64. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-7x+9}{2x}$;

5.65. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^2-8}{3x^2+2x-6}$;

5.66. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^2-8}{3x^4+2x^2-6x}$;

5.67. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$;

5.68. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4}$;

5.69. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2+x-2}$;

5.70. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^4-1}$;

5.71. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{\sqrt{x}-2}$;

5.72. $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{9-x}{3-\sqrt{x}}$;

5.73. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4x+3}{x-1}$;

5.74. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+3x+2}{2x^2+3x-2}$;

5.75. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{\sqrt{x}-1}$;

5.76. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2+x-6}$;

5.77. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-5}{2-\sqrt{x-1}}$;

5.78. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{1-\sqrt{x^2+1}}$;

5.79. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+2}{\sqrt{x+6}-2}$;

5.80. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{x+3}}{x}$;

5.81. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x+2}-3}{7-x}$;

5.82. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}$;

5.83. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+16}-4}{x^2}$;

5.84. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-x)$;

5.85. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2-2})$;

5.86. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})$;

5.87. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^4+1}-\sqrt{4x^2-2})$;

5.88. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^3+3}-\sqrt{4x^2-x})$;

5.89. $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{4x^2-x})$.

Індивідуальне завдання

Обчислити наступні границі:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{nx^2-4x+5}{2x^2+(n-1)\cdot x-2}$;

б) $\lim\limits_{x\to n}\dfrac{x^2-2xn+n^2}{n^2-xn}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{n-x}-\sqrt{n+x}}$;

г) $\lim\limits_{x\to-\infty}(nx-\sqrt{x^2-4x})$;

де n – остання цифра номера студента за списком.

§ 4. Дві визначні та три необхідні границі

1. Перша визначна границя

Розглянемо $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$.

Відомо, що $\sin 0 = 0$, тому $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{0}{0}$ є невизначеністю. З рис. 6.3 маємо: $\sin\, x = \dfrac{BC}{R}$; $\angle x = \dfrac{AB}{R}$ (в радіанах); $tgx = \dfrac{AD}{R}$; в силу того, що $BC < \overset{\frown}{AB} < AD$, маємо: $\dfrac{BC}{R} < \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{R} < \dfrac{AD}{R} \Rightarrow \sin x < x < tgx \Rightarrow \sin\, x < x < \dfrac{\sin\, x}{\cos\, x} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{\sin x}{\sin x} < \dfrac{x}{\sin x} < \dfrac{1}{\cos x} \Rightarrow 1 > \dfrac{\sin x}{x} > \cos x$.

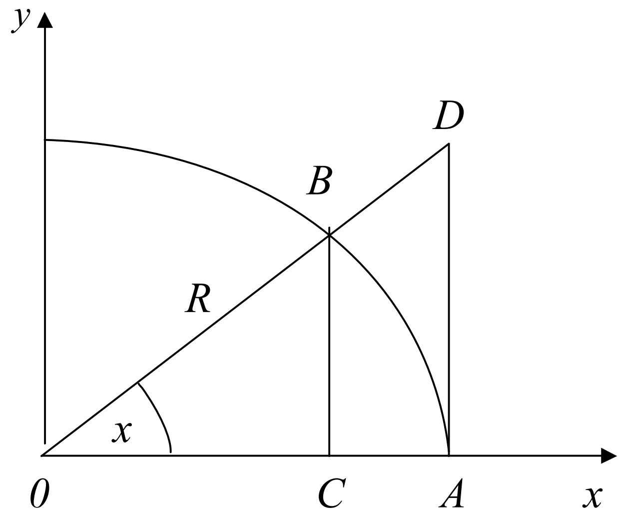


Рис. 6.3.

Якщо $x \to 0$, то $\lim\limits_{x\to 1}\cos x = 1$. У виразі $1 > \dfrac{\sin x}{x} > \cos x$ маємо: $1 > \cos x$, а $\dfrac{\sin x}{x}$ знаходиться між ними. Ліва і права частини подвійної нерівності прямують до 1 і згідно з теоремою “про середнє ” $\dfrac{\sin x}{x}$ має ту ж границю. Отже, перша визначна границя має вигляд:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\ x}{x} = 1\ . \qquad (6.1)$$

Ця границя має наступні інваріанти:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x} = 1;$ $\qquad\qquad$ $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot ctgx = 1;$

$$\lim_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}=1; \qquad \lim_{x\to 0} x\cdot arctgx=1.$$

Зауважимо, що кут виражено не в градусах, а в радіанах!

<u>Приклад:</u> обчислити границю $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{3x}$.

Розв'язання: введемо заміну $7x=y \Rightarrow y\to 0$ при $x\to 0$.

Маємо: $\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin y}{3\cdot\frac{y}{7}}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{7}{3}\cdot\frac{\sin y}{y}=\frac{7}{3}\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=\frac{7}{3}\cdot 1=\frac{7}{3}\cdot$

2. Друга визначна границя

Розглянемо $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$. Якщо давати n значення: 1, 2, 3, 4, … , то одержимо відповідно числа: 2; $\frac{9}{4}$; $\frac{64}{27}$, $\frac{625}{256}$;… або: 2; $2\frac{1}{4}$; $2\frac{10}{27}$; $2\frac{113}{256}$;… Значення величини границі зростає, але воно завжди буде менше числа 3. Дослідження цієї границі петербурзьким академіком Л. Ейлером показало, що дана границя існує, але вона менша від числа 3 і є числом ірраціональним. Ця границя позначається буквою "e". Отже, друга визначна границя має вигляд:

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e; \quad \text{де } e=2{,}718281...\approx 2{,}72. \tag{6.2}$$

Якщо позначити $n=\frac{1}{x}$, то границя приймає вигляд:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e. \tag{6.3}$$

Величина x може мати будь-який закон прямування до нуля. Існують показникова функція $y=e^{kx}$ та логарифмічна функція $y=\log_e x=\ln x$. Такий логарифм (ln) називається натуральним (логарифм Непера). Велика кількість природних явищ описується функціями з використанням числа e, що свідчить про надзвичайне значення цього числа.

Розглянемо границю:

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{an+b}=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{an}\cdot(1+\frac{1}{n})^b=\lim_{n\to\infty}\left[(1+\frac{1}{n})^n\right]^a\cdot\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^b.$$

Розглянемо кожну границю окремо:

$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^b=(1+\frac{1}{\infty})^b=(1+0)^b=1^b=1$ (b − число).

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^a=\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^a=e^a\ .$$

Отже, $$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{an+b}=e^a\ . \qquad (6.4)$$

Пряма підстановка дає: $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=(1+\frac{1}{\infty})^\infty=(1+0)^\infty=1^\infty$. Це невизначеність, яка має позначення $\left[1^\infty\right]$ і вказує на другу визначну границю.

<u>Приклад:</u> обчислити границю: $\lim\limits_{x\to 4}(25-6x)^{\frac{5}{x-4}}$.

Розв'язання: $\lim\limits_{x\to 4}(25-6x)^{\frac{5}{x-4}}=(25-24)^{\frac{5}{4-4}}=1^{\frac{5}{0}}=1^\infty$.

Отже, застосуємо другу визначну границю у вигляді (5.4):

Заміна: $25-6x=1+\frac{1}{n}\Rightarrow 24-6x=\frac{1}{n}\Rightarrow 6(4-x)=\frac{1}{n}$. Якщо, $x\to\infty$, то

$4-x\to 0$ і $6\cdot 0=0$, тобто $\frac{1}{n}\to 0$, що означає: $n\to\infty$.

Знайдемо $4-x$. $4-x=\frac{1}{6n}\Rightarrow\frac{1}{4-x}=6n\Rightarrow\frac{5}{4-x}=5\cdot 6n=30n$.

Підставляючи заміну, маємо: $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{30n}=e^{30}$.

3. Перша необхідна границя

Розглянемо $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$. Підставимо граничне значення величини x під знак границі: $\frac{\ln(1+0)}{0}=\frac{\ln 1}{0}=\left[\frac{0}{0}\right]$ − невизначеність. Зробимо перетворення: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\ln(1+x)=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1$.

Отже, перша необхідна границя має вигляд:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1\ . \qquad (6.5)$$

Це означає, що натуральний логарифм від числа, яке більше від одиниці на малу величину, наближено дорівнює цій малій величині.

<u>Приклад:</u> обчислити границю: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+7x)}{3x}$.

Розв'язання: Скористаємося заміною: $7x=y \Rightarrow x=\dfrac{1}{7}y$. Якщо $x\to 0$, то $7x\to 0 \Rightarrow y\to 0$. Вводимо заміну під знак границі і отримаємо:

$$\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{3\cdot\frac{y}{7}}=\lim_{y\to 0}\frac{7}{3}\frac{\ln(1+y)}{y}=\frac{7}{3}\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}=\frac{7}{3}\cdot 1=\frac{7}{3}.$$

4. Друга необхідна границя

Розглянемо $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$.

За безпосередньою підстановкою маємо: $\dfrac{a^0-1}{0}=\dfrac{1-1}{0}=\dfrac{0}{0}$ – невизначеність. При $x\to 0$ маємо: $a^x-1\to 0$. Якщо $a^x-1=y\to 0$, то $y=\ln(1+y)$, як показано вище. Проводимо заміну і отримуємо:

$$y=\ln(1+y)=\ln(1+a^x-1)=\ln a^x=x\ln a \Rightarrow a^x-1=x\ln a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln a}{x}=\lim_{x\to 0}\ln a=\ln a.$$

Отже, друга необхідна границя має вигляд:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a. \qquad (6.6)$$

<u>Приклад :</u> обчислити границю: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7^x-5^x}{x}$.

Розв'язання: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7^x-5^x}{x}=\dfrac{7^0-5^0}{0}=\dfrac{1-1}{0}=\dfrac{0}{0}$ – невизначеність.

Винесемо в чисельнику за дужки множник 5^x:

$$\lim_{x\to 0}\frac{7^x-5^x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{5^x\left(\left(\frac{7}{5}\right)^x-1\right)}{x}=\lim_{x\to 0}5^x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{7}{5}\right)^x-1}{x}=1\cdot\ln\frac{7}{5}=\ln 7-\ln 5.$$

5. Третя необхідна границя

Розглянемо $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^a-1}{x}=\dfrac{(1+0)^a-1}{0}=\dfrac{1^a-1}{0}=\dfrac{0}{0}$. Нехай $(1+x)^a-1=y$.

Якщо $x\to 0$, то $y\to 0$, звідки $y=\ln(1+y)\Rightarrow \ln(1+y)=\ln(1+(1+x)^a-1)=$

$=\ln(1+x)^a=a\ln(1+x)\ \Rightarrow (1+x)^a-1=a\ln(1+x)$.

Тоді $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^a-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\ln(1+x)}{x}=a\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=a\cdot 1=a$.

Маємо третю необхідну границю у вигляді:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{x}=a\,. \tag{6.7}$$

<u>Приклад:</u> обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+12x)^4-1}{5x}$.

Розв'язання: Пряма підстановка приводить до невизначеності $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Скористаємося заміною: $12x=y\Rightarrow x=\dfrac{y}{12}$. Якщо $x\to 0$, то $y\to 0$;

$$\lim_{y\to 0}\frac{(1+y)^4}{5\cdot\frac{y}{12}}=\lim_{y\to 0}\frac{12}{5}\cdot\frac{(1+y)^4-1}{y}=\frac{12}{5}\lim_{y\to 0}\frac{(1+y)^4-1}{y}=\frac{12}{5}\cdot 4=\frac{48}{5}.$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Обчислити наступні границі:

5.90. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{14x}{\sin 7x}$;

5.91. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctgx}{\arcsin 9x}$;

5.92. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg4x}{\arcsin 5x}$;

5.93. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin(x-\pi)}{x-180^0}$;

5.94. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{cos4x-cos2x}{x^2}$;

5.95. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{5x^2}$;

5.96. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{1}{5x}\right)^x$;

5.97. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x-3}{x+2}\right)^{2x}$;

5.98. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2+2}\right)^{3x^2}$;

5.99. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{4}{6x+5}\right)^{2x}$;

5.100. $\lim\limits_{x\to 0}(3x+3)^{\frac{5}{x}}$;

5.101. $\lim\limits_{x\to 0}(2x-10)^{\frac{5}{2x}}$

5.102. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{tg(2x-6)}{3x-9}$;

5.103. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-3}{5x+3}\right)^{6x-2}$;

5.104. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+5x)}{10x}$;

5.105. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{6x}$;

5.106. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin^2 x)}{tg^2 x}$;

5.107. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{9}{3x-1}\right)^{6-4x}$;

5.108. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_4(1+9x)}{5x}$;

5.109. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-2^x}{2x}$;

5.110. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^x-7^x}{x}$;

5.111. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\lg x}{6-6x}$;

5.112. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8^x-2^x}{x}$;

5.113. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+2x)^3-1}{4x}$;

5.114. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+15x)^4-1}{15x}$;

5.115. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{5^{3-x}-1}{2x-6}$;

5.116. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+3x)^7-1}{9x}$.

Індивідуальне завдання

Обчислити наступні границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctgnx}{\arcsin 2x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{nx}\right)^{2x-n}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+nx)}{(n+1)x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{n^x-(n+3)^x}{x}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+nx)^6-1}{5x}$;

де n – остання цифра номера студента за списком.

§5. Неперервність та розриви функцій

Важливе значення у математичному аналізі мають так звані неперервні функції. Вивчаючи основи аналітичної геометрії, ми мали справу з рівняннями прямої лінії. Стверджувалося, що вони існують на всій числовій осі, тобто що немає жодного значення x, яке не влаштовує рівняння прямої. Кожному значенню абсциси обов'язково відповідає якесь значення ординати.

Розглянемо рівняння трьох прямих, на які накладені обмеження. Нехай функція $y=f(x)$ задана таким чином, що на інтервалі $(-\infty;\, a)$ вона задається прямою $A_1x+B_1y+C=0$, на відрізку $[a;b]$ − прямою $A_2x+B_2y+C_2=0$, а на інтервалі $(b;+\infty)$ − прямою $A_3x+B_3y+C_3=0$.

<u>Приклад:</u> Дослідити на неперервність функцію і побудувати її графік:

$$y=\begin{cases} x+3, & x<1 \\ x-1, & x\in[1;2]. \\ 4x-7, & x>2 \end{cases}$$

Зайдемо границі справа та зліва в точках $x=1$ та $x=2$.

Для точки $x=1$: $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 1-0}(x+3)=4$, $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 1+0}(x-1)=0$. Лівостороння та правостороння границі мають різні значення ($4\neq 1$). Отже, функція має розрив у точці $x=1$.

Для точки $x=2$: $\lim\limits_{x\to 2+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 2+0}(4x-7)=1$; $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 2-0}(x-1)=1$.

Лівостороння та правостороння границі мають однакові значення ($1=1$). Отже, функція неперервна в точці $x=2$.

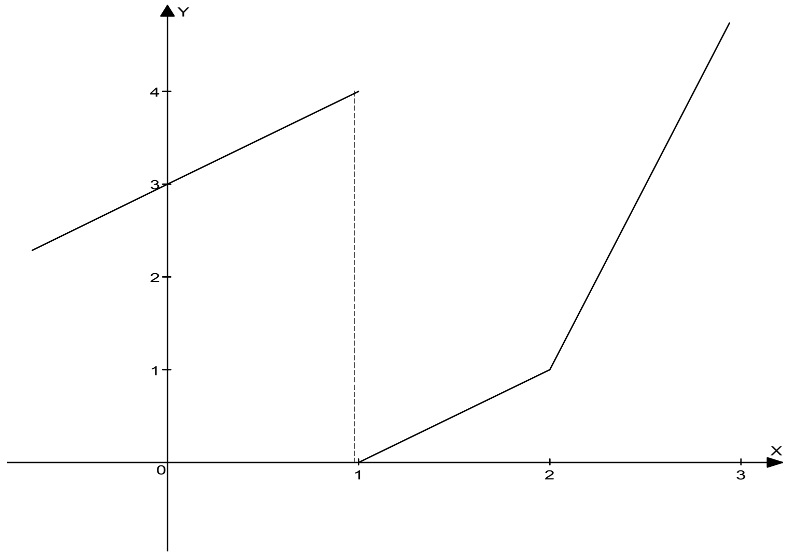


Рис. 6.4.

Можна стверджувати, що в точці $x=x_0$ функція буде неперервною, якщо:

1) сама функція існує у цій точці і має значення $f(x_0)$;

2) граничне значення функції $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ буде однаковим за наближення до x_0 справа та зліва;

3) граничне значення функції співпадає зі значенням функції в точці x_0, тобто $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Озн. Неперервною в точці x_0 називається функція, якщо границя справа $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x)$ дорівнює границі зліва $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)$ та значенню функції в цій точці.

Граничне наближення справа та зліва називається відповідно правостороннім та лівостороннім наближенням або правосторонньою та лівосторонньою границями. Відповідне математичне позначення:

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) \text{ та } \lim_{x \to x_0-0} f(x).$$

Під $x_0 + 0$ треба розуміти, що кожне значення x за наближення до x_0 буде дещо більше від x_0 (наближення справа); аналогічно розуміється $x_0 - 0$ як наближення зліва.

<u>Приклад:</u> Дослідити на неперервність функцію і побудувати її графік:

$$y = \frac{1}{3+x}, \text{ при } x \in R.$$

Оскільки $x \neq 3$, то знайдемо границі справа та зліва в точці розриву $x = 3$:

$$\lim_{x \to -3+0} f(x) = \lim_{x \to -3+0}\left(\frac{1}{3+x}\right) = \frac{1}{0} = \infty; \; \lim_{x \to -30} f(x) = \lim_{x \to -3+0}\left(\frac{1}{3+x}\right) = \frac{1}{-0} = -\infty.$$

Отже, маємо розрив.

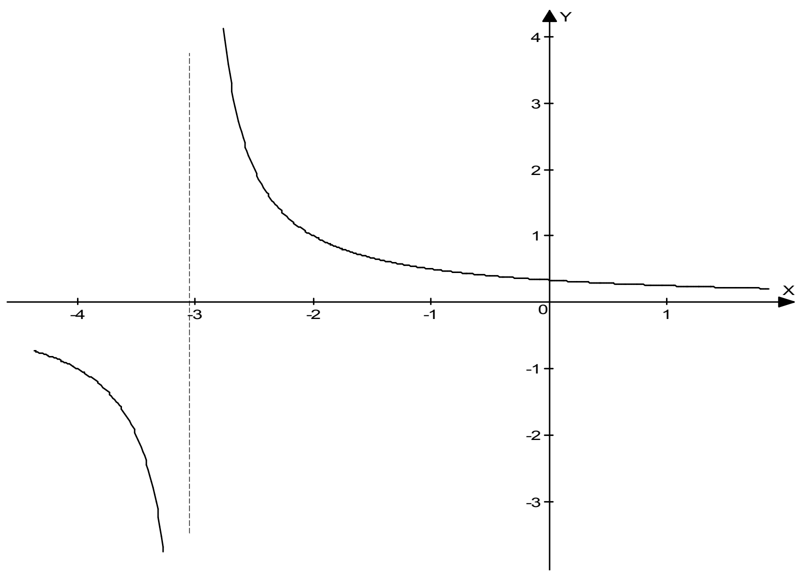


Рис. 6.5.

Властивості неперервних функцій

1. Якщо дві функції $f_1(x)$ та $f_2(x)$ неперервні на проміжку $(a;b)$, то їх алгебраїчна сума $f_1(x) \pm f_2(x)$ також буде неперервною функцією на цьому ж відрізку, тобто $f_3(x) = f_1(x) \pm f_2(x)$ − неперервна на $(a;b)$.

2. Множення неперервної функції на сталу не змінює її неперервності: якщо $f_1(x)$ неперервна на $(a;b)$, то $f_2(x) = C \cdot f_1(x)$ також неперервна на $(a;b)$.

3. Добуток неперервних на $(a;b)$ функцій є неперервною функцією на цьому ж інтервалі: $f_1(x) \cdot f_2(x) = f_3(x)$ − неперервна на $(a;b)$, якщо $f_1(x)$ та $f_2(x)$ − неперервні на $(a;b)$.

4. Відношення неперервних на $(a;b)$ функцій є неперервною функцією на $(a;b)$, якщо вона існує. $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = f_3(x)$ − неперервна на $(a;b)$, якщо $f_1(x)$ та $f_2(x)$ − неперервні на $(a;b)$ і якщо $f_2(x) \neq 0$.

5. Якщо $y = f_1(x)$ неперервна за умови $x = x_0$ і $z = f_2(y)$ неперервна за $y_0 = f_1(x_0)$, то складена функція $z = f_2(f_1(x))$ буде неперервною в точці $x = x_0$.

Приклад: якщо $y = \sin x$ неперервна за умови $x = 0$ і $z = \cos y$ неперервна в $y = \sin 0 = 0$, то і $z = \cos \sin x$ неперервна за умови $x = 0$.

Основні теореми про неперервність

1. Теорема Коші про проміжні значення

Якщо $y = f(x)$ задана на (a,b) і має на відрізку найбільше y_2 та найменше y_1 значення, то для будь-якого значення y_3 за умови $y_1 < y_3 < y_2$ завжди знайдеться точка c, для якої $y_3 = f(c)$.

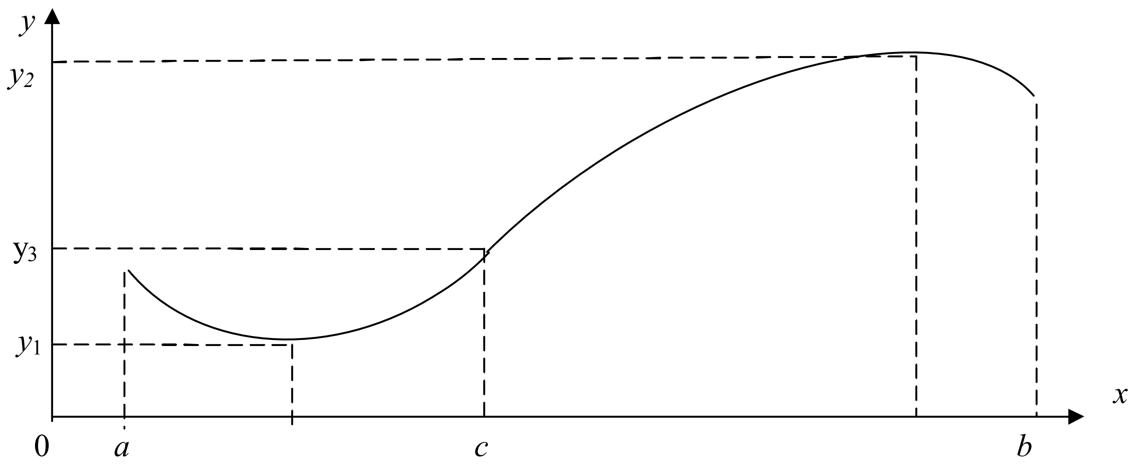


Рис. 5.6.

2. Теорема Больцано

Якщо $y = f(x)$ задана на $[a;b]$ і на кінцях відрізка приймає різні по знаку значення, то на $[a;b]$ завжди знайдеться хоч одна точка c для якої $f(c) = 0$.

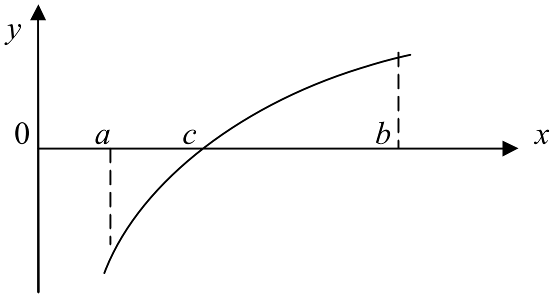


Рис. 5.7.

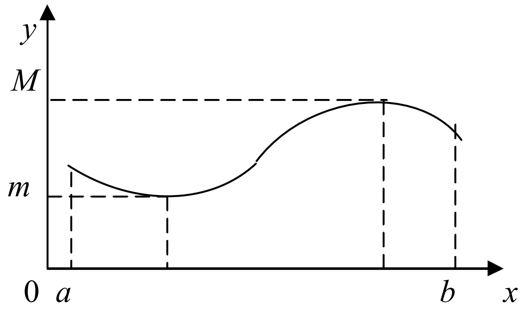


Рис. 5.8.

3. Теорема Вейєрштрасса про обмеження функцій

Якщо $y = f(x)$ визначена на $[a;b]$, то вона обмежена на цьому відрізку. Це означає, що існують такі числа *m* і *M*, що $m \le f(x) \le M$ при $x \in [a;b]$. Більше того, для такої функції на $[a;b]$ завжди існують точні значення верхньої та нижньої границі.

Неперервна функція може бути рівномірно неперервною. Якщо $x_2 - x_1$ обмежене деяким числом a і при цьому $f(x_2) - f(x_1)$ також обмежене деяким числом b, то функція неперервна рівномірно.

Розриви функцій

Функція $f(x)$ буде неперервною в точці, якщо $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$. Якщо ця умова порушена, то функція буде розривною в точці x_0.

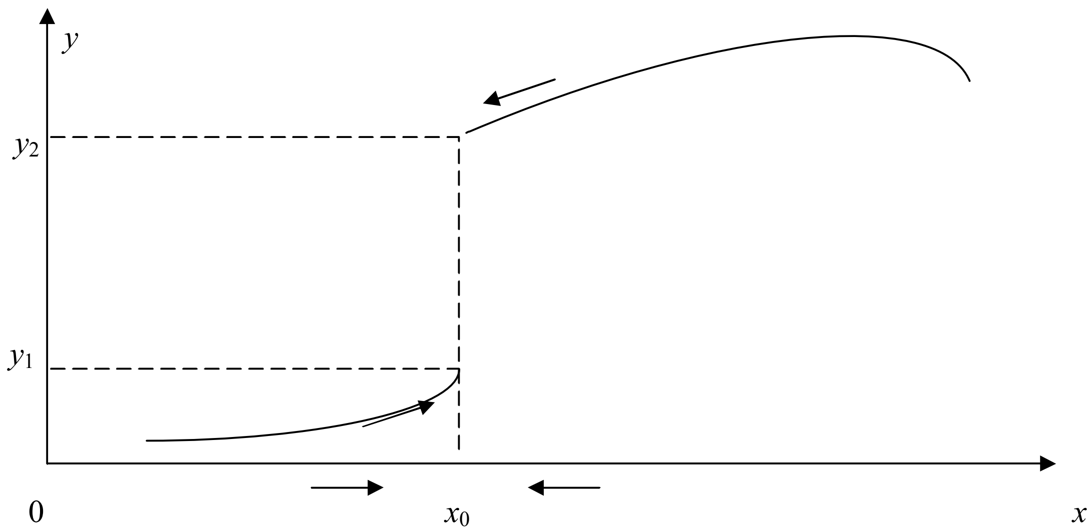


Рис. 5.9.

Якщо $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, тобто $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = y_1$ і $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = y_2$, то існує різниця $y_2 - y_1 = \Delta y \neq 0$. Маємо неусувний розрив першого роду.

Якщо $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) \neq f(x_0)$, або $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) \neq f(x_0)$, то маємо також неусувний розрив першого роду.

Якщо $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) \neq f(x_0)$ і $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) \neq f(x_0)$, але $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, то маємо усувний розрив першого роду. Для нього $\Delta y = y_2 - y_1 = 0$.

Якщо величина скачка функції не існує або безмежна, то розрив називається розривом II роду. Для таких розривів хоча б одна з границь $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ або $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ не є числом.

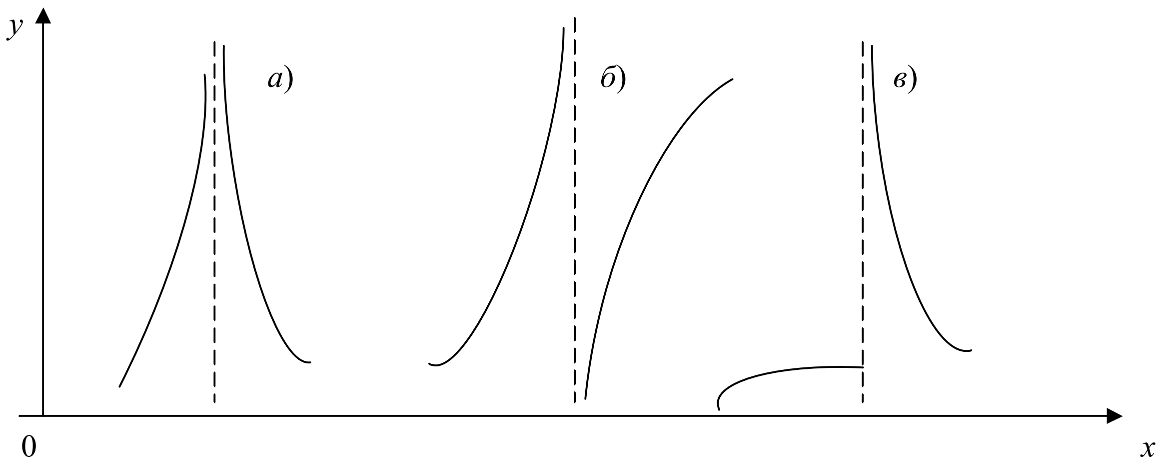


Рис. 5.10.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Дослідити на неперервність функції та побудувати їх графіки:

5.117. $f(x) = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ x^2, \quad x \in (0;1); \\ 1, x \ge 1 \end{cases}$

5.118. $f(x) = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ \frac{1}{2}x, \quad x \in (0;1); \\ 1, x \ge 1 \end{cases}$

5.119. $f(x) = \begin{cases} 0, x \le -1 \\ \frac{1}{4}(x+1)^2, x \in (-1;1); \\ 1, x \ge 1 \end{cases}$

5.120. $f(x) = \begin{cases} 0, x \le \frac{1}{2} \\ 2x-6, x \in \left(\frac{1}{2};1\right); \\ 1, x \ge 1 \end{cases}$

5.121. $f(x) = \begin{cases} 0, x \le 2 \\ x^2 - 4x + 4, x \in (2;3); \\ 1, x \ge 3 \end{cases}$

5.122. $f(x) = \begin{cases} 0, x \le 1 \\ 2(x-1), x \in (1;2); \\ 1, x \ge 2 \end{cases}$

5.123. $f(x)=\begin{cases}0, x\le\dfrac{1}{2}\\(2x-1)^2, x\in\left(\dfrac{1}{2};1\right);\\1, x\ge1\end{cases}$

5.124. $f(x)=\begin{cases}-2, x\le\dfrac{1}{2}\\4x-4, \ x\in\left(\dfrac{1}{2};1\right);\\1, x\ge1\end{cases}$

5.125. $y=x+\dfrac{1}{x-1}, при\, x\in[0;2]$;

5.126. $y=\dfrac{3x^2-x}{x}, при\, x\in R$;

5.127. $y=\dfrac{1}{1-x^2}, при\, x\in[-2;2]$;

5.128. $y=x-\dfrac{1}{x+1}, при\, x\in[-2;2]$;

5.129. $y=x^2-\dfrac{1}{x-1}, при\ x\in R$;

5.130. $y=x+\dfrac{1}{x+2}, при\ x\in R$;

5.131. $y=x+\dfrac{1}{x+4}, при\ x\in[-8;6]$;

5.132. $y=\dfrac{1}{9-x^2}, при\, x\in[0;10]$;

5.133. $y=\dfrac{x^2+x+1}{x-1}, при\, x\in[-1;3]$;

5.134. $y=\dfrac{x^2+2x+1}{x+1}, при\, x\in R$;

5.135. $y=\dfrac{1}{x^3+3x^2-4x}, при\, x\in R$;

5.136. $y=\dfrac{x^3-3x^2+3x-1}{x-1}, при\, x\in R$.

Індивідуальне завдання

Обчислити наступні границі:

а) $f(x)=\begin{cases}0, x\le-1\\n\cdot(x+1)^2, x\in(-1;0);\\n, x\ge0\end{cases}$

б) $y=\dfrac{1}{nx-x^2}, при\, x\in R$.

де n – номер студента за списком.

Запитання до розділу VI

1. Визначення змінної величини.
2. Визначення послідовності.
3. Визначення функції.
4. Типи функцій.
5. Визначення нескінченно малої величини.
6. Визначення нескінченно великої величини.
7. Властивості нескінченно великих величин.
8. Властивості нескінченно малих величин.
9. Визначення границі послідовності.
10. Визначення границі функції.
11. Властивості границь.
12. Суть теореми “про середнє”.
13. Типи невизначеностей.

14. Перша визначна границя та її інваріанти.

15. Друга визначна границя.

16. Що таке число e?

17. Перша необхідна границя.

18. Друга необхідна границя.

19. Третя необхідна границя.

20. Правила розкриття невизначеностей для алгебраїчних многочленів.

21. Яка функція називається неперервною?

22. Визначення неперервності через приріст.
23. Що таке лівостороння та правостороння границі?
24. Які властивості мають неперервні функції?
25. Основні теореми про неперервні функції.
26. Що таке розрив І роду?
27. Що таке розрив ІІ роду?
28. Що таке неусувний розрив?
29. Що таке усувний розрив?
30. Що таке приріст аргументу та функції?

VII. ОСНОВИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ

Вивчення змінної величини та поведінки її зміни призводить до питання про швидкість цієї зміни. Поняття швидкості необов'язково пов'язується з часом, як маємо при русі тіла за часом. Взагалі швидкість − це зміна однієї величини по відношенню до зміни іншої. Різноманітні способи зміни змінної величини привели не тільки до точного визначення швидкості, але й до створення єдиного методу для її обчислення. Розділ математики, який займається вивченням цього питання та висновками з його вивчення, називається ***диференціальним численням.***

У загальних рисах побудову диференціального числення було завершено у працях англійського фізика, астронома і математика І. Ньютона (1643–1727) та німецького філософа і математика Г. Лейбніца (1646–1716) до кінця XVII ст. Ньютон прийшов до поняття похідної, розглядаючи задачу про миттєву швидкість матеріальної точки, а Лейбніц під час розв'язування задачі про дотичну до кривої.

Строге обґрунтування диференціального числення на основі теорії границь дав на початку XIX століття французький математик О. Коші.

§1. Поняття похідної

Нехай задано неперервну функцію $y = f(x)$ на інтервалі $(a;b)$. Проведемо над функцією п'ять дій (рис. 7.1.):

1. Виберемо в інтервалі $(a;b)$ точку $x = x_0$ і знайдемо значення функції $y_0 = f(x_0)$.

2. Дамо аргументу x приріст Δx і одержимо нове значення $x = x_0 + \Delta x$. Визначимо нове значення функції $y = f(x_0 + \Delta x)$, яке буде відрізнятись від y_0 на величину приросту функції Δy. Тому $y = y_0 + \Delta y$.

3. Визначимо величину приросту функції: $\Delta y = y - y_0 = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

4. Визначимо відношення приросту функції до приросту аргументу $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. З ΔABC видно, що $\Delta y = |BC|$ і $\Delta x = |AC|$, тому пряма AB є січною до кривої $f(x)$, $\angle \alpha$ є кутом нахилу січної до осі: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{|BC|}{|AC|} = tg\alpha.$

5. Розглянемо, що буде з відношенням $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, якщо $\Delta x \to 0$. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ є даним граничним відношенням. В математиці це граничне відношення називається похідною функції.

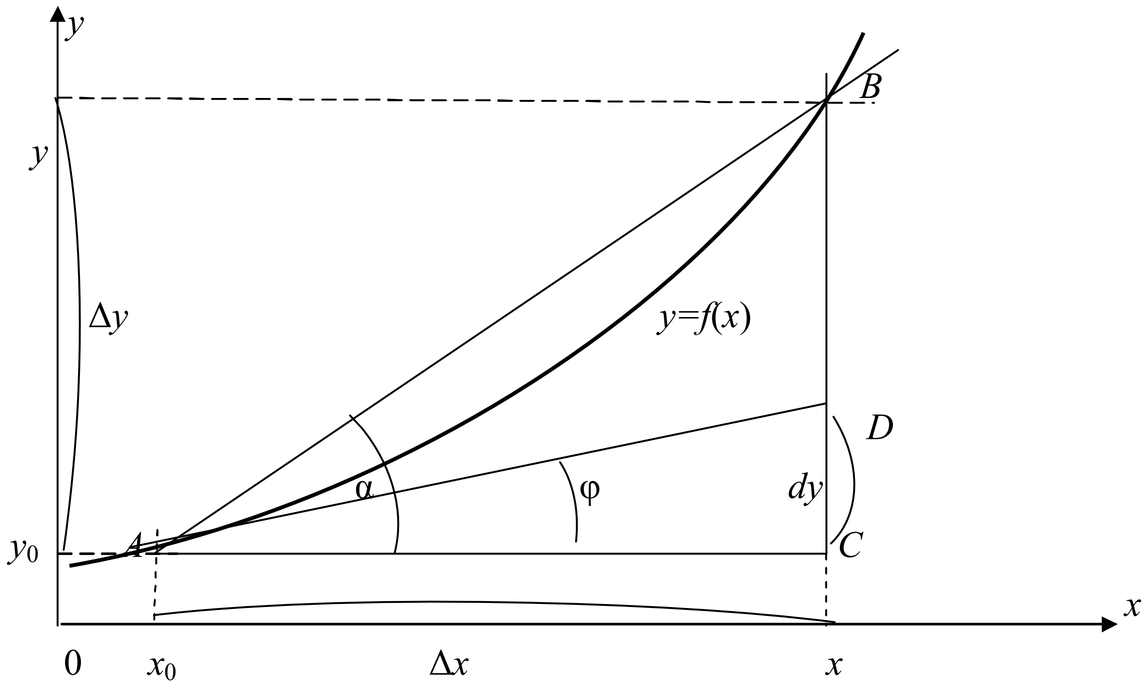


Рис. 7.1.

Озн. Похідною функції в точці x_0 називається граничне відношення приросту функції в точці x_0 до приросту аргументу в цій же точці, якщо останній прямує до нуля.

Дія знаходження похідної від функції називається диференціюванням функції.

Якщо $\Delta x \to 0$, то точка B по кривій наближається до точки A. При цьому величина січної як відрізка зменшується, і кут α також зменшується. В граничному переході ($B \to A$) січна перетвориться в дотичну, а кут нахилу січної – в кут φ нахилу дотичної. Таким чином: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = tg\varphi.$

Для похідної існує позначення y', тому:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' \tag{7.1}$$

Задачі про миттєву швидкість та дотичну до кривої дають механічний та геометричний зміст похідної.

Механічний зміст похідної: величина миттєвої швидкості в момент часу t_0 дорівнює значенню похідної від шляху у точці t_0. Тобто $v(t_0) = s'(t_0)$.

Геометричний зміст похідної: похідна $f'(x)$ функції $f(x)$ у точці x_0 є значенням кутового коефіцієнта дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0. Тобто $k = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y'$.

Рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці *$M_0(x_0;\ y_0)$* має вигляд: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

Якщо функція в точці $x = x_0$ має похідну, то при $\Delta x \to 0$ і $\Delta y \to 0$, тобто нескінченно малому приросту аргументу відповідає нескінченно малий приріст функції. Це означає, що функція неперервна в точці x_0. Отже, якщо функція в точці має похідну, то вона неперервна в ній. В зв'язку з подальшим постійним застосуванням вказаних на початку параграфу п'яти дій рекомендується досконало їх розглянути та запам'ятати.

Основні формули диференціювання

Запишемо основні правила та формули диференціювання:

функція	похідна
$y = c \cdot u$	$y' = c \cdot u'$
$y = u + v$	$y' = u' + v'$
$y = u \cdot v$	$y' = u' \cdot v + u \cdot v'$
$y = \dfrac{u}{v}$	$y' = \dfrac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$

№	функція	похідна	№	функція	похідна
1	$y = C(const)$	$y' = 0$	2	$y = x$	$y' = 1$
3	$y = x^n$	$y' = n \cdot x^{n-1}$	4	$y = \sqrt{x}$	$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
5	$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$	6	$y = e^x$	$y' = e^x$
7	$y = \log_a x$	$y' = \dfrac{1}{x \ln a}$	8	$y = \ln x$	$y' = \dfrac{1}{x}$
9	$y = \sin x$	$y' = \cos x$	10	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
11	$y = tgx$	$y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	12	$y = ctgx$	$y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
13	$y = \arcsin x$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	14	$y = arccosx$	$y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
15	$y = arctgx$	$y' = \dfrac{1}{1 + x^2}$	16	$y = arcctgx$	$y' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$

Приклад: Знайти похідні вказаних функцій:

а) $y = 4x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 7$; б) $y = \sqrt[7]{x^3} + \frac{4}{5x^{13}}$; в) $y = \cos x \cdot \log_9 x$;

г) $y = \frac{\arcsin x}{\ln x}$; д) $y = \sqrt{tg\left(x^3 - 4x\right)}$.

Розв'язання:

Для знаходження похідних функцій користуємося таблицею похідних:

а) $y = 4x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 7$.

$$y' = 4 \cdot 3 \cdot x^{3-1} - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x^{2-1} + 0 = 12x^2 - x;$$

б) $y = \sqrt[7]{x^3} + \frac{4}{5x^{13}}$.

Скористаємося властивостями степеня $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$, $\frac{1}{a^m} = a^{-m}$, отримаємо:

$$y = \sqrt[7]{x^3} + \frac{4}{5x^{13}} = x^{\frac{3}{7}} + \frac{4}{5}x^{-13}.$$

Тоді похідна функції

$$y' = \frac{3}{7} \cdot x^{\frac{3}{7}-1} + \frac{4}{5} \cdot (-13) \cdot x^{-13-1} = \frac{3}{7}x^{-\frac{4}{7}} - \frac{52}{5}x^{-14} = \frac{3}{7\sqrt[7]{x^4}} - \frac{52}{5x^{14}}.$$

в) $y = \cos x \cdot \log_9 x$.

Скористаємося формулою похідної добутку: $(uv)' = u'v + uv'$, тоді

$$y' = (\cos x)' \cdot \log_9 x + \cos x \cdot (\log_9 x)' = -\sin x \cdot \log_9 x + \cos x \cdot \frac{1}{x \ln 9}.$$

г) $y = \frac{\arcsin x}{\ln x}$.

Скористаємося формулою похідної частки: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, тоді

$$y = \frac{(\arcsin x)' \cdot \ln x - \arcsin x \cdot (\ln x)'}{\ln^2 x} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \ln x - \arcsin x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2 x}.$$

д) $y = \sqrt{tg\left(x^3 - 4x\right)}$. Враховуючи, що функція складена, то її похідна дорівнюватиме: $y' = \frac{1}{2\sqrt{tg\left(x^3 - 4x\right)}} \cdot \frac{1}{\cos^2\left(x^3 - 4x\right)} \cdot \left(3x^2 - 4\right)$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Знайти похідні вказаних функцій:

6.1. $y = 4x^5 - \frac{1}{2}x^2 + 2$;

6.2. $y = \frac{1}{4}x^8 - x^2 + \sqrt{x}$;

6.3. $y = 4x^3 - x^2 + x$;

6.4. $y = 4x^6 - x^7 + 3x$;

6.5. $y = x^2 - \frac{1}{5}x^5$;

6.6. $y = 2x^3 - \frac{1}{4}x^2 - 4$;

6.7. $y = 4x^2 - 7x + 2$;

6.8. $y = 2x^3 - x^2 + \frac{1}{x}$;

6.9. $y = 2x^7 - \frac{1}{6}x^6 - 2$;

6.10. $y = x^3 - \frac{1}{7}x^7$;

6.11. $y = \sqrt[4]{x^3} + \frac{2}{x^3}$;

6.12. $y = \sqrt[3]{x^5} + \frac{6}{x^3}$;

6.13. $y = \sqrt[6]{x^5} + \frac{3}{x^6}$;

6.14. $y = \sqrt[7]{x^6} + \frac{4}{x^7}$;

6.15. $y = \sqrt[6]{x^7} + \frac{2}{x^6}$;

6.16. $y = \sqrt[7]{x^8} + \frac{1}{3x^3}$;

6.17. $y = \sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{x^4}$;

6.18. $y = \sqrt[5]{x^3} + \frac{6}{x^7}$;

6.19. $y = \sqrt[8]{x^7} + \frac{9}{x^8}$;

6.20. $y = \sqrt[5]{x^6} + \frac{3}{x^5}$.

Знайти похідні функцій, користуючись формулою добутку:

6.21. $y = e^x \cdot \sin x$;

6.22. $y = e^x \cdot \sqrt[3]{x}$;

6.23. $y = cosx \cdot \ln x$;

6.24. $y = cosx \cdot \log_2 x$;

6.25. $y = x \cdot \log_7 x$;

6.26. $y = arccosx \cdot \log_5 x$;

6.27. $y = \sin x \cdot 3^x$;

6.28. $y = ctgx \cdot \sqrt{x}$;

6.29. $y = tgx \cdot \sqrt[3]{x}$;

6.30. $y = e^x \cdot \ln x$.

Знайти похідні функцій, користуючись формулою частки:

6.31. $y = \frac{\sqrt{x}}{tgx}$;

6.32. $y = \frac{x^6 - 25}{\sqrt{x}}$;

6.33. $y = \frac{arctgx}{x}$;

6.34. $y = \frac{tgx}{\sqrt{x}}$;

6.35. $y = \frac{x}{\ln x}$;

6.36. $y = \frac{x^2}{\sin x}$;

6.37. $y = \frac{e^x}{\cos x}$;

6.38. $y = \frac{e^x - 5}{\arccos x}$;

6.39. $y=\dfrac{5x}{\cos x}$; **6.40.** $y=\dfrac{4x^4-9x^2}{\sqrt{x}}$.

Знайти похідні складених функцій:

6.41. $y=5^{\arcsin 4x}$; **6.42.** $y=\sqrt{\ln 2^x}$;

6.43. $y=\sqrt{\cos x}$; **6.44.** $y=\sqrt{\sin x}$;

6.45. $y=\sqrt{e^{3x}}$; **6.46.** $y=\sqrt{x^2-x}$;

6.47. $y=\sqrt{4x^2-3}$; **6.48.** $y=\ln\sqrt{x}$;

6.49. $y=\ln\sqrt{e^x}$; **6.50.** $y=2^{\sin 4x}$.

6.51. $y=arctg^2 x$; **6.52.** $y=\ln^3 x$;

6.53. $y=\cos^4(2x+5)$; **6.54.** $y=\ln arctgx^5$;

6.55. $y=\sin^2\cos x$; **6.56.** $y=\sqrt{\sin\sqrt{x}}$;

6.57. $y=\dfrac{3}{\ln^6 2x}$; **6.58.** $y=\ln arctg\sqrt{x^2+4}$;

6.59. $y=\sqrt{\ln\arccos 2^x}$; **6.60.** $y=\sin\sqrt{\ln 8^x}$;

6.61. $y=\sqrt[5]{\log_{12}(6x+5)}$; **6.62.** $y=7^{arctg(\arcsin x-3)}$.

Знайти похідні вказаних функцій:

6.63. $y=\sqrt{\dfrac{x}{x+4}}$; **6.64.** $y=\sqrt{\dfrac{\ln^2 x-x}{4x}}$;

6.65. $y=\dfrac{4x^4-9x^2}{\sqrt{x^3-6x-9}}$; **6.66.** $y=\dfrac{9x^2-16}{\sqrt{x^3+x^2-2x+4}}$;

6.67. $y=\dfrac{(3x-2)^2(3x+2)}{\ln\sqrt{x-8}}$; **6.68.** $y=\dfrac{25x^4-16}{\sqrt{3x^2-8x+4}}$;

6.69. $y=\dfrac{16x^2-20x-15}{\sqrt[3]{x^3-4x}}$; **6.70.** $y=\dfrac{4x^6-25}{\sqrt{x^4+2x+5}}$.

Індивідуальне завдання

Знайти похідні вказаних функцій:

а) $y=2x^n-\dfrac{1}{n}x^{2n}-4n$; б) $y=\sqrt[n]{x^{n-1}}+\dfrac{6}{x^n}-nx$;

в) $y=ctg(nx-4)\cdot\sqrt{x^2+nx-n}$; г) $y=\dfrac{x^{2n}-(n-2)x}{\sin^n x}$.

де n – остання цифра номера студента за списком.

§2. Особливі випадки диференціювання

а) Похідна неявної функції.

Якщо функція задана неявно $f(xy)=a$, необхідно знайти похідну від лівої та правої частини, пам’ятаючи, що y є деякою функцією від x.

Приклад: Знайти похідну функції $\sin(x+y)+\ln(x-y)=4$.

Дана функція задана неявно, тому знаходимо похідну від лівої та правої частини, пам’ятаючи, що y є деякою функцією від x:

$$(\sin(x+y)+\ln(x-y))'=4'\Rightarrow$$

$$(\sin(x+y))'+(\ln(x-y))'=0\Rightarrow\ \cos(x+y)\cdot(1+y')+\frac{1-y'}{x-y}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\cos(x+y)+\frac{1}{x-y}+y'(\cos(x+y)-\frac{1}{x-y})=0\Rightarrow y'=-\frac{\cos(x+y)+\frac{1}{x-y}}{\cos(x+y)-\frac{1}{x-y}}.$$

б) Похідна функції, заданої параметрично.

Якщо функція задана параметрично, тобто у вигляді: $\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$, то похідна обчислюється за формулою: $y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}$.

Приклад: Знайти похідну функції $\begin{cases}x=\cos(t^2+1)\\ y=\sin(t^2+1)\end{cases}$.

Функція задана параметрично, тому похідна функції:

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{-\sin(t^2+1)\cdot 2t}{\cos(t^2+1)\cdot 2t}=-tg(t^2+1).$$

в) Похідна показникової функції.

Для знаходження похідної, що подана у вигляді $f(x)=u(x)^{v(x)}$ необхідно прологарифмувати функцію зліва та справа за основою e і перейти до знаходження похідної добутку.

Приклад: Знайти похідну функції $y=(x^3+3x^2+4)^{\sin 4x}$.

Функція задана у вигляді $f(x)=u(x)^{v(x)}$, тому прологарифмуємо функцію зліва та справа за основою e:

$\ln y=\ln(x^3+3x^2+4)^{\sin 4x}$, або $\ln y=\sin 4x\cdot\ln(x^3+3x^2+4)$;

Для знаходження похідної скористаємося формулою добутку:

$$y' \cdot \frac{1}{y} = 4\cos 4x \cdot \ln\left(x^3 + 3x^2 + 4\right) + \sin 4x \cdot \frac{1}{x^3 + 3x + 4} \cdot \left(3x^2 + 6x\right);$$

Тоді шукана похідна:

$$y' = 4\cos 4x \cdot \left(x^3 + 3x^2 + 4\right)^{\sin 4x} \cdot \ln\left(x^3 + 3x^2 + 4\right) + \sin 4x \cdot \frac{3x^2 + 6x}{x^3 + 3x + 4} \cdot$$
$$\left(x^3 + 3x^2 + 4\right)^{\sin 4x}.$$

г) Похідна логарифмічної функції.

Якщо функція подана у вигляді $\log_{\psi(x)} \varphi(x)$ необхідно перейти до нової основи логарифма (наприклад *e*), скориставшись формулою: $\log_a b = \dfrac{\ln b}{\ln a}$.

<u>Приклад:</u> Знайти похідну функції $y = \log_{\sin x}(1 + \sqrt{x})$.

Перейдемо до нової основи логарифма (наприклад *e*), скориставшись формулою: $\log_a b = \dfrac{\ln b}{\ln a}$, тоді

$$y = \log_{\sin x}(1 + \sqrt{x}) = \frac{\ln(1 + \sqrt{x})}{\ln \sin x} \Rightarrow y' = \frac{(\ln(1 + \sqrt{x}))' \cdot \ln \sin x - \ln(1 + \sqrt{x}) \cdot (\ln \sin x)'}{(\ln \sin x)^2} =$$

$$\frac{\dfrac{1}{1 + \sqrt{x}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln \sin x - \ln(1 + \sqrt{x}) \cdot \dfrac{1}{\sin x} \cdot \cos x}{\ln^2 \sin x} =$$

$$\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \sin x \ln \sin x - \cos x(1 + \sqrt{x}) \ln(1 + \sqrt{x})}{(1 + \sqrt{x}) \cdot \sin x \cdot \ln^2 \sin x}.$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Знайти похідні функцій, заданих неявно:

6.71. $y^2 x^2 + x = 3y$;

6.72. $x^2 + xy^3 + x = 3y$;

6.73. $e^y - xy = 4y^5$;

6.74. $\sin(x - y) + ctg(x + y) = 2x$;

6.75. $\ln(x^2 + xy) + x = 3y$;

6.76. $e^{xy} - xy = tg(4y)$;

6.77. $\arcsin(x - y) + arctg(x + y) = 2$;

6.78. $\sin \ln(x^2 + x) + xy = 3$;

6.79. $\dfrac{\cos(x^2 - y^3)}{tg(xy + \dfrac{x}{y})} = 12xy$;

6.80. $e^{xy} - xy + \ln(xy) = tg(xy)$.

Знайти похідні функцій, заданих параметрично:

6.81. $\begin{cases} x = t^2 + t \\ y = t^3 - 4 \end{cases}$;

6.82. $\begin{cases} x = 3t^2 + t - 4 \\ y = t^3 + 6t - 7 \end{cases}$;

6.83. $\begin{cases} x = \dfrac{1}{4}t^4 + \dfrac{1}{2}t^3 - 11 \\ y = t^2 - 9t - 3 \end{cases}$;

6.84. $\begin{cases} x = \ln\left(t^2 + 1\right) \\ y = \log_2\left(t^2 + 1\right) \end{cases}$;

6.85. $\begin{cases} x = \cos\left(t^2 + t\right) - \sin t \\ y = \sin\left(t + 1\right) + \cos 4t \end{cases}$;

6.86. $\begin{cases} x = e^t - 7\sin t \\ y = e^{-t} + \dfrac{1}{4}\cos 4t \end{cases}$.

Знайти похідні вказаних функцій:

6.87. $y = \left(1 + \cos x\right)^{x^2-4}$;

6.88. $y = \left(x^2 + 3x\right)^{x^2-4}$;

6.89. $y = \left(\sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{x^2-4}$;

6.90. $y = \left(e^{-x} + \cos 7x\right)^x$;

6.91. $y = \left(4 - \dfrac{4}{\sqrt{x}}\right)^{e^{3x}}$;

6.92. $y = \left(1 + \dfrac{1}{2}x^2\right)^{4x^{-1}}$;

6.93. $y = (x-4)^{x+4}$;

6.94. $y = (\log_x 7)^{tgx}$.

Знайти похідні логарифмічних функцій:

6.95. $y = \log_x\left(x^3 + x^2\right)$;

6.96. $y = \log_{\sin 4x}\left(x^3 + 3x^2 + 4\right)$;

6.97. $y = \log_{\sqrt{x+5x^2}}\left(3 + \dfrac{4}{\sqrt{x}}\right)$;

6.98. $y = \log_{\left(x-2x^2\right)}\left(x + \dfrac{1}{2}x^2\right)$;

6.99. $y = \log_{\sqrt{4x-3}}\left(\dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2\right)$;

6.100. $y = \log_{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

Індивідуальне завдання

Знайти похідні вказаних функцій:

а) $x^{2n} + \sqrt[n]{xy^2} + e^x = ny$;

б) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2n}t^n + \sqrt[n]{t} - 4t \\ y = t^3 + nt - \dfrac{1}{x^n} \end{cases}$;

в) $y = \left(x^{n-2} + nx\right)^{n^x-4}$;

г) $y = \log_{\sqrt[n]{x}} \dfrac{(n+2)x}{\sin x}$.

де n – остання цифра номера студента за списком.

§3. Диференціал функції та його застосування

За визначенням похідної $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y'$. Це означає, що з точки зору границь величина y'є граничним значенням величини $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, а тому $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} - y' \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Звідси випливає, що $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} - y'$ є нескінченно малою величиною α, тобто

$\frac{\Delta y}{\Delta x} - y' = \alpha \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha \Rightarrow \Delta y = y' \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$. В силу неперервності функції всі складові прямують до нуля, але величина $\alpha \cdot \Delta x$ є нескінченно малою більш високого порядку, ніж Δx та Δy ($\alpha \cdot \Delta x \to 0$ набагато швидше, ніж Δx та Δy).

В математиці величину $y' \cdot \Delta y$ називають ***диференціалом функції*** і позначають dy, тобто $dy = y' \cdot \Delta x$. Отже, диференціал функції є добутком похідної на приріст аргументу. З рис. 7.1 видно, що $\Delta x = AC$, а y' за визначенням є $tg\varphi$. Тому $dy = |AC| \cdot tg\varphi$. Але як відомо з прямокутного трикутника, $tg\varphi = \frac{|DC|}{|AC|}$, тому $dy = |AC| \cdot \frac{|DC|}{|AC|} = |DC|$. З рис. 7.1 бачимо, що $|DC|$ є приростом дотичної AD . Якщо x_0 зросте на Δx, то дотична зросте від значення в точці A до значення в точці D, тому DC є приростом дотичної.

Розглянемо функцію $y = x$. Для неї $y' = x' = 1$ і $\Delta y = \Delta x$, тому з формули $dy = y'\Delta x$ одержимо: $dx = 1 \cdot \Delta x$, тому $\Delta x = dx$ точно, а не наближено. В зв'язку з цим можемо у формулі $dy = y' \cdot \Delta x$ замінити Δx на dx. Одержимо $dy = y'dx$, звідки $y' = \frac{dy}{dx}$ є позначенням похідної за Лейбніцем або, як кажуть, у диференціальній формі. Дане позначення похідної необхідно запам'ятати.

<u>Приклад:</u> знайти диференціал функції $y = x^2 + 3x + 4$.

$y' = \frac{dy}{dx} = 2x + 3$. Тоді $dy = (2x + 3)dx$.

Для більшості функцій існують значення x, за яких обмеження самої функції викликає певні труднощі. Наприклад: $\sqrt{37}$, $\sin 32°$, $2^{1,73}$ тощо. Нехай x_0 – одне із значень, для якого $y_0 = f(x_0)$ обчислюється елементарно. Існує x_1 – значення, для якого $y_1 = f(x_1)$ знаходиться з великими труднощами. Величина x_1 відрізняється від x_0 на величину Δx; $x_1 = x_0 + \Delta x$. Тоді між y_0 та y_1 існує свій приріст Δy, тобто $y_1 = y_0 + \Delta y$. Якби ми знали значення Δy, то y_1 могли б знайти без проблем. З поняття диференціала відомо, що за малих значеннь Δx приріст функції Δy наближено дорівнює приросту дотичної dy, проведеної до $f(x)$ в точці x_0. Тому $y_1 = y_0 + \Delta y \approx y_0 + dy = y_0 + y' \cdot \Delta x$, де y' знаходиться як тангенс кута нахилу дотичної в точці x_0. Тому y' є конкретним значенням похідної в точці x_0. Маємо робочу формулу:

$$y_1 \approx y_0 + y' \cdot \Delta x, \tag{7.2}$$

точність якої збільшується зі зменшенням Δx.

Приклад: Знайти наближено значення функції:

а) $y=\sqrt[3]{5x^2+10x+5}$ при $x=4{,}03$.

б) $\sin 63^\circ$.

Розв'язання:

Значення функції обчислимо за формулою: $y\approx y(x_0)+y'(x_0)\cdot\Delta x$.

а) $y=\sqrt[3]{5x^2+10x+5}$ при $x=4{,}03$.

Нехай $x_0=4$, тоді $\Delta x=x-x_0=0{,}03$.

$$y(x_0)=\sqrt[3]{5\cdot 4^2+10\cdot 4+5}=\sqrt[3]{125}=5;$$

$$y'=\frac{10x+10}{3\sqrt[3]{(5x^2+10x+5)}};\ y'(4)=\frac{10\cdot 4+10}{3\sqrt[3]{(5\cdot 4^2+10\cdot 4+5)}}=\frac{50}{3\cdot 25}=\frac{2}{3};$$

$$y\approx y(x_0)+y'(x_0)\cdot\Delta x=5+\frac{2}{3}\cdot 0{,}03=5{,}01.$$

б) $\sin 63^\circ$.

Нехай $y=\sin x$, $x=63^\circ$, $x=60^\circ$, тоді $\Delta x=x-x_0=3^\circ=\frac{3\cdot 3{,}14}{180}=0{,}052$.

$$y(x_0)=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}=0{,}866;$$

$$y'(60^\circ)=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}=0{,}5;$$

Отже, $\sin 60^\circ\approx y(x_0)+y'(x_0)\cdot\Delta x=0{,}866+0{,}5\cdot 0{,}052=0{,}892$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Знайти наближено значення функцій:

6.101. $y=\sqrt[5]{4x^2-2x-1}$, $x=0{,}98$;

6.102. $y=\sqrt[3]{x^3-2x^2+3x+2}$, $x=1{,}99$;

6.103. $y=\frac{1}{\sqrt{2x^2+10x-8}}$, $x=1{,}04$;

6.104. $y=\frac{x}{\sqrt{x^2+9x-1}}$, $x=1{,}24$;

6.105. $y=\sqrt[3]{9x^2+8x+10}$, $x=1{,}12$;

6.106. $y=\sqrt{7x^3+12x^2+9x-3}$, $x=0{,}95$;

6.107. $\sqrt[3]{129}$;

6.108. $\sqrt{53}$;

6.109. $1{,}005^8$;

6.110. $\sqrt[5]{31}$;

6.111. $\sin 44^\circ$;

6.112. $tg 47^\circ$;

6.113. $ctg 85^\circ$;

6.114. $\sin 65^\circ$;

6.115. $\cos 29^\circ$;

6.116. $\cos 62^\circ$;

6.117. $4{,}03^5$;

6.118. $1{,}11^3$.

Індивідуальне завдання

Знайти наближено значення функцій:

а) $y=\sqrt[n]{5x^2-3x-1}$, $x=1-0{,}001\cdot n$; б) $\sin\left(n^\circ\right)$ та $\cos(30+n)^\circ$.

де n – остання цифра номера студента за списком.

§4. Похідні та диференціали вищих порядків

Як показує таблиця похідних елементарних функцій, похідна $y'=f'(x)$ – також є функцією, від якої можливо знайти похідну. Така похідна від похідної $(y')'=(f'(x))'$ називається похідною другого порядку або другою похідною і позначається y''.

Наприклад: якщо $y=\sin x$, то $y'=\cos x$, а $y''=-\sin x$. Похідна від другої похідної є третьою похідною або похідною третього порядку y''' і т. д. Для похідної, починаючи з четвертої, введено позначення $y^{(4)}$, $y^{(5)}$ і т. д. Похідна n-го порядку позначається $y^{(n)}$. Відповідно до похідних існують і диференціали другого, третього і т.д. порядків, які мають позначення d^2y, d^3y,$\ldots d^ny$. В диференціальній формі похідні записуються:

$$y''=\frac{d}{dx}\left(y'\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d^2y}{(dx)^2}=\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Вираз dx^2 не є диференціалом від x^2, а означає $(dx)^2$, оскільки dx є єдиним значком, який означає поняття диференціал. Наприклад, вираз $(a)^2=a^2$. До речі, диференціал від x^2 має вигляд: $d(x^2)=2xdx$. Похідна третього порядку: $y'''=\dfrac{d^3y}{dx^3}$, похідна n-го порядку: $y^{(n)}=\dfrac{d^ny}{dx^n}$, тому $d^2y=y''dx^2$, $d^3y=y'''dx^3$, $d^ny=y^{(n)}dx^n$.

<u>Приклад:</u> знайти $y^{(5)}$,та d^5y функції $y=tgx$. Маємо:

$$y'=1+tg^2x\Rightarrow y''=(1+tg^2x)'=2tgx\cdot tg'(x)=2tgx(1+tg^2x)=2tgx+2tg^3x\Rightarrow$$

$$y''=2(1+tg^2x)+2\cdot 3tg^2x\cdot tg'x=2(1+tg^2x)+6tg^2x\cdot(1+tg^2x)=$$

$$y'''=2(1+tg^2x)(1+3tg^2x)=2+2tg^2x+6tg^2x=2+8tg^2x+6tg^4x$$

$$d^3y=\left(2+8tg^2x+6tg^4x\right)dx^3.$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Знайти похідні двадцятого порядку:

6.119. $y=\sin x$;

6.120. $y=\cos x$;

6.121. $y=e^{2x}$;

6.122. $y=\ln x$;

6.123. $y = 5^x$; **6.124.** $y = \sin 10x$;

6.125. $y = \cos 3x$; **6.126.** $y = \ln 7x$.

Знайти диференціали четвертого порядку:

6.127. $y = tg 2x$; **6.128.** $y = ctg 3x$;

6.129. $y = e^{7x}$; **6.130.** $y = \ln^4 x$;

6.131. $y = \sqrt{x}$; **6.132.** $y = \dfrac{1}{x}$;

6.133. $y = x^5$; **6.134.** $y = arctgx$.

Індивідуальне завдання

Знайти похідні третього порядку для вказаних функцій:

а) $y = 2x^n - \dfrac{1}{n}x^{2n} - 4n$; б) $y = \sqrt[n]{x^{n-1}} + \dfrac{6}{x^n} - nx$;

де n – остання цифра номера студента за списком.

§ 5. Розкриття невизначеностей за допомогою похідних (правило Лопіталя)

Нехай на $[a;b]$ задані дві гладенькі функції $y_1 = f_1(x)$ та $y_2 = f_2(x)$, які дорівнюють нулю в точці $x = c$ (їх відношення − невизначеність виду $\dfrac{0}{0}$). Якщо існує граничне відношення похідних цих функцій $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f_1'(x)}{f_2'(x)} = A$, то до цього ж граничного значення прямує і відношення самих функцій, тобто:

$$\lim_{x \to c} \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)}.$$

Доведення:

Розглянемо відношення функцій $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$. Оскільки $f_1(c) = f_2(c) = 0$, то це відношення можемо записати:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{f_1(x) - 0}{f_2(x) - 0} = \frac{f_1(x) - f_1(c)}{f_2(x) - f_2(c)}.$$

Виберемо інтервал $[c;x]$ (рис. 7.2) всередині інтервалу $[a;b]$. Отже , на $[c;x]$ обидві функції гладенькі.

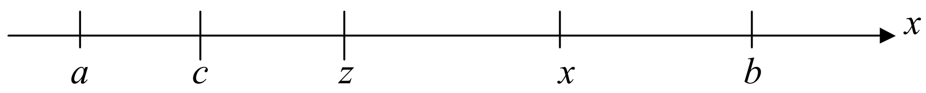


Рис. 7.2.

Згідно з теоремою Коші на цьому інтервалі існує хоч одна така точка Z, для якої справедливо: $\dfrac{f_1(x)-f_1(c)}{f_2(x)-f_2(c)}=\dfrac{f_1'(z)}{f_2'(z)}$.

Звернемо увагу на те, що Z обов'язково знаходиться всередині $[c;x]$. Нехай $x\to c$ (точка C закріплена). Тоді і точка Z прямуватиме до точки C за вищезазначеної умови. Отже, $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f_1(x)-f_1(c)}{f_2'(x)-f_2(c)}=\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f_1'(x)}{f_2'(x)}$.

Якщо в цьому рівнянні права границя існує і дорівнює A, тобто $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f_1'(x)}{f_2'(x)}=A$, то до цього ж значення прямує й ліва границя, тобто $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f_1(x)-f_1(c)}{f_2(x)-f_2(c)}=\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f_1'(x)}{f_2'(x)}=A$.

Остаточно: якщо $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}=\dfrac{0}{0}$ і $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f_1'(x)}{f_2'(x)}=A$, то $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}=\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f_1'(x)}{f_2'(x)}$.

Розглянемо випадок $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}=\dfrac{\infty}{\infty}$. Невизначеність виду $\dfrac{0}{0}$ легко призвести до невизначеності виду $\dfrac{\infty}{\infty}$:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{\dfrac{1}{f_2(x)}}{\dfrac{1}{f_1(x)}}\Rightarrow\lim_{x\to c}\frac{\dfrac{1}{f_2(x)}}{\dfrac{1}{f_1(x)}}=\frac{\dfrac{1}{\infty}}{\dfrac{1}{\infty}}=\frac{0}{0}.$$

В зв'язку з цим правило Лопіталя можемо використовувати для розкриття невизначеності типу $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Розглянемо декілька прикладів.

<u>Приклад:</u> Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\frac{1}{1}=1.$$

<u>Приклад:</u> Обчислити $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+4x-13}{5x^2+8x+9}$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+4x-13}{5x^2+8x+9}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(3x^2+4x-13)'}{(5x^2+8x+9)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x+4}{10x+8}=\lim_{x\to\infty}\frac{(6x+4)'}{(10x+8)'}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{6}{10}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}.$$

Правило Лопіталя можна застосовувати до невизначеностей виду: $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, $1^\infty, \infty^0, 0^0$, перевівши їх відповідними діями до невизначеностей виду $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$. Розглянемо це на прикладах:

<u>Приклад:</u> Обчислити наступні границі:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot e^{-2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\sin x^{\sin x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{2}{x}}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^x$.

Розв'язання:

а) $$\lim_{x\to\infty} x\cdot e^{-2x}=\infty\cdot 0=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{2x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(x)'}{(e^{2x})'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2\cdot e^{2x}}=\frac{1}{2\cdot e^{\infty}}=\frac{1}{\infty}=0.$$

б) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x-x)'}{(x\sin x)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin x-x\cos x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)'}{(\sin x-x\cos x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{\cos x-\cos x+x\sin x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{x}=-\frac{1}{\infty}=0.$$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\sin x^{\sin x}=\left[0^0\right]=$ [використовуємо формулу $u^v=e^{v\ln u}$] $=\lim\limits_{x\to 0}e^{\sin x\ln\sin x}=$

$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\sin x\cdot\ln\sin x}$. $$\lim_{x\to 0}\sin x\cdot\ln\sin x=\left[0\cdot(-\infty)\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin x}{\frac{1}{\sin x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln\sin x)'}{(\frac{1}{\sin x})'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}}=-\lim_{x\to 0}\sin x=0.$$

Тоді $e^{\lim\limits_{x\to 0}\sin x}=e^0=1$.

г) $$\lim_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{2}{x}}=(1^\infty)=\lim_{x\to 0}e^{\frac{2}{x}\ln(1-3x)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{x}\ln(1-3x)};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2}{x}\ln(1-3x)=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(2\ln(1-3x))'}{(x)'}=2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1-3x}\cdot(-3)}{1}=-6\lim_{x\to 0}\frac{1}{1-3x}=-6.$$

Тоді $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{2}{x}} = e^{-6}$.

д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{x} = (\infty^0) = \lim\limits_{x\to 0} e^{x\ln\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0} x\ln\frac{1}{x}}$.

$$\lim_{x\to 0} x\ln\frac{1}{x} = (0\cdot\infty) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to 0}\frac{(\ln\frac{1}{x})'}{(\frac{1}{x})'} = \lim_{x\to 0}\frac{(-\ln x)'}{(\frac{1}{x})'} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} x = 0.$$

Тоді $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{x} = \lim\limits_{x\to 0} e^{x\ln\frac{1}{x}} = e^0 = 1$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Знайти границі за правилом Лопіталя:

6.135. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+5x-8}{6x^4+8x^2+9x-3}$;

6.136. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x^2+x-4}{x^3-x^2-7x+6}$;

6.137. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4+x^3-24}{3x^2+2x-16}$;

6.138. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$;

6.139. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{2x^2}-\dfrac{1}{2xtgx}\right)$;

6.140. $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)\ln(x-2)$;

6.141. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{tg\,2x}$;

6.142. $\lim\limits_{x\to 2}\left(x-1^{\frac{1}{x-2}}\right)$.

Запитання до розділу VII:

1. Математичне визначення похідної.
2. Геометричне визначення похідної.
3. Механічне визначення похідної.
4. Яка дія називається диференціюванням?
5. Похідна від суми, добутку та частки.
6. Похідні елементарних функцій.
7. Похідна складеної функції.
8. Похідна неявної функції.
9. Математичне визначення диференціала.
10. Геометричне визначення диференціала.
11. Зв’язок між похідною та диференціалом.
12. Застосування диференціала до наближених обчислень.
13. Похідні вищих порядків.
14. Диференціали вищих порядків.
15. Правило Лопіталя.
16. Які обмеження накладаються на застосування правила Лопіталя.

VIII. ДОСЛІДЖЕННЯ ПОВЕДІНКИ ФУНКЦІЇ

§1. Основні поняття

Нехай задано функцію *f(x)* неперервну на інтервалі $(a;b)$. Нехай *f(x)* така, що в кожній точці її можливо провести дотичну. Це означає (див. геометричний зміст похідної), що функція має неперервну похідну на $(a;b)$.

Озн. Функцію називають гладенькою, якщо вона має неперервну похідну на заданому проміжку.

Типовий вигляд гладенької функції показано на рис. 8.1, з якого видно, що до будь-якої точки кривої існує дотична.

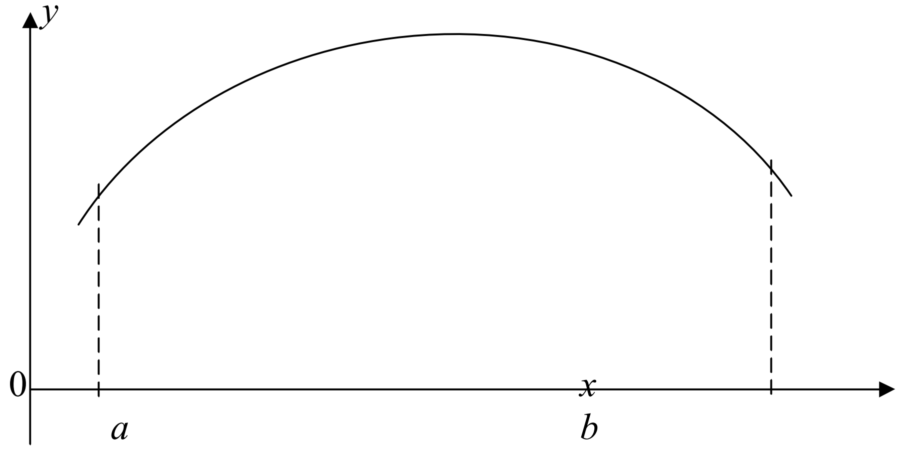


Рис. 8.1.

Типовий вигляд заданої на $(a;b)$ неперервної функції, що не буде гладенькою, зображено на рис. 8.2. В точках c і d не можемо провести дотичну однозначно; похідна в цих точках не існує.

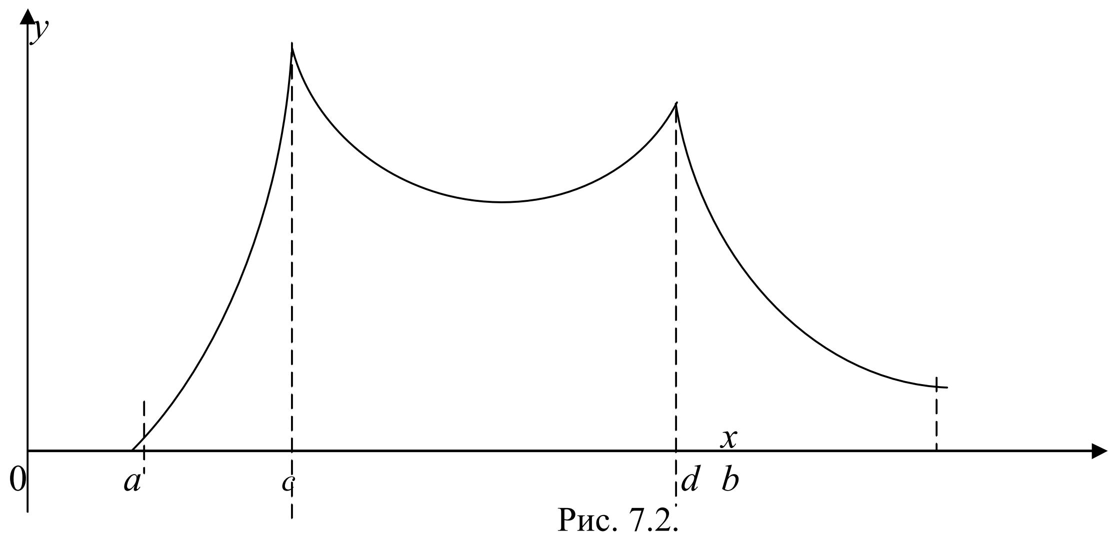


Рис. 7.2.

Озн. Асимптотою називають пряму, до якої наближається задана функція так, що відстань між ними прямує до нуля.

Пряма $y = b$ є горизонтальною асимптотою, пряма $x = a$ − вертикальною асимптотою, а пряма $y = kx + b$ − похилою асимптотою. В точці $x = c$ функція зазнає розриву другого роду (рис. 8.3).

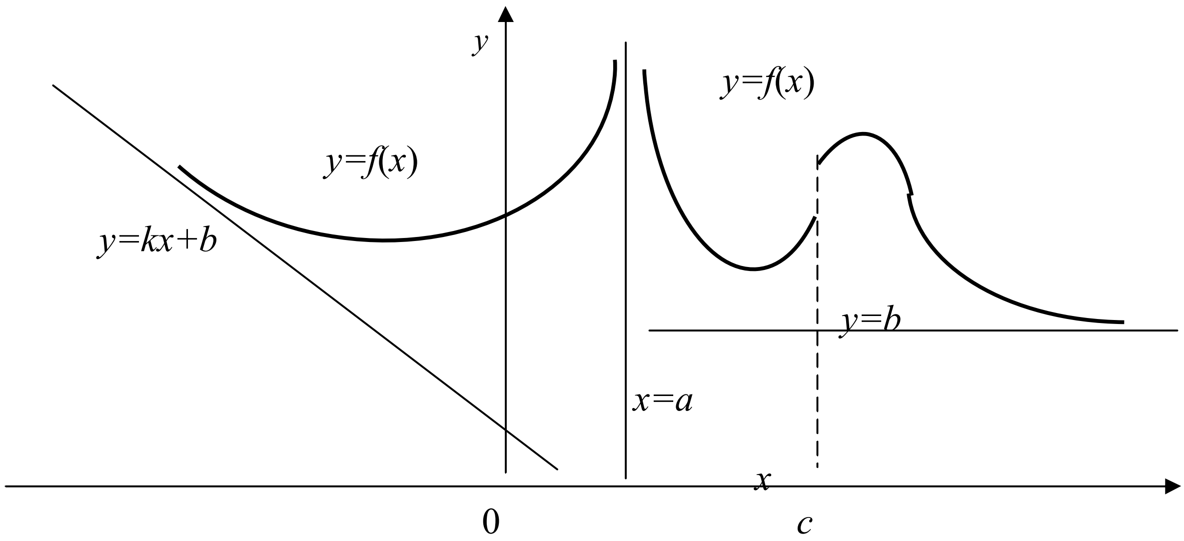


Рис. 8.3.

На ділянках зростання функцій дотична завжди нахилена до осі Ox під гострим кутом α (рис. 7.4), тому на таких ділянках похідна завжди додатна. На ділянках спадання кут нахилу β дотичної тупий, тому похідна завжди від'ємна.

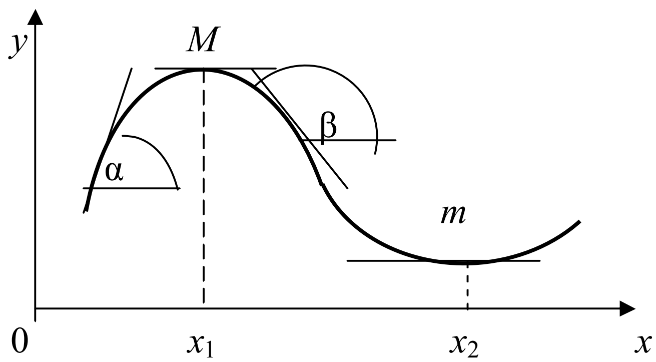


Рис. 8.4.

Точки, в яких функція змінює характер поведінки, називаються точками екстремуму. Згідно з принципом Ферма похідна гладенької функції в точці екстремуму завжди дорівнює 0.

На рис. 8.4 видно, що в точках x_1 та x_2 є екстремумом, оскільки дотична паралельна осі Ox, тому кут нахилу дорівнює нулю, а $y' = tg0^{\circ} = 0$. При цьому точка x_1 переходу від зростання до спадання є точкою максимуму, а точка x_2 переходу функції від спадання до зростання − точкою мінімуму. Точки максимуму і мінімуму не обов'язково співпадають з найбільшим та найменшим значеннями функції (рис. 8.5).

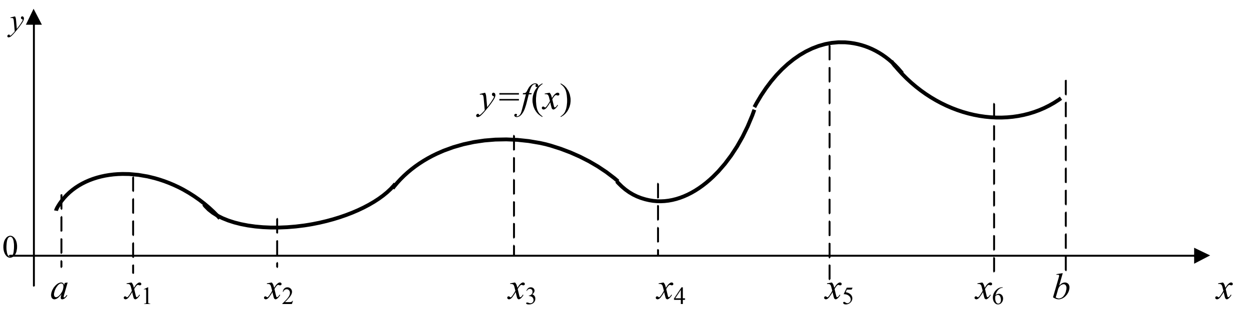


Рис. 8.5.

На інтервалі $[a;b]$ функція має найменше значення в точці a, а найбільше в точці b, і ні одне з них не співпадає зі значеннями мінімуму (точки x_2, x_4, x_6) чи максимуму (точки x_1, x_3, x_5).

Існують точки, в яких функція не має екстремумів, але її похідні в цих точках дорівнюють нулю (рис. 8.6).

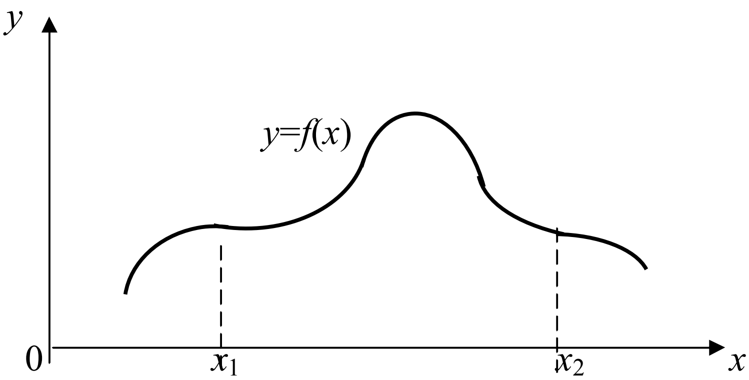


Рис. 8.6.

Дотична до кривої в точках x_1 та x_2 паралельна осі Ox, $y' = 0$. Точка x_1 є точкою, в якій функція перестала зростати, а точка x_2 − точкою, в якій функція перестала спадати.

Озн. Точки, в яких похідна дорівнює нулю, називають стаціонарними.

§2. Знаходження асимптот графіка функції

Озн. Асимптотою кривої називається така пряма, до якої необмежено наближаються точки кривої за необмеженого віддалення її від початку координат. Крива може наближатися до своєї асимптоти тими ж способами, як і змінна до своєї границі: залишаючись з однієї сторони від асимптоти або з різних сторін, кілька разів перетинаючи асимптоту і переходячи з однієї сторони на другу.

Розрізняють асимптоти: вертикальні, горизонтальні і похилі.

Для знаходження асимптот керуються наступними правилами:

а) Якщо при $x = a$ крива $y = f(x)$ має розрив II-го роду, тобто якщо при $x \to a - 0$ або при $x \to a + 0$ функція прямує до нескінченості (того чи іншого знаку), то пряма $x = a$ є вертикальною асимптотою;

б) Крива $y = f(x)$ має горизонтальну асимптоту $y = b$ тільки в тому випадку, коли існує скінчена границя функції $f(x)$ при $x \to \infty$ або $x \to -\infty$, і ця границя дорівнює b, тобто, якщо $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$ або $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$.

в) Для знаходження похилої асимптоти $y = kx + b$ необхідно знайти невідомі коефіцієнти k і b за формулами:

$$k = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) \text{ та } b = \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - kx\right).$$

<u>Приклад</u>: Знайти вертикальні та похилі асимптоти функції: $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$.

Розв'язання:

Оскільки область визначення функції :

$$x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty),$$

то дослідимо точки розриву функції

$$\lim_{x\to-1+0} \frac{x}{x^2-1} = \frac{-1}{-0} = \infty; \ \lim_{x\to-1-0} \frac{x}{x^2-1} = \frac{-1}{0} = -\infty;$$

$$\lim_{x\to1+0} \frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{0} = \infty; \ \lim_{x\to1-0} \frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{-0} = -\infty.$$

Отже, $x = -1$ і $x = 1$ − вертикальні асимптоти.

Похилі асимптоти визначатимемо за формулою: $y = kx + b$. Для цього знайдемо невідомі коефіцієнти k і b:

$$k = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2-1} = \left[\frac{0}{\infty}\right] = 0.$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - kx\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}} = \frac{0}{1} = 0.$$

Тоді рівняння асимптоти набуватиме вигляду: $y = 0$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Знайти вертикальні та похилі асимптоти функцій і схематично побудувати їх графік

7.1. $y = \dfrac{x^2 + x}{x + 2}$; **7.2.** $y = \dfrac{4x^2 - x}{x + 2}$;

7.3. $y=\dfrac{x+2}{x^2-1}$; **7.4.** $y=\dfrac{x^2}{x+5}$;

7.5. $y=\dfrac{x^2-1}{x}$; **7.6.** $y=\dfrac{3x}{x^2-4}$;

7.7. $y=\dfrac{x^2}{x^2-9}$; **7.8.** $y=\dfrac{x-1}{x^2}$;

7.9. $y=\dfrac{x}{(x+2)^2}$; **7.10.** $y=\dfrac{x}{(x-2)^2}$.

Індивідуальне завдання

Знайти вертикальні та похилі асимптоти функцій і схематично побудувати їх графік $y=\dfrac{Nx}{(N-10)^2-(-1)^N x^2}$, N – номер студента за списком.

§3. Зростання та спадання функції

В першому параграфі цього розділу визначено, що в стаціонарних точках $y'=0$. Тому знаходимо y' і прирівнюємо її 0. З умови $f'(x)=0$ знаходимо всі значення стаціонарних точок (x_1, x_2, x_3, x_4) (рис. 8.8.). Функція $f(x)$ зображена на рис. 8.8. *а*). Точка x_1– це стаціонарна точка, для якої $f'(x_1)=0$ (функція перестала зростати). Якщо замість x_1 в $f'(x)$ підставити значення $x_1-\Delta x$ та $x_1+\Delta x$, де Δx– невеликий приріст аргументу, то $f'(x)$ буде додатною. Тому для точки x_1, де функція перестала зростати, похідна веде себе за схемою (знак функції): $+\,0\,+$.

В стаціонарній точці x_3: $f'(x_3-\Delta x)<0$ і $f'(x_3+\Delta x)<0$, тому для точки, де функція перестала спадати, маємо схему: $-\,0\,-$.

В точці x_2 похідна змінює знак. Якщо $f'(x_2-\Delta x)>0$ (зліва від x_2), а $f'(x_2+\Delta x)<0$ (справа від x_2), то маємо максимум. Отже для точки максимуму маємо схему: $+\,0\,-$.

В точці x_4 (мінімум) похідна змінює знак – на +, тому маємо схему: $-0+$.

Якщо рис. 7.8. *б*) схематично відображає поведінку $f'(x)$, то рис.91 *в*) відображає поведінку $f''(x)$. З поведінки другої похідної робимо висновок, що якщо в стаціонарній точці є максимум, то y'' в ній завжди від'ємна, а якщо має мінімум – то y'' додатна.

Тому з умови $y'=f'(x)$ знаходимо $y''=f''(x)$ і прирівнюємо її до нуля. З умови $f''(x)=0$ знаходимо всі значення *x*, що задовольняють цю умову. Ті значення *x*, які вже зустрічалися з умови $f'(x) = 0$, і є стаціонарними точками (у нас – це точки x_1 і x_3). Ті стаціонарні точки, що не задовольняють умови $f''(x) = 0$, будуть точками екстремуму.

Якщо $f''(x_2) < 0$, то $x_2 -$ точка максимуму, а якщо $f''(x_4) > 0$, то $x_4 -$ точка мінімуму. Всі ті точки, для яких $f''(x) = 0$, але $f'(x) \neq 0$ (нові значення, які не зустрічались серед стаціонарних), будуть точками перегину функції (відображена на графіку лише одна з них – точка x_5). Отже, з умови $f''(x) = 0$ знаходимо точку перегину x_5.

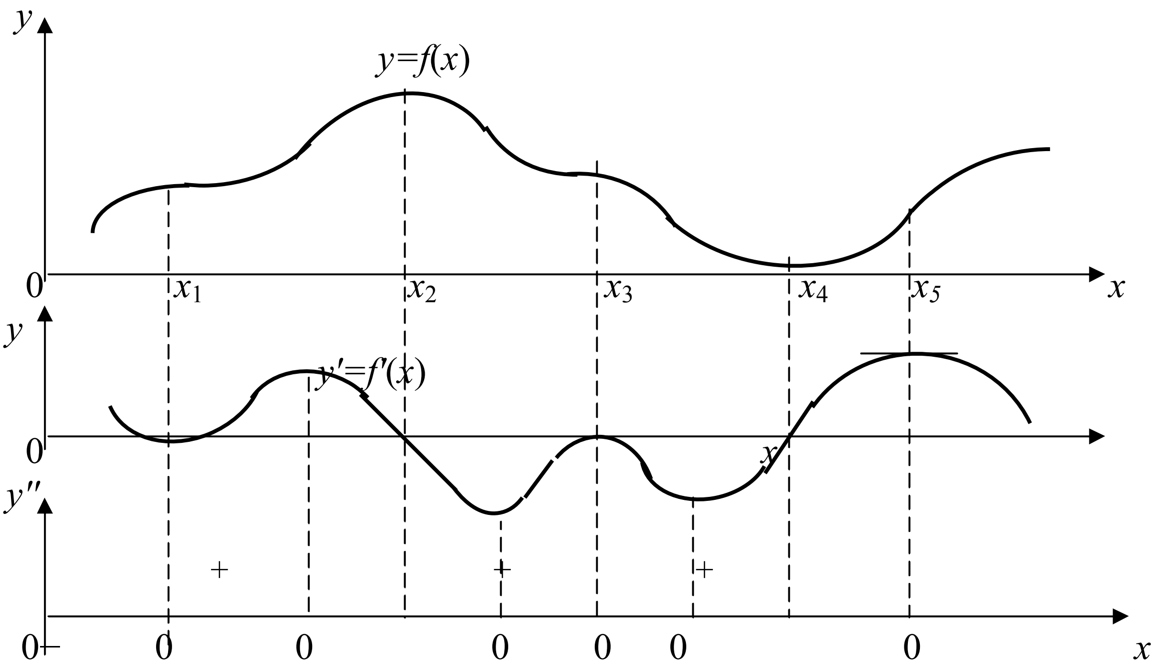


Рис. 8.8.

Озн. Точкою перегину називається точка кривої, в якій створюється перехід від випуклості до угнутості чи навпаки (рис. 8.9).

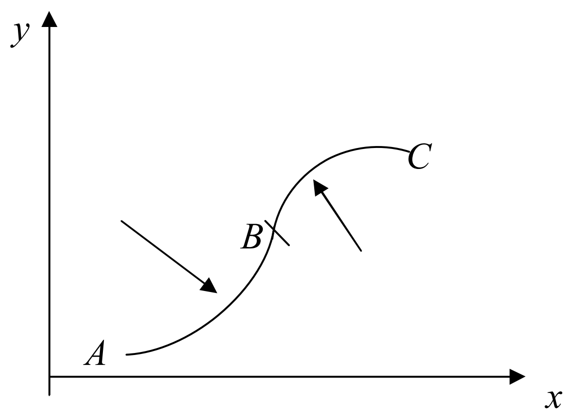


Рис. 8.9.

Ділянка AB $-$ це ділянка угнутості функції, а ділянка BC $-$ випуклості.

Якщо функція має в точці x_0 гострий екстремум, то вона в цій точці існує, а її перша похідна потерпає розрив.

Знаходимо проміжки, в яких $f'(x) > 0$. Це проміжки зростання функції. Якщо $f'(x) < 0$ на даному проміжку, то функція на цьому проміжку спадає. Якщо на заданому проміжку $f''(x) > 0$, то $f(x)$ угнута, а якщо $f''(x) < 0$, то функція випукла.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Знайти інтервали монотонності та екстремуми функцій:

7.11. $y = 4x^2 - 6x$;

7.12. $y = 1 + x - x^3$;

7.13. $y = 4x^4 - 2x^2 + 2$;

7.14. $y = x + \dfrac{1}{x}$;

7.15. $y = x^2(4 - x)^2$;

7.16. $y = \dfrac{x}{1 + x^2}$.

Індивідуальне завдання

Знайти інтервали монотонності та екстремуми функцій: $y = Nx^2 - (N-3)x + N$, N – номер студента за списком.

§4. Означення максимуму та мінімуму функції

Функція *f(x)* має в точці $x = x_0$ максимум, якщо значення функції в цій точці більше, ніж її значення в усіх точках, достатньо близьких до x_0.

Тобто, функція *f(x)* має максимум за $x = x_0$, якщо $f(x_0+\Delta x) < f(x_0)$, для будь-якого Δx – як додатного, так і від’ємного, але достатньо малих за абсолютною величиною.

Функція *f(x)* має в точці $x = x_0$ мінімум, якщо значення функції в цій точці менше, ніж її значення в усіх точках, достатньо близьких до x_0. Тобто, функція *f(x)* має мінімум за $x = x_0$, якщо $f(x_0+\Delta x) > f(x)$, для будь-якого Δx – як додатного, так і від’ємного, але достатньо малих за абсолютною величиною.

Якщо в деякій точці функція має максимум або мінімум, то говорять, що в цій точці має місце екстремум.

Слід пам’ятати:

1. Максимум (мінімум) не є обов’язково найбільшим (найменшим) значенням, що приймає функція. Поза розглянутого околу точки x_0 функція може приймати більші (менші) значення, ніж в цій точці.

2. Функція може мати декілька максимумів і мінімумів.

3. Функція, що визначена на відрізку, може досягнути екстремуму тільки у внутрішніх точках цього відрізка.

Необхідна умова екстремуму

Якщо функція $f(x)$ має екстремум за $x = x_0$, то її похідна в цій точці дорівнює нулю, або нескінченості, або взагалі не існує. Із цього слідує, що точки екстремуму функції необхідно знаходити тільки серед тих, в яких її перша похідна $f\ '(x) = 0$, або не існує. Слід уяснити, що вказана ознака екстремуму є тільки необхідною, але не достатньою.

Вкажемо дві достатні умови існування екстремуму функції.

Перша достатня умова існування екстремуму функції

Нехай точка $x = x_0$ є критичною точкою функції $f(x)$, а сама функція $f(x)$ неперервна та диференційована у всіх точках деякого інтервалу, який містить цю точку. Тоді:

1. Якщо за $x < x_0$ похідна функції $f\ '(x) > 0$, а за $x > x_0$ $f\ '(x) < 0$, то за $x = x_0$ має місце максимум, тобто якщо при переході зліва направо через критичну точку перша похідна змінює знак з плюса на мінус, то в цій точці функція досягає максимуму.

2. Якщо за $x < x_0$ похідна функції $f\ '(x) < 0$, а за $x > x_0$ $f\ '(x) > 0$, то за $x = x_0$ має місце мінімум, тобто, якщо за переходу через критичну точку перша похідна функції змінює знак з мінуса на плюс, то в цій точці функція досягає мінімуму.

3. Якщо ж за переходу через критичну точку перша похідна не змінює знак, то екстремуму немає.

Друга достатня умова існування екстремуму функції

Якщо в точці $x = x_0$ перша похідна функції $f(x)$ дорівнює нулю: $f\ '(x)=0$, то за $x = x_0$ має місце максимум, якщо $f\ ''(x) < 0$, та мінімум, якщо $f\ ''(x) > 0$. Якщо ж $f\ ''(x) = 0$, то необхідно розглянути першу достатню умову існування екстремуму.

Правило для дослідження функції на екстремум за допомогою похідної (перший спосіб)

Для дослідження функції на екстремум за першою похідною необхідно:

1. Знайти $f\ '(x)$ – першу похідну функції.

2. Розв'язати рівняння $f\ '(x) = 0$, а також визначити ті значення x, при яких $f\ '(x) = \infty$ або не існує (тобто: знайти критичні точки функції $f\ (x)$).

3. Всі критичні точки розташувати на числовій осі в порядку зростання їх абсцис.

4. В середині кожного із утворених інтервалів взяти будь-яку точку і встановити в цій точці знак першої похідної функції (похідна зберігає знак в кожному інтервалі між двома сусідніми критичними точками).

5. Розглянути знак *f '(x)* в двох сусідніх точках, переходячи послідовно зліва направо від першого інтервалу до останнього. Якщо за такого переходу знаки *f '(x)* в двох сусідніх інтервалах різні, то екстремум в критичній точці є, і буде максимум, якщо знак змінюється з + на –, а мінімум, якщо знак змінюється з – на +. Якщо ж в двох сусідніх інтервалах має місце збереження знаку першої похідної, то екстремуму в розглянутій критичній точці немає.

6. Знайти значення функції в точках, де вона досягає екстремуму (екстремальні значення функції).

Правило для дослідження функції на екстремум за допомогою похідної (другий спосіб)

Для того щоб дослідити на екстремум за другою похідною, необхідно:

1. Знайти *f '(x)* – першу похідну функції.
2. Розв’язати рівняння *f '(x)* =0.
3. Знайти *f ''(x)* – другу похідну функції.
4. Дослідити знак *f ''(x)* – другої похідної функції в кожній точці, що знайдено в пункті 2.

Якщо в розглянутій точці *f ''(x)* > 0, то в цій точці буде мінімум, а якщо *f ''(x)* < 0, то в цій точці буде максимум. Якщо в розглянутій точці *f ''(x)* = 0, то дослідження необхідно провести за правилом першої похідної.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Знайти екстремуми функцій:

7.17. $y = x^2 - 2x + 3$; **7.18.** $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$;

7.19. $y = x^3 - 9x^2 + 15x + 3$; **7.20.** $y = -x^4 + 2x^2$;

7.21. $y = x^4 - 8x^2 + 2$; **7.22.** $y = \frac{(x-2)(3-x)}{x^2}$;

7.23. $y = (x-2)^3(2x+1)$; **7.24.** $y = cosx + sinx$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Знайти інтервали монотонності та екстремуми функцій:

7.25. $y = 4x^2 - 6x$; **7.26.** $y = 1 + x - x^3$; **7.27.** $y = 4x^4 - 2x^2 + 2$;

7.28. $y = x + \frac{1}{x}$; **7.29.** $y = x^2(4-x)^2$; **7.30.** $y = \frac{x}{1+x^2}$.

Індивідуальне завдання

Знайти інтервали монотонності та екстремуми функцій: $y = \frac{Nx}{(N-10)^2 - (-1)^N x^2}$, N – номер студента за списком.

§5. Застосування похідної до дослідження динаміки функції

Загальне дослідження функції та побудову її графіка зручно використовувати за наступною схемою:

1. Елементарні дослідження: знайти область визначення функції; точки перетину з осями координат; перевірити функцію на парність.
2. Знайти точки розриву функції та її односторонні границі.
3. Знаходження похилих асимптот.
4. Знайти точки екстремуму та інтервали зростання і спадання функції.
5. Побудувати графік функції, враховуючи всі одержані результати дослідження.

<u>Приклад:</u> Дослідити функцію і побудувати її графік: $y=\dfrac{x}{x^2-1}$.

Розв'язання:

<u>1. Елементарні дослідження:</u>

Область визначення функції : $x\in(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;\infty)$.

Точки перетину графіка функції з осями координат:

$(0;0)$ − єдина точка перетину з віссю абсцис та ординат.

Функція непарна, окільки $y(-x)=\dfrac{-x}{(-x)^2-1}=-\dfrac{x}{x^2-1}$. Отже графік функції симетричний відносно початку координат.

<u>2. Дослідження точок розриву:</u>

$\lim\limits_{x\to-1+0}\dfrac{x}{x^2-1}=\dfrac{-1}{-0}=\infty$; $\lim\limits_{x\to-1-0}\dfrac{x}{x^2-1}=\dfrac{-1}{0}=-\infty$;

$\lim\limits_{x\to1+0}\dfrac{x}{x^2-1}=\dfrac{1}{0}=\infty$; $\lim\limits_{x\to1-0}\dfrac{x}{x^2-1}=\dfrac{1}{-0}=-\infty$.

Отже, $x=-1$ і $x=1$ − вертикальні асимптоти.

<u>3. Знаходження похилих асимптот:</u>

Похилі асимптоти визначатимемо за формулою: $y=kx+b$. Для цього знайдемо невідомі коефіцієнти k і b:

$$k=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2-1}=\left[\frac{0}{\infty}\right]=0.$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}=\frac{0}{1}=0.$$

Тоді рівняння асимптоти набуватиме вигляду: $y=0$.

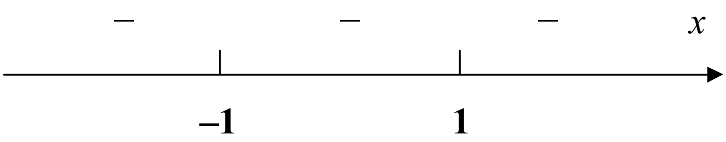
<u>4. Дослідження функції на монотонність:</u>

Знайдемо першу похідну функції:

$$y' = \frac{\left(x^2-1\right)-x\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^2} = \frac{x^2-2x^2-1}{\left(x^2-1\right)^2} = \frac{-1-x^2}{\left(x^2-1\right)^2} = -\frac{1+x^2}{\left(x^2-1\right)^2}.$$

Прирівняємо першу похідну до нуля: $-\dfrac{1+x^2}{\left(x^2-1\right)^2}=0$.

Оскільки рівняння не має розв'язків, то критичних точок першого роду не має. Тому на числовій осі *0X* позначаємо лише точки розриву функції:



Отже, функція спадає на всій області визначення.

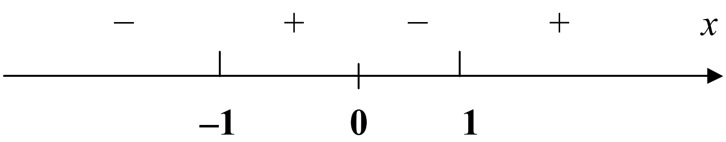
5. Дослідження на опуклість та ввігнутість:

Знайдемо другу похідну функції:

$$y'' = \frac{-2x\cdot\left(x^2-1\right)^2+\left(1+x^2\right)\cdot 2\left(x^2-1\right)\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^4} = \frac{2x\cdot\left(x^2-1\right)\cdot\left(-x^2+1-2+2x^2\right)}{\left(x^2-1\right)^4} =$$

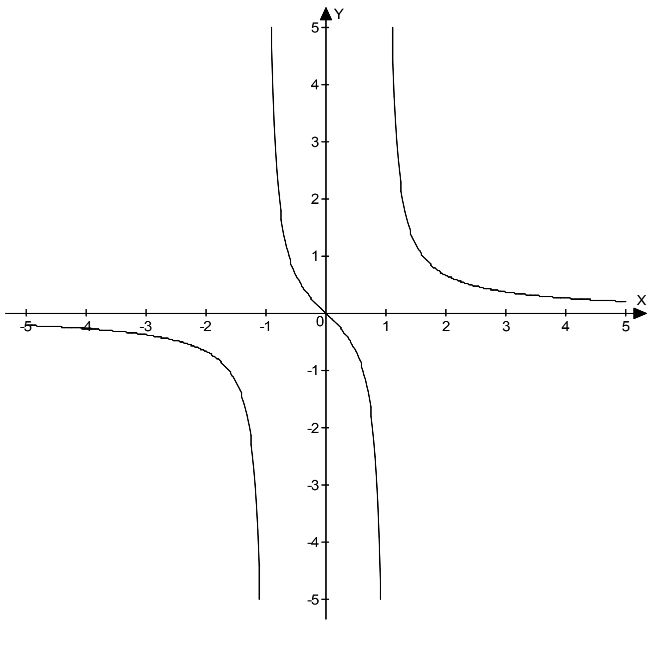
$$= \frac{2x\cdot\left(x^2+3\right)}{\left(x^2-4\right)^3}.$$

Прирівняємо другу похідну до нуля: $\dfrac{2x\cdot\left(x^2-2x-1\right)}{\left(x^2-4\right)^3}=0$, $x=0$ – критична точка другого роду. Визначимо знаки другої похідної на отриманих інтервалах:



Отже, функція опукла вниз на проміжках: $x\in(-1;0)\cup(1;\infty)$, опукла вгору – $x\in(-\infty;-1)\cup(0;1)$. Точка (0; 0) – точка перегину.

6. Побудова графіка функції:



ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Дослідити функцію і побудувати її графік:

7.31. $y = \frac{x^2 + x}{x + 2}$;

7.32. $y = \frac{4x^2 - x}{x + 2}$;

7.33. $y = \frac{x + 2}{x^2 - 1}$;

7.34. $y = \frac{x^2}{x + 5}$;

7.35. $y = \frac{x^2 - 1}{x}$;

7.36. $y = \frac{3x}{x^2 - 4}$;

7.37. $y = \frac{x^2}{x^2 - 9}$;

7.38. $y = \frac{x - 1}{x^2}$;

7.39. $y = \frac{x}{(x + 2)^2}$;

7.40. $y = \frac{x}{(x - 2)^2}$.

Індивідуальне завдання

Дослідити функцію і побудувати її графік: $y = \frac{Nx}{(N - 10)^2 - (-1)^N x^2}$, N – номер студента за списком.

Запитання до розділу VIII

1. Що називають функцією?
2. Що називають асимптотою?
3. В чому полягає принцип Ферма?
4. Що таке точки екстремуму?
5. Що таке стаціонарні точки?
6. Що таке максимум та мінімум функції?
7. Як знаходяться проміжки зростання, спадання, випуклості та угнутості?
8. Як знаходиться горизонтальна асимптота?
9. Як знаходиться вертикальна асимптота?
10. Як знаходиться похила асимптота?
11. Що дає знаходження першої похідної?
12. Що дає знаходження другої похідної?

IX. ФУНКЦІЇ ДЕКІЛЬКОХ ЗМІННИХ

§1. Поняття функції декількох змінних. Частинні похідні.

У функції однієї змінної $y = f(x)$ змінна x відіграє роль незалежної змінної, а змінна $y -$ залежна змінна. В реальності існують функції, коли незалежних змінних існує декілька, причому вони незалежні між собою, але їх зміна призводить до зміни залежної від них величини. Швидкість випаровування води залежить від температури повітря, вологості повітря, напрямку та сили вітру, ступеня освітленості Сонцем тощо. Об'єм паралелепіпеда залежить від довжини, ширини та висоти сторін, а конуса – тільки від радіуса основи та висоти.

Ми будемо називати функцією декількох змінних таку функцію, у якої число незалежних змінних не менше двох. Отже, функція двох змінних $z = f(x, y)$ є найпростішим випадком функції декількох змінних.

Для будь-якої функції двох змінних можливо зробити графічну ілюстрацію. Графіком функції $z = f(x, y)$ називається геометричне місце точок (x, y, z) простору, у яких x та y належать множині точок площини xOy, а всі точки z функціонально залежні від x та y за законом $z = f(x, y)$. Графік функції може мати вигляд деякої поверхні. Але вже функції з числа незалежних змінних, що перевищує число 2 (трьох чотирьох і т.д. змінних), геометричного образу не мають. Не зважаючи на це, всі основні поняття та висновки теорії функції декількох змінних практично однакові і не залежать від числа змінних, тому вивчення таких функцій доцільно проводити саме на функціях двох змінних як на самому простому представнику групи.

Проілюструємо основні поняття і формули для функцій двох змінних, оскільки перехід до більшого числа змінних не викликає ніяких труднощів. Якщо $z = f(x, y)$, то частинні прирости за змінними x, y та повний приріст функції визначається за формулами:

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y);$$
$$\Delta_y z = f(x; y + \Delta y) - f(x, y);$$
$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Якщо існує $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$, то ця границя називається частинною похідною функції $z = f(x, y)$ за змінною x і позначається одним із символів: $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, z'_x.

Ця похідна називається частинною похідною по змінній x і позначається єдиним символом $\frac{\partial z}{\partial x}$.

Якщо для функції однієї змінної похідна $\frac{dy}{dx}$ є відношенням диференціалів, то значки ∂z та ∂x ніякого змісту не мають, а горизонтальна лінія не означає дію ділення. Отже, $\frac{\partial z}{\partial x}$ − символ, значок для позначення частинної похідної.

Якби $\frac{\partial z}{\partial x}$ було діленням, то $\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}=1$ завдяки скороченням, які можна було б провести. Але якщо, наприклад, $z=xy$, то $x=\frac{z}{y}$ і $y=\frac{z}{x}$.

Тоді $\frac{\partial z}{\partial x}=y$, $\frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{z}{y^2}$, $\frac{\partial y}{\partial z}=\frac{1}{x}$, а $\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}=y\cdot\left(-\frac{z}{y^2}\right)\cdot\frac{1}{x}==-\frac{z}{xy}=-\frac{z}{z}=-1.$

Але $1\neq -1$.

Аналогічно визначається частинна похідна за змінною y. Частинна похідна за однією із змінних знаходиться за правилами диференціювання функцій однієї змінної, при чому друга змінна залишається сталою.

<u>Приклад:</u> Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ функцій:

а) $z=4xy^3+2\sqrt{x}y^2+7y$; б) $z=e^x\cdot\sqrt{y}$; в) $z=\frac{\sqrt{x^2+3y}}{sinxy}$.

Розв'язання:

а) $z=4xy^3+2\sqrt{x}y^2+7y$;

$$\frac{\partial z}{\partial x}=4\cdot 1\cdot y^3+2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot y^2+0=4y^3+\frac{y^2}{\sqrt{x}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=4\cdot x\cdot 3y^2+2\sqrt{x}\cdot 2y+7=12xy^2+4y\sqrt{x}+7.$$

б) $z=e^x\cdot\sqrt{y}$;

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^x\cdot\sqrt{y};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=e^x\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

в) $z=\frac{\sqrt{x^2+3y}}{siinx}$;

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+3y}}\cdot siinx-\sqrt{x^2+3y}\cdot ycosxy}{sii^2xy}=$$

$$\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+3y}}\cdot sinxy-\sqrt{x^2+3y}\cdot ycosxy}{sin^2xy};\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\frac{3}{2\sqrt{x^2+3y}}\cdot siinx-\sqrt{x^2+3y}\cdot xcosxy}{sii^2xy}.$$

Якщо $z=f(x,y)$ неперервна і має неперервні частинні похідні, то за зміни x на величину Δx, а $y-$ на величину Δy, функція z змінюється на величину повного приросту Δz на відміну від частинних приростів:

$$\Delta z=f(x+\Delta x;y+\Delta y)-f(x;y).$$

Шляхом доповнення, виходячи з ідеї частинного приросту, одержимо:

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)+f(x,y+\Delta y)-f(x,y).$$

Розглянемо першу пару: $f(x+\Delta x;y+\Delta y)-f(x;y+\Delta y)$ є частинним приростом функції за зміни x на величину Δx (величина $y+\Delta y$ однакова для обох виразів). Позначимо його $\Delta_x z$.

Розглянемо другу пару : $f(x+\Delta x;y+\Delta y)-f(x;y+\Delta y)$ є частинним приростом $\Delta_y z$ функції за зміни y на величину Δy (величина x однакова в обох виразах).

Отже, маємо: $\Delta z=\Delta_x z+\Delta_y z$. Частинні прирости є повними аналогами приростів функції однієї змінної, тому для них можемо записати:

$\Delta_x z=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\Delta x+\alpha$, $\Delta_y z=\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\Delta y+\beta$, де α і β – нескінченно малі величини, якщо $\Delta x\to 0$ і $\Delta y\to 0$. Тоді:

$$\Delta z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y+\delta,\ \text{де}\ \delta=\alpha+\beta.$$

Ця формула називається ***формулою повного приросту*** функції.

Розглянемо $z=f(x;y)$, де x та y є деякі функції від змінної t. Тоді $f(x;y)$ стає складеною функцією. Якщо t одержує приріст Δt, то x одержує приріст Δx, y одержує приріст Δy, а z одержує приріст Δz. Тоді Δz, як повний приріст функції буде: $\Delta z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y+\delta$, звідки в граничному переході (детальне дослідження показує, що $\delta\to 0$ при $dt\to 0$) будемо мати:

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}.$$

Це формула для знаходження похідної від складеної функції.

Приклад: Обчислити похідну функції $z=(\sin x)^{\ln y}$.

Розв'язання: Нехай $z=(\sin x)^{\ln y}$, де $x=x(t)$, $y=y(t)$, тоді $z'_t=\cos x\cdot(\sin x)^{\ln y-1}\cdot\ln y\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{1}{y}\cdot(\sin x)^{\ln y}\cdot\ln\sin x\cdot\frac{dy}{dt}$.

Якщо функція однієї змінної задана неявно, то вона має вигляд $f(x;y)=C$, то її похідна буде дорівнювати:

$$\frac{dy}{dx}=y'=-\frac{f'_x}{f'_y} \tag{9.1}$$

За цією формулою зразу можемо знайти похідну неявної функції.

Приклад: знайти похідну неявної функції $x^2y^2+\sin(x-y)=4$.

Знайдемо частинні похідні:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=f'_x=2x\cdot y^3+\cos(x-y)\cdot x'=2xy^3+\cos(x-y).$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=f'_y=x^2\cdot 3y^2+\cos(x-y)\cdot(-y)'=3x^2y^2-\cos(x-y).$$

Тоді $y'=-\dfrac{2xy^3+\cos(x-y)}{3x^2y^2-\cos(x-y)}$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ функцій:

8.1. $z=4x^3y^2-12xy^3-\sqrt{xy}$;

8.2. $z=x^3y+2x^2y^2-\sqrt{x+y}$;

8.3. $z=3x^2y^3+2x^3y^2+\sqrt{2x}$;

8.4. $z=4x^4y^3+\frac{1}{2}x^3y^2+\sqrt{3+y}$;

8.5. $z=x^4y^3+xy^2+coos$;

8.6. $z=xy^3+x^{10}y^2+sinx$;

8.7. $z=\ln y^3+xy^2+sin2x$;

8.8. $z=\ln^2 y+x^4y^2+siny^2$;

8.9. $z=2\log_2 x+3\sqrt{x}y^2+6y$;

8.10. $z=\log_3 y+3xy^2+10x$;

8.11. $z=\sqrt{x}\cdot\sin y$;

8.12. $z=\sqrt{x+2}\cdot\cos y$;

8.13. $z=\sqrt{x^2-xy^5}$;

8.14. $z=\frac{x}{y}$;

8.15. $z=\frac{xy}{x^2+y}$;

8.16. $z=\frac{\ln y}{x+10}$;

8.17. $z=\frac{\ln y}{xy}$;

8.18. $z=\frac{\ln y}{\sqrt{x}}$;

8.19. $z=\frac{cosx}{\sqrt{y}}$;

8.20. $z=\frac{arccosx}{\sqrt{y}}$;

8.21. $z=e^{xy}\cdot\sqrt{2y}$;

8.22. $z=\frac{x^2+2e^x}{3y}$;

8.23. $z=\frac{x^2+2e^y}{4y}$;

8.24. $z=\frac{\ln y}{x+y}$;

8.25. $z=\sqrt{4x-3}\cdot sin^3y$;

8.26. $z=\sqrt{2x}\cdot cosy^3$;

8.27. $z=\frac{arcsinx}{x+y}$;

8.28. $z=\frac{x^2y^3}{x^2+y^3}$;

8.29. $z=\ln(xy)\cdot sin(2x+4y)$;

8.30. $z=3xy^5\cdot\log_3 y^5$.

Індивідуальне завдання

Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ функцій:

а) $z=2x^ny^{n+2}-\frac{1}{ny}x^{2n}-4y\sqrt{x}$;

б) $z=e^{nx}-\sqrt[n]{y}$;

в) $z=tg(nx-4y)\cdot\sqrt{x^3+nx^2-n}$;

г) $z=\frac{x^{2n}-(n-2)x}{\sin^n y}$.

Де n – остання цифра номера студента за списком.

§ 2. Повний диференціал функцій та його застосування

В попередніх параграфах приведена формула повного приросту функції:

$$\Delta z=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y+\delta .$$

Величина $\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x$ називається частинним диференціалом по змінній x, $\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$ – частинним диференціалом за змінною y і позначаються: $\frac{df}{dx}\Delta x=d_xz$; $\frac{df}{dy}\Delta y=d_yz$. Тоді сума всіх частинних диференціалів називається повним диференціалом функції (для функції двох змінних тільки два частинних диференціали, а взагалі їх кількість співпадає з числом змінних). Отже:

$$dz=d_xz+d_yz=\frac{dz}{dx}\Delta x+\frac{dz}{dy}\Delta y\cdot \qquad (9.2)$$

Розглядання функцій $z=x(z'_x=1,z'_y=0)$ та $z=y(z'_x=0;z'_y=1)$ дає:

$\Delta x=dx;\Delta y=dy$, тому $dz=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot dx+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot dy$. Таким чином:

$\Delta z = dz + \delta$, звідки $\Delta z \sim dz$ (ця рівність тим точніша, чим менші Δx та Δy).

Приклад: Знайти повний диференціал функції: $z = x^2 y^3 + \sin(x - y)$.

$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^3 + \cos(x - y)$. $\frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 y^2 + \cos(x - y) \cdot (-1)$.

$$dz = (2xy^3 + \cos(x - y)) \cdot dx + (3x^2 y^2 - \cos(x - y) \cdot dy.$$

Повний диференціал завдяки формулі $\Delta z \approx dz$ знаходить широке використання в наближених обчисленнях.

Приклад: Обчислити $z = \sqrt[3]{xy + x^3 - y^2 + x^2 y^3 + 1}$ якщо $x = 0{,}99$; $y = 2{,}02$.

Маємо: $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, $\Delta x = -0{,}01$; $\Delta y = 0{,}02$. Тоді:

$z = z_0 + \Delta z \approx z_0 + dz = z_0 + \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \Delta y$, де $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$ знаходяться в точці (x_0, y_0).

Маємо: $z_0 = \sqrt[3]{1 \cdot 2 + 1^3 - 2^2 + 1^2 \cdot 2^3 + 1} = 2$;

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(xy + x^3 - y^2 + x^2 y + 1)^2}} \cdot (y + 3x^2 + 2xy^3) = \frac{2 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2^3}{3 \cdot 2^2} = \frac{21}{12}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(xy + x^3 - y^2 + x^2 y + 1)^2}} \cdot (x - 2y + 3x^2 y^2) = \frac{1 - 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^3}{12} = \frac{9}{12}.$$

Тоді $z \approx 2 + \frac{21}{12} \cdot (-0{,}01) + \frac{9}{12} \cdot 0{,}02 = 2 - \frac{7}{400} + \frac{6}{400} = 2 - \frac{1}{400} = 2{,}0025$.

Озн: Похідна $\frac{\partial z}{\partial l}$ функції $z = f(x, y)$ за напрямком $l(\cos\alpha, \sin\alpha)$ обчислюється за формулою:

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_A \cdot \cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_A \cdot \cos\beta. \quad (9.3)$$

Обчислення в точці *M (x; y)* дає швидкість зміни функції в напрямку в точці *M*.

Озн: Вектор з координатами $\frac{\partial z}{\partial x}$; $\frac{\partial z}{\partial y}$ називається градієнтом функції в точці *M*, він напрямлений в сторону найскорішої зміни функції і позначається так:

$$\overline{grad z} = \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_A \cdot \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_A \cdot \vec{j}. \quad (9.4)$$

Геометрично рівняння $z = f(x, y)$ задає деяку поверхню. Щоб уявити собі вигляд поверхні перетнемо її площиною $z = C$, де C стала величина. Таке рівняння $f(x, y) = C$ задає в площині *XOУ* криву, яка називається ізоквантою. Якщо на ізокванті взяти деяку точку *M* $(x_0; y_0)$, то вектор-градієнт в цій точці буде перпендикулярним до ізокванти.

Приклад: Задано функцію $z=\dfrac{2x^2-3}{4y^3}$, точку *A (–1; 1)* і вектор $\vec{a}$ *(–12; –5)*. Знайти градієнт функції в точці *A* та похідну в точці *A* в напрямі вектора $\vec{a}$.

Розв'язання: Обчислимо частинні похідні функції в точці A_0:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2\cdot 2x-0}{4y^3}=\frac{4x}{4y^3}=\frac{x}{y^3}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{A(-1;1)}=\frac{-1}{1^3}=-1;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-3\cdot\frac{2x^2-0}{4y^4}=\frac{6x^2}{4y^4}=\frac{3x^2}{2y^4}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{A(-1;1)}=\frac{3\cdot(-1)^2}{2\cdot 1^4}=\frac{3}{4}.$$

Тоді градієнт функції можна записати у вигляді: $\overline{gradz}=\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_A\cdot\vec{i}+\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_A\cdot\vec{j}$. Тобто: $\overline{gradz}=-1\cdot\vec{i}+\frac{3}{4}\cdot\vec{j}$.

Для запису похідної в точці *A* в напрямі вектора $\vec{a}$ використаємо формулу: $\dfrac{\partial z}{\partial l}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_A\cdot\cos\alpha+\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_A\cdot\cos\beta$.

Для цього зайдемо напрямлені косинуси:

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^{\,2}+a_y^{\,2}}}=\frac{-12}{\sqrt{144+25}}=\frac{-12}{13}; \ \cos\beta=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^{\,2}+a_y^{\,2}}}=\frac{-5}{\sqrt{144+25}}=-\frac{5}{13}.$$

Тоді, $dz=-1\cdot\left(-\dfrac{12}{13}\right)+\dfrac{3}{4}\cdot\left(-\dfrac{5}{13}\right)=\dfrac{12}{13}-\dfrac{15}{52}=\dfrac{48-15}{52}=\dfrac{33}{52}$.

Відповідь: $\overline{gradz}=-1\cdot\vec{i}+\frac{3}{4}\cdot\vec{j}$; $dz=\frac{33}{52}$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

8.31. Задано функцію $z=x^3y^2+4\sqrt{x}-2\sqrt[3]{y}$ і точку *A (1; 1)*. Знайти градієнт функції в точці *A*.

8.32. Задано функцію $z=\dfrac{x}{y}+2\sqrt{xy}-\sqrt[3]{x+y}$ і точку *A (1; 4)*. Знайти градієнт функції в точці *A*.

8.33. Задано функцію $z=\left(\dfrac{x-1}{y^2}\right)^2$ і точку *A (2; –3)*. Знайти градієнт функції в точці *A*.

8.34. Задано функцію $z=\left(\frac{x^2}{4-y}\right)^{-1}$ і точку *A (–1; 0,5)*. Знайти градієнт функції в точці *A*.

8.35. Задано функцію $z=cos(xy)$ і точку *A* $(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$. Знайти градієнт функції в точці *A*.

8.36. Задано функцію $z=sin(2x+y)$ і точку *A* $(-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2})$. Знайти градієнт функції в точці *A*.

8.37. Задано функцію $z=\left(3x^2+4y^2\right)^2$ і точку *A (2; 3)*. Знайти градієнт функції в точці *A*.

Для вектора $\vec{a}$ знайти напрямлені косинуси:

8.38. $\vec{a}\,(1;-1)$;

8.39. $\vec{a}\,(-2;1{,}5)$;

8.40. $\vec{a}\,(0;7)$;

8.41. $\vec{a}\,(5;1)$;

8.42. $\vec{a}\,(-6;-8)$;

8.43. $\vec{a}\,(-5;-12)$.

8.44. Задано функцію $z=\frac{3x}{y^2}$, точку *A (3; 4)* і вектор $\vec{a}\,(6;8)$. Знайти похідну в точці *A* в напрямі вектора $\vec{a}$.

8.45. Задано функцію $z=\frac{2x^3}{y^2}$, точку *A (1; 4)* і вектор $\vec{a}\,(-6;8)$. Знайти градієнт функції в точці *A* та похідну в точці *A* в напрямі вектора $\vec{a}$.

8.46. Задано функцію $z=\left(\frac{x^2}{4-y}\right)^3$ і точку *A (–1; 0)*. Знайти градієнт функції в точці *A*.

8.47. Задано функцію $z=\ln x^3y^2$, точку *A (1; 1)* і вектор $\vec{a}\,(2;-1)$. Знайти градієнт функції в точці *A* та похідну в точці *A* в напрямі вектора $\vec{a}$.

8.48. Задано функцію $z=\ln(x^3+y^2)$, точку *A (1; 1)* і вектор $\vec{a}\,(-2;1)$. Знайти градієнт функції в точці *A* та похідну в точці *A* в напрямі вектора $\vec{a}$.

8.49. Задано функцію $z=\arccos\left(\frac{x}{y^2}\right)$, точку *A (1; 2)* і вектор $\vec{a}\,(12;-5)$. Знайти градієнт функції в точці *A* та похідну в точці *A* в напрямі вектора $\vec{a}$.

8.50. Задано функцію $z = arctg\left(\frac{x^2}{y}\right)$, точку *A (1; 2)* і вектор $\vec{a}$ *(12; 5)*. Знайти градієнт функції в точці *A* та похідну в точці *A* в напрямі вектора $\vec{a}$.

8.51. Задано функцію $z = \ln\left(3x^2 + 4y^2\right)$, точку *A (1; 3)* і вектор $\vec{a}$ *(3; 4)*. Знайти градієнт функції в точці *A* та похідну в точці *A* в напрямі вектора $\vec{a}$.

8.52. Задано функцію $z = \ln\left(3x + y^2\right)$, точку *A (2; 3)* і вектор $\vec{a}$ *(3; –4)*. Знайти градієнт функції в точці *A* та похідну в точці *A* в напрямі вектора $\vec{a}$.

8.53. Задано функцію $z = \frac{\ln x}{y^2}$, точку *A (1; –2)* і вектор $\vec{a}$ *(6; –8)*. Знайти градієнт функції в точці *A* та похідну в точці *A* в напрямі вектора $\vec{a}$.

8.54. Задано функцію $z = \frac{\ln x}{2y}$, точку *A (1; 2)* і вектор $\vec{a}$ *(6; 8)*. Знайти градієнт функції в точці *A* та похідну в точці *A* в напрямі вектора $\vec{a}$.

8.55. Для функції $z = x^2 + y^2 + xy$ обчислити наближене значення в точці *A (1,02; 1,95)* за допомогою диференціалу.

8.56. Для функції $z = 2x^2 + y^2 + 3xy$ обчислити наближене значення в точці *A (1,96; –1,03)* за допомогою диференціалу.

8.57. Для функції $z = x^2 - 5y + 3xy$ обчислити наближене значення в точці *A (3,95; 1,03)* за допомогою диференціалу.

8.58. Для функції $z = x^y$ обчислити наближене значення в точці *A (0,96; 1,01)* за допомогою диференціалу.

8.59. Для функції $z = 4x - 5\sqrt{xy} + 2x^2y^3$ обчислити наближене значення в точці *A (–2,97; 1,04)* за допомогою диференціалу.

8.60. Для функції $z = \ln(x + y)$ обчислити наближене значення в точці *A (–0,02; 1,05)* за допомогою диференціалу.

8.61. Для функції $z = \sqrt[3]{y + x}$ обчислити наближене значення в точці *A (0,03; 125,01)* за допомогою диференціалу.

8.62. Для функції $z = 4x^6y^3 - 2\sqrt{x} + 2xy$ обчислити наближене значення в точці *A (0,97; 1,01)* за допомогою диференціалу.

8.63. Для функції $z = x^4y^2 - 3\sqrt{y} + 2xy$ обчислити наближене значення в точці *A (–0,99; 1,05)* за допомогою диференціалу.

8.64. Для функції $z = 2x^2y^3 - 3\sqrt{x + 3} + 2y$ обчислити наближене значення в точці *A (0,98; –1,04)* за допомогою диференціалу.

8.65. Для функції $z = cos(2x + y)$ обчислити за допомогою диференціалу наближене значення в точці *A (4°; 92°)*.

8.66. Для функції $z = sin(2x + y)$ обчислити за допомогою диференціалу наближене значення в точці *A (47°; 91°)*.

8.67. Для функції $z = sin(xy)$ обчислити за допомогою диференціалу наближене значення в точці *A (3°; 32°)*.

8.68. Для функції $z = arcsin(x + xy)$ обчислити за допомогою диференціалу наближене значення в точці *A (0,03; 0,99)*.

8.69. Для функції $z = arccos\frac{x}{y}$ обчислити за допомогою диференціалу наближене значення в точці *A (4,1; 4,2)*

8.70. Для функції $z = tg(x + 2y)$ обчислити за допомогою диференціалу наближене значення в точці *A (29°; 92°)*.

Індивідуальне завдання

1. Задано функцію $y = x^n y^n - \frac{1}{x^{2n} y} - \frac{y\sqrt{x}}{n}$, точку *A (1; –1)* і вектор $\vec{a}$ *(n; –n)*. Знайти градієнт функції в точці *A* та похідну в точці *A* в напрямі вектора $\vec{a}$.

2. Для функції $z = 4x^{n-10} y - \frac{n}{x^{n-10}} + x\sqrt{y} + 2xy^3$ обчислити наближене значення в точці *A (–1,001n; 1+0,001n)* за допомогою диференціалу (*n* – номер студента за списком).

§ 3. Похідні та диференціали вищих порядків

Як і для функції однієї змінної, частинна похідна також є функцією. Наприклад, якщо $z = x^3 y^2$, то $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y^2$ і $\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3 y$. Тому ці похідні можемо знову диференціювати, причому не тільки за змінною x, але й за змінною y.

Одержимо другі частинні похідні (їх чотири): $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6xy^2$, $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 6x^2 y$, $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x^3$, $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6x^2 y$.

Похідна $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ та $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ називається мішаною похідною. Аналогічно знаходяться похідні більш високих порядків. Так наприклад, $\frac{\partial^6 z}{\partial x^6}$ є шостою частинною похідною і означає, що від функції $z = f(x, y)$ шість разів підряд знаходились похідні за змінною x. Похідна $\frac{\partial^6 z}{\partial x^3 \partial y^2 \partial x}$ є шостою мішаною похідною і означає, що спочатку три рази підряд знаходили похідні за змінною x, потім двічі за змінною y, і в кінці один раз за змінною x. Таким чином, вигляд похідної вказує на прийнятий порядок диференціювання. Для неперервних функцій, які мають неперервні похідні, порядок диференціювання несуттєвий, тобто можемо стверджувати, що:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \ \frac{\partial^6 z}{\partial x^3 \partial y^2 \partial x} = \frac{\partial^6 z}{\partial x^4 \partial y^2} = \frac{\partial^6 z}{\partial y^2 \partial x^4} = \frac{\partial^6 z}{\partial x \partial y \partial x \partial y \partial x^2} \text{ і т.д.}$$

В наведеному прикладі $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 6x^2 y$.

Таким чином, порядок диференціювання для мішаних похідних ролі не грає. Всі вказані ствердження також відносяться і до функцій декількох змінних.

Приклад: Знайти частинні похідні перших трьох порядків для функції $z = (x^2 + y^3)(x^3 - y^2)$.

Розв'язання: Розкриємо дужки: $z = x^5 + x^3 y^3 - x^2 y^2 - y^5$.

Перший порядок: $\frac{\partial z}{\partial x} = 5x^4 + 3x^2 y^3 - 2xy^2$; $\frac{\partial z}{\partial y} = 3x^3 y^2 - 2x^2 y - 5y^4$.

Другий порядок: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 20x^3 + 6xy^3 - 2y^2$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x^3 y - 2x^2 - 20y^3$;

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 9x^2 y^2 - 4xy$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 9x^2 y^2 - 4xy$, тобто $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Третій порядок: $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 60x^2 + 6y^3$. $\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = 6x^3 - 60y^2$;

$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = 18xy^2 - 4y$; $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = 18xy^2 - 4y$; $\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial x} = 18xy^2 - 4y$;

$\frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} = 18x^2 y - 4x$; $\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y} = 18x^2 y - 4x$; $\frac{d^3 z}{dxdydz} = 18x^2 y - 4x$.

Отже : $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial x}$; $\frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial y}$.

Диференціал другого порядку:

$$d(dz) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) dx + d\left(\frac{\partial z}{\partial y} dy\right) dy = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx +\right.$$

$$+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy\Bigg)dx+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}dx+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy\right)dy=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}dydx+$$

$$+\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.$$

Отже:

$$d^2 z=\frac{\partial^2 z}{\partial x}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\ . \qquad (9.5)$$

Аналогічно знаходиться $d^3 z$, як $d(d^2 z)$:

$$d^3 z=\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3+3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}dx^2dy+3\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}dxdy^2+\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3.$$

<u>Приклад:</u> Знайти три перших диференціали функції $z=(x^2+y^3)(x^3-y^2)$.

Розв'язання: $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=(5x^4+3x^2y^3-2xy^2)dx+(3x^3y^2-2x^2y-5y^4)dy$.

$$d^2 z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2=(20x^3+6xy^3-2y^2)dx^2+$$

$$+2(9x^2y^2-4xy)dxdy+(6x^3y-2x^2-20y^3)dy^2.$$

$$d^3 z=\frac{\partial^3 z}{\partial x^2}dx^3+3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}dx^2dy+3\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}dxdy^2+\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy=(60x^2+$$

$$+6y^3)dx^3+3(18xy^2-4y)dx^2dy+3(18x^2y-4x)dxdy^2+(6x^3-60y^2)dy^3.$$

Аналогічним методом знаходяться диференціали функцій декількох змінних.

Наприклад, якщо $z=f(x,y,t)$, то $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy+\frac{\partial z}{\partial t}dt$, звідки

$$d^2 z=d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx+d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy+d\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)dt=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+$$

$$+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial t}dxdt+2\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial t}dydt+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}dt^2=$$

$$=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}dt^2+2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial t}dxdt+\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial t}dydt\right).$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Знайти частинні похідні другого та третього порядку для наступних функцій:

8.71. $z=4x^3y^2-12xy^3-\sqrt{xy}$; **8.72.** $z=x^3y+2x^2y^2-\sqrt{x+y}$;

8.73. $z=3x^2y^3+2x^3y^2+\sqrt{2x}$; **8.74.** $z=4x^4y^3+\frac{1}{2}x^3y^2+\sqrt{3+y}$;

8.75. $z = x^4 y^3 + xy^2 + coos$; **8.76.** $z = xy^3 + x^{10} y^2 + sinx$;

8.77. $z = \ln y^3 + xy^2 + sin2x$; **8.78.** $z = \ln^2 y + x^4 y^2 + siny^2$;

8.79. $z = 2\log_2 x + 3\sqrt{x} y^2 + 6y$; **8.80.** $z = \log_3 y + 3xy^2 + 10x$;

Індивідуальне завдання

Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ функцій:

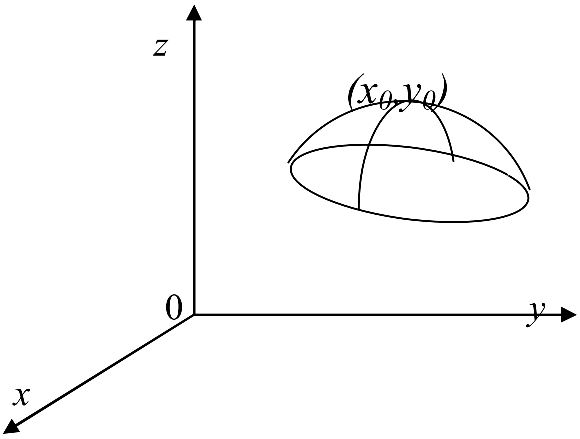
а) $z = 2x^n y^{n+2} - \frac{1}{ny} x^{2n} - 4y\sqrt{x}$; б) $z = e^{nx} - \sqrt[n]{y}$;

де n – остання цифра номера студента за списком.

§4. Аналіз функції двох змінних

Дослідимо функцію двох змінних на екстремум.

Нехай задано неперервну функцію $z = f(x,y)$, яка може мати в області завдання $\begin{pmatrix} x \in [a;b] \\ y \in [c;d] \end{pmatrix}$ максимум і мінімум.



Якщо існує деякий окіл точки $(x_0; y_0)$, в якому функція буде мати найбільше значення тільки в точці $(x_0; y_0)$, а у всіх інших точках її значення менші, то в точці $(x_0; y_0)$ функція має максимум. Якщо ж значення функції в цій точці будуть меншими, ніж у всіх інших точках околу, то будемо мати мінімум. Точки максимума та мінімума – це точки екстремуму.

В точках максимуму та мінімуму дотичні, паралельні осям ox та oy, будуть паралельні площині xOy, тому $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ і $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$. Точки, в яких частинні похідні дорівнюють нулю, називаються стаціонарними. Отже, якщо є максимум чи мінімум, то обов’язково частинні похідні дорівнюють нулю. Але обернене ствердження може бути неправильним. Наприклад, якщо проекція поверхні на площину xOz дає максимум ($\frac{\partial z}{\partial x} = 0$), а проекція на площину yOz дає мінімум ($\frac{\partial z}{\partial y} = 0$), то в точці $(x_0; y_0)$ немає ні максимуму, ні мінімуму, хоч обидві похідні дорівнюють нулю (в цьому випадку “стала” точка $(x_0;y_0)$ носить назву мінімакс). Тому умова $\frac{\partial z}{\partial x}=0$ і $\frac{\partial z}{\partial y}=0$ є тільки необхідною умовою.

Якщо $z=f(x,y)$ має неперервні похідні першого та другого порядків, то можемо знайти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ і ввести позначення: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=A$ в точці $(x_0;y_0)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=B$ в точці $(x_0;y_0)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=C$ в точці $(x_0;y_0)$.

Обчислимо визначник $\Delta=AC-B^2$. Якщо

1) $\Delta<0$, то функція в точці $(x_0;y_0)$ екстремуму не має.

2) $\Delta>0$, то екстремум існує, причому це максимум, якщо $A<0$, і мінімум, якщо $A>0$.

3) $\Delta=0$, то функція може мати екстремуми, а може їх не мати. В цьому випадку потрібні додаткові дослідження.

Вказані твердження про знак та величину Δ називаються достатньою умовою.

Приклад: Дослідити на екстремум функцію

$$z=x^2-xy+y^2+9x-6y+20.$$

Розв'язання: Знаходимо частинні похідні функції:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x-y+9;\ \frac{\partial z}{\partial y}=-x+2y-6.$$

Розглянемо систему двох рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases}2x-y+9=0\\ 2y-x-6=0\end{cases}.$$

Розв'язком цієї системи будуть числа $x=-4$, $y=1$. Тобто критична точка має координати $M_0(-4;1)$.

Обчислимо частинні похідні другого порядку в точці M_0:

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{M_0(-1;4)}=2;\ C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big|_{M_0(-1;4)}=2;\ B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{M_0(-1;4)}=-1.$$

Тоді: $\Delta=A\cdot C-B^2=4-1=3$>0. Оскільки A>0, то існує мінімум функції в точці $M_0(-4;1)$, $z_{\min}=z(-4;1)=-1$.

Якщо для функції $z=f(x;y)$ в точці $(x_0;y_0)$ виконується умова:

$$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=0 \end{cases}$$, то точка $(x_0;y_0)$ називається особливою точкою.

Якщо ця точка перетворює функцію в нуль, але на кривій не лежить, то вона називається ізольованою точкою.

Умова $f(x,y)=0$ фактично перетворює функцію двох змінних в функцію однієї змінної в неявному вигляді, а особливі точки знаходимо з наслідків теорії функцій двох змінних (неявна функція $f(x,y)=0$ є частковим випадком функції двох змінних $z=f(x,y)$, коли $z=0$).

Приклад: дослідити функцію $y^2-x(x-2)^2=0$.

Функція має неявний вигляд, тобто $z=0$.

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-1\cdot(x-2)^2-x\cdot 2(x-2)\cdot 1=-(x-2)(3x-2)$. $\dfrac{\partial z}{\partial y}=2y$.

Розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} y^2-x(x-2)^2=0 \\ (x-2)(3x-2)=0 \\ 2y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{2}{3} \\ x=2 \end{array}\right. \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}.$$

Отримали особливу точку $(2;0)$.

Важливими є задачі на умовний екстремум, коли шукається екстремум функції $z=f(x;y)$ за умови, що змінні х та у зв'язані рівнянням зв'язку $\varphi(x;y)=0$. Така задача зводиться на дослідження на безумовний екстремум функції Лагранжа $L=(x,y,\lambda)$.

$L=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$, де число λ називається множником Лагранжа.

Після виключення λ досліджуємо на екстремум функцію Лагранжа, як функцію двох змінних $L=(x,y)$.

Приклад: Дослідити на умовний екстремум функцію $z=x^2+y^2$, за умови $x+y=1$.

Розв'язання: Функція Лагранжа буде мати вигляд

$L=(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda(x+y-1)$.

Запишемо необхідні умови екстремуму:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x + \lambda = 0\,;\; \frac{\partial L}{\partial y} = 2y + \lambda = 0\,;\; \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x + y - 1 = 0\,.$$

Звідки отримуємо $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$. Тобто критична точка має координати $M_0\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, $\lambda = -1$.

$$L = (x, y) = x^2 + y^2 - (x + y - 1).$$

Тоді частинні похідні першого та другого порядку дорівнюють: $L'_x = 2x - 1$, $L'_y = 2y - 1$, $L''_{xx} = 2 = A$, $L''_{yy} = 2 = C$, $L''_{xy} = 0 = B$.

$\Delta = A \cdot C - B^2 = 4 > 0$. Оскільки A>0, то існує мінімум функції:

$$z_{\min} = z\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\,.$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Дослідити на екстремум функції двох змінних:

8.81. $z = -800 - x^2 - y^2 + 40x + 60y$;

8.82. $z = 250 - x^2 - y^2 + 20x + 100y$;

8.83. $z = -1800 - x^2 - y^2 + 80x + 60y$;

8.84. $z = -2100 - x^2 - y^2 + 40x + 100y$;

8.85. $z = -1700 - x^2 - y^2 + 40x + 80y$;

8.86. $z = -1500 - x^2 - y^2 + 20x + 80y$;

8.87. $z = -2000 - x^2 - y^2 + 100x + 40y$;

Дослідити на умовний екстремум:

8.88. $z = x + y$; за умови $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{2}$;

8.89. $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, за умови $x + y = 2$;

8.90. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$, за умови $x + y + 3 = 0$.

Індивідуальне завдання

Дослідити на екстремум функції двох змінних $z = 10n - x^2 - y^2 + nx + 10ny$.

Запитання до розділу IX:

1. Що таке функція декількох змінних?
2. Що називається частинною похідною?
3. Яка функція називається неперервною?
4. Що таке частинний та повний приріст функції?

5. Що таке частинний та повний диференціал функції?
6. Як знаходиться похідна складеної функції?
7. Як знаходиться похідна неявної функції?
8. Що називається похідною вищого порядку?
9. Що таке мішана похідна?
10. Як знаходиться диференціал другого порядку?
11. Що таке максимум та мінімум функції двох змінних?
12. Що таке екстремуми?
13. Які точки називаються стаціонарними?
14. Яка достатня умова існування екстремуму?
15. Що таке особлива точка?

X. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

§1. Первісна та невизначений інтеграл

З основ диференціального числення знаємо, що для відомої функції $y=f(x)$ маємо похідну $y' = f'(x)$. Можемо поставити обернену задачу: для відомої похідної $f'(x)$ знайти функцію $f(x)$, від якої знайдена ця похідна. Така функція називається **первісною**.

Озн: Знаходження функції $F(x)$ по відомому її диференціалу $dF(x) = f(x)dx$, тобто дія, обернена до диференціювання, називається інтегруванням, а шукана функція $F(x)$ – первісною функцією від заданої функції $f(x)$.

Отже, якщо відома похідна $f'(x)$, то її первісна буде $f(x)$. Оскільки похідна від елементарної функції залежить від аргументу x, тобто похідна є функцією від аргументу x, то можемо саму похідну позначити через $f(x)$, а первісну − через $F(x)$. Тоді:

$$(F(x))' = F'(x) = f(x),$$

або в диференціальній формі

$$dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx.$$

Наприклад, якщо $y = \sin x$, то $y' = \cos x$. Тому $\cos x$ є похідною, а $\sin x$ − первісною. Аналогічно функція $arctgx$ буде первісною для функції $\frac{1}{1+x^2}$.

Озн. Дія знаходження первісної за відомою похідною називається інтегруванням.

У геометричному змісті похідна – це тангенс кута нахилу дотичної, тому про первісну можемо говорити як про функцію, до якої в області завдання у будь-якій точці можемо побудувати дотичну. Це означає, що $f(x)$ повинна бути неперервною функцією, а сама первісна − гладенькою функцією (див. визначення гладенької функції).

Функція $\cos x$ є похідною від $\sin x$. Але й від функції $\sin x + 3$ похідна також буде $\cos x$. Адже похідна від будь-якого числа дорівнює нулю. Таким чином бачимо, що можемо створити безліч функцій виду $\sin x + C$ (C − стала величина), похідна від яких є $\cos x$. Виникає питання: чи не існують ще якісь функції, похідна від яких буде також дорівнювати $\cos x$? Або взагалі скільки первісних (і які) існує для неперервної функції $f(x)$? Нехай крім первісної $F(x)$ існує ще одна первісна $\Phi(x)$, похідна від якої також дорівнює $f(x)$. Знайдемо різницю між ними, позначивши її через $U(x)$. Маємо:

$$F(x) - \Phi(x) = U(x).$$

Похідна від $U(x)$ буде:

$$F'(x) - \Phi'(x) = U'(x).$$

Але за умовою $F'(x) = f(x)$ і $\Phi'(x) = f(x)$, тому:

$$U'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Отже, $U'(x) = 0$. Це означає, що $U(x) = C$ (похідна від сталої завжди дорівнює нулю). Таким чином, для функції $f(x)$ її первісні $F(x)$ та $\Phi(x)$ відрізняються між собою тільки на число, тобто:

$$\Phi(x) = F(x) + C.$$

Висновок. Для будь-якої похідної існує безліч первісних, але всі вони відрізняються тільки на число. Тому можемо в цілому сказати: для функції $f(x)$ існує первісна $F(x) + C$. У вигляді математичної формули це записується так:

$$\int f(x)dx = F(x) + C. \tag{10.1}$$

Символ $\int f(x)dx$ (читається: інтеграл від еф від ікс деікс) ввів Г. Лейбніц як поняття граничної суми. Розташована під знаком інтеграла функція називається підінтегральною функцією. З рівності (10.1) маємо:

$$f(x) = F'(x) \Rightarrow f(x)dx = dF(x) \Rightarrow \int dF(x) = F(x) \Rightarrow \left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

Озн. 2: Загальний вираз $F(x) + C$ сукупності всіх первісних від функцій $f(x)$ називається невизначеним інтегралом від цієї функції і позначається:

$$\int f(x)dx = F(x) + C. \tag{10.2}$$

Щоб переконатися в правильності проведеного інтегрування, необхідно знайти похідну від отриманої первісної і впевнитись в тому, що вона співпадає з підінтегральною функцією.

Залежно від підінтегральної функції використовують ті чи інші методи знаходження первісної, які називають методами інтегрування, але всі вони у кінцевому результаті зводяться до знаходження наступних елементарних інтегралів, які необхідно запам'ятати:

Запишемо основні формули інтегрування:

1.	$\int dx = x + C$	2.	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C;\ (n \neq -1)$
3.	$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$	4.	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
5.	$\int e^x dx = e^x + C$	6.	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
7.	$\int \cos x dx = \sin x + C$	8.	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$
9.	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$	10.	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg\ \frac{x}{a} + C$
11.	$\int \frac{dx}{\sqrt{a - x^2}} = \arcsin\ \frac{x}{a} + C$	12.	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\lvert v + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\rvert + C$
13.	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\lvert\frac{x - a}{x + a}\right\rvert + C$	14.	$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\lvert\frac{a + x}{a - x}\right\rvert + C$

Властивості невизначеного інтеграла:

1. $\left(\int f(x)dx\right)'_x = f(x)$;

2. $\int F'(x)dx = F(x) + C$;

3. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$, тобто сталий множник можна винести за знак інтеграла.

4. $\int (f_1(x) + f_2(x) - f_3(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx - \int f_3(x)dx$, тобто інтеграл від алгебраїчної суми дорівнює алгебраїчній сумі всіх доданків.

5. $\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k} \cdot F(kx+b)$.

Приклад: Обчислити невизначений інтеграл $\int (x^2 + \frac{7}{x} - \frac{4}{1+x^2})dx$.

$$\int (x^2 + \frac{7}{x} - \frac{4}{1+x^2})dx = \int x^2 dx + \int \frac{7}{x} dx - \int \frac{4}{1+x^2} dx = \int x^2 dx + 7\int \frac{1}{x} dx - 4\int \frac{1}{1+x^2} dx =$$

$$\frac{x^3}{3} + C_1 + 7\ln x + C_2 - 4arctgx + C_3 = \frac{x^3}{3} + 7\ln x - 4arctgx + C.$$

З цього прикладу робимо висновок: якщо маємо суму інтегралів, то немає ніякого сенсу після кожного обчисленого інтеграла писати сталу, її пишуть після обчислення всіх інтегралів.

§ 2. Найпростіші методи інтегрування

а) Метод безпосереднього інтегрування.

Даний метод полягає в тому, що для знаходження інтеграла ми безпосередньо користуємося формулами інтегрування.

Приклад: Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \left(5x^3 - \frac{1}{4}x^4 + 2x - 1\right)dx$; б) $\int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^5} - \frac{7}{x^3})dx$;

Розв'язання: Для знаходження невизначеного інтегралу користуємося таблицею інтегралів.

а) $\int \left(5x^3 - \frac{1}{4}x^4 + 2x - 1\right)dx = 5\int x^3 dx - \frac{1}{4}\int x^4 dx + 2\int x dx - \int dx =$

$$= \frac{5x^{3+1}}{3+1} - \frac{x^{4+1}}{4(4+1)} + \frac{2x^{1+1}}{1+1} - x + C = \frac{5x^4}{4} - \frac{x^5}{20} + x^2 - x + C.$$

б) $\int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^5} - \frac{7}{x^3})dx = \int \sqrt{x}dx + \int \sqrt[3]{x^5}dx - \int \frac{7}{x^3}dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx + \int x^{\frac{5}{3}}dx - 7\int x^{-3}dx =$

$$= \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{x^{\frac{5}{3}+1}}{\frac{5}{3}+1} - 7\int x^{-3}dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{x^{\frac{5}{3}+1}}{\frac{5}{3}+1} - 7 \cdot \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{8}{3}}}{\frac{8}{3}} - 7\frac{x^{-2}}{-2} + C =$$

$$7\cdot\frac{x^{-2}}{-2}+C=\frac{2}{3}\cdot\sqrt{x^3}+\frac{3}{8}\cdot\sqrt[3]{x^8}+\frac{7}{2}\cdot\frac{1}{x^2}+C.$$

б) Метод заміни змінної (підстановки).

Якщо заданий інтеграл $\int f(x)dx$ не може бути знайдений безпосередньо за основними формулами, то введенням нової незалежної змінної в багатьох випадках вдається перетворити підінтегральний вираз $\int f(x)dx$ в легко інтегрований. При цьому інтеграл зводиться до табличного або до такого, спосіб обчислення якого відомо. Заміна змінної інтегрування і складає суть методу, що називається методом підстановки.

Приклад: Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int\cos(9x-4)dx$; б) $\int\frac{\ln x}{x}dx$;

Розв'язання:

$$\text{а)}\int\cos(9x-4)dx=\left|\begin{array}{l}9x-4=t\\ 9dx=dt\\ dx=\frac{1}{9}dt\end{array}\right|=\int\cos t\cdot\frac{1}{9}dt=\frac{1}{9}\int\cos t\cdot dt=\frac{1}{9}\sin t+C=$$

$$=\frac{1}{9}\sin(9x-4)+C.$$

$$\text{б)}\int\frac{\ln x}{x}dx=\left|\ln x=t\Rightarrow\frac{dx}{x}=dt\right|\Rightarrow\int t\cdot dt=\frac{1}{2}t^2+C=\frac{1}{2}\ln^2 x+C.$$

в) Інтегрування частинами.

Із формули диференціала добутку $d(uv)=duv+udv$ інтегруванням обох частин рівності одержується формула інтегрування частинами:

$$\int udv=uv-\int vdu. \qquad (10.3)$$

За цією формулою знаходження інтеграла $\int udv$ зводиться до знаходження іншого інтеграла $\int vdu$. Застосовувати цю формулу зручно у тих випадках, коли $\int vdu$ буде легко знаходитися. Для застосування формули інтегрування частинами необхідно підінтегральний вираз представити у вигляді добутку двох співмножників u та dv. За dv завжди вибирають такий вираз, що містить dx, із якого інтегруванням можна знайти v. За u в більшості випадків приймається функція, яка за диференціювання спрощується.

Приклад: Знайти невизначений інтеграл $\int\ln xdx$.

$$\int\ln xdx=\left|\begin{array}{c}\ln x=u;\frac{dx}{x}=du\\ dx=dv;x=v\end{array}\right|=x\ln x-\int x\cdot\frac{1}{x}\cdot dx=x\ln x-\int dx+C=$$

$$x\cdot\ln x-x+C.$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Знайти невизначені інтеграли:

9.1. $\int (10x^2 + 2x + \frac{3}{x})dx$;

9.2. $\int (10x + \frac{1}{7} + \cos x)dx$;

9.3. $\int (\frac{1}{5}x + 5 + \cos x)dx$;

9.4. $\int (10x^5 - x + \frac{3}{x})dx$;

9.5. $\int \left(2x^7 - \frac{1}{6}x^6 - 2\right)dx$;

9.6. $\int \left(4x^2 - 7x + 2\right)dx$;

9.7. $\int (3x^2 + 4x + \frac{5}{x})dx$;

9.8. $\int (10x^4 + 12x + \sin x)dx$;

9.9. $\int (4x^3 + 2x^2 + \frac{1}{x})dx$;

9.10. $\int (\frac{1}{3}x^2 + 3x + \frac{4}{x})dx$;

9.11. $\int (\sqrt[4]{x} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^{11}}})dx$;

9.12. $\int (7x^2 + \frac{1}{\sqrt[9]{x^5}} + 6)dx$;

9.13. $\int (\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^5}})dx$;

9.14. $\int (\sqrt[7]{x} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^7}})dx$;

9.15. $\int (\sqrt[9]{x} - \frac{1}{\sqrt[7]{x^{12}}})dx$;

9.16. $\int (\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt[5]{x^6}})dx$;

9.17. $\int (\sqrt[11]{x} - \frac{1}{\sqrt[6]{x^5}})dx$;

9.18. $\int \left(3\sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{x^4} + 1\right)dx$;

9.19. $\int \left(4\sqrt[7]{x^8} + \frac{1}{3x^3} + 2\right)dx$;

9.20. $\int (\sqrt[7]{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - 2x)dx$.

Знайти невизначені інтеграли, користуючись заміною змінних:

9.21. $\int \cos\left(4x + 1\right)dx$;

9.22. $\int \frac{dx}{1 - 3x}$;

9.23. $\int e^{6-4x}dx$;

9.24. $\int 4^{\frac{x}{4}+1}dx$;

9.25. $\int \frac{dx}{\sin^2\left(3 - 4x\right)}$;

9.26. $\int \frac{dx}{\left(3 - 4x\right)^2 + 1}$;

9.27. $\int cos\left(8x + 3\right)dx$;

9.28. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 9x^2}}$;

9.29. $\int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{3}}$;

9.30. $\int \frac{dx}{3 - 8x}$;

9.31. $\int \frac{x^4}{x^5 + 1}dx$;

9.32. $\int \frac{e^x}{e^{2x} + 1}dx$;

9.33. $\int x^2\sqrt{x^3 - 4}dx$;

9.34. $\int \frac{1}{x \ln x}dx$;

9.35. $\int \frac{e^x}{e^x+1}dx$;

9.36. $\int \frac{\ln^2 x}{x}dx$;

9.37. $\int \frac{1}{x\ln^2 x}dx$;

9.38. $\int \frac{x^3}{x^4+1}dx$;

9.39. $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}dx$;

9.40. $\int \frac{\ln x}{x}dx$.

Знайти невизначені інтеграли, користуючись формулою інтегрування частинами.

9.41. $\int xe^x dx$;

9.42. $\int x^2 \ln x dx$;

9.43. $\int (x-2) cosxdx$;

9.44. $\int (6+x) sinxdx$;

9.45. $\int \sqrt{x} \ln x dx$;

9.46. $\int \frac{\ln x}{x^2}dx$;

9.47. $\int \frac{x}{\sin^2 x}dx$;

9.48. $\int x^2 cosxsx$;

9.49. $\int (x+3)^2 e^{2x} dx$;

9.50. $\int (4-x)^2 sii\, 5xdx$.

Індивідуальне завдання

Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int (5x^n + 2x^{n-1} + \frac{n}{x^n})dx$;

б) $\int (\sqrt[n]{x} - \frac{n-1}{\sqrt[3]{x^{n+3}}} + nx)dx$;

в) $\int \frac{(n-1)dx}{\sqrt[n+1]{x+n}}$;

г) $\int (n-x)^2 e^{\frac{x}{n}} dx$.

де n – номер студента за списком.

§ 3. Інтеграли, що зводяться самі до себе

Зустрічаються такі інтеграли, для яких застосування формули інтегрування ”частинами” призводить до того, що інтеграл у правій частині формули відрізняється від інтеграла у лівій частині лише множником, тобто у формулі $\int udv = uv - \int vdu$ маємо: $\int vdu = k\int udv$. Тому:

$$\int udv = uv - k\int udv.$$

Вводячи заміну $\int udv = I$, отримаємо формулу:

$$I = uv - kI \Rightarrow I = \frac{uv}{1+k} + C.$$

Число k – залежить від підінтегральної функції і може бути як додатним, так і від’ємним. Число C у формулі дописане згідно з поняттям невизначеного інтеграла.

Приклад: Обчислити $\int e^x \sin x \cdot dx$.

В добутку функцій зв'язок через похідну відсутній (похідна від $e^x \neq \sin x$ та похідна від $\sin x \neq e^x$), тому використовуємо формулу інтегрування „частинами".

$$I = \int e^x \sin x \cdot dx = \begin{vmatrix} \sin x = u; \cos x \cdot dx = du \\ e^x dx = dv; e^x = v \end{vmatrix} = e^x \sin x - \int e^x \cos x \cdot dx.$$

Але у цьому інтегралі також є добуток незв'язаних через похідну функцій, тому до нього застосовуємо формулу інтегрування "частинами". Отже, будемо мати:

$$I = e^x \sin x - \int e^x \cos x \cdot dx = \begin{vmatrix} \cos x = u; -\sin x \cdot dx \\ e^x dx = dv; e^x = v \end{vmatrix} = e^x \sin x - (e^x \cos x -$$

$$-\int e^x (-\sin x) dx) = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \cdot dx = e^x (\sin x - \cos x) - I.$$

Одержали: $I = e^x(\sin x - \cos x) - I \Rightarrow 2I = e^x(\sin x - \cos x) \Rightarrow I = \dfrac{e^x(\sin x - \cos x)}{2}$.

Інтеграл невизначений, тому:

$$\int e^x \sin x \cdot dx = \frac{e^x (\sin x - \cos x)}{2} + C.$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Знайти невизначені інтеграли:

9.51. $\int e^{2x} \cos 3x \cdot dx$;

9.52. $\int e^{3x} \sin 2x \cdot dx$;

9.53. $\int e^{5x} \sin 4x \cdot dx$;

9.54. $\int e^{4x} \cos 3x \cdot dx$;

9.55. $\int 5^{3x} \cos 7x \cdot dx$;

9.56. $\int 3^{x} \sin 3x \cdot dx$;

9.57. $\int e^{-3x} \sin 3x \cdot dx$;

9.58. $\int e^{-4x} \cos 5x \cdot dx$;

9.59. $\int e^{-x} \cos 2x \cdot dx$;

9.60. $\int e^{x} \sin(3x-2) dx$.

Індивідуальне завдання

Знайти невизначений інтеграл: $\int \cos nx \cdot e^{\frac{x}{n}} dx$

де n – номер студента за списком.

§4. Інтегрування правильного алгебраїчного дробу

Алгебраїчний раціональний дріб − це дріб виду $\dfrac{R_n(x)}{S_m(x)}$, де $R_n(x)$ і $S_m(x)$ є многочленами виду:

$$R_n(x) = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \ldots + A_1 x + A_0 \text{ і}$$
$$S_m(x) = B_m x^m + B_{m-1} x^{m-1} + \ldots + B_1 x + B_0.$$

В цих многочленах степені n та m − цілі числа. Якщо $n < m$, то дріб буде правильним, а якщо $n \geq m$, то неправильним. Якщо дріб неправильний, то шляхом ділення чисельника на знаменник виділяємо цілу частину і отримуємо правильний дріб (наприклад, для числового дробу

$\frac{17}{3}=\frac{15+2}{3}=5+\frac{2}{3}$). Для неправильного функціонального дробу після ділення одержимо:

$$\frac{R_n(x)}{S_m(x)}=P_{n-m}(x)+\frac{W_k(x)}{S_m(x)}, \tag{10.4}$$

де $P_{n-m}(x)$ та $W_k(x)$ − правильні многочлени. Таким чином, інтегрування неправильного дробу зводиться до інтегрування многочлена $P_{n-m}(x)$ та правильного дробу $\frac{W_k(x)}{S_m(x)}$.

Приклад: Виділити цілу частину з неправильного алгебраїчного дробу

$$\frac{x^4-x^3-3x^2-10x-12}{x^2-2x-8}.$$

Ділимо чисельник на знаменник:

$$\begin{array}{rl|l}
 & x^4-x^3-3x^2-10x-12 & x^2-2x-8 \\ \cline{3-3}
- & \underline{x^4-2x^3-8x^2} & x^2+x+7 \\
 & x^3+5x^2-10x & \\
- & \underline{x^3-2x^2-8x} & \\
 & 7x^2-2x-12 & \\
- & \underline{7x^2-14x-56} & \\
 & 12x+44 &
\end{array}$$

Отже, $\frac{x^4-x^3-3x^2-19x-12}{x^2-2x-8}=x^2+x+7+\frac{12x+44}{x^2-2x-8}$.

Приклад: Обчислити $I=\int\frac{x^4-x^3-3x^2-10x-12}{x^2-2x-8}dx.$

Підінтегральна функція є попереднім дробом, тому можемо записати:

$$I=\int\frac{x^4-x^3-3x^2-10x-12}{x^2-2x-8}dx=\int(x^2+x+7+\frac{12x+44}{x^2-2x-8})dx=$$

$$=\int(x^2+x+7)dx+\int\frac{12x+44}{x^2-2x-8}dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+7x+\int\frac{12x+44}{x^2-2x-8}dx\ .$$

Останній інтеграл − інтеграл від правильного алгебраїчного дробу, який ще треба навчитись обчислювати. Тому до цього інтеграла повернемося дещо пізніше.

Згідно з основною теоремою алгебри будь-який многочлен степеня n може бути розкладеним на лінійні та квадратичні множники, тобто:

$$S_m(x)=(x-a)^{\alpha}\cdot(x-b)^{\beta}\cdot\ldots\cdot(x^2+px+q)\cdot\ldots, \tag{10.5}$$

де α і β − натуральні числа, що вказують на кратність коренів a та b.

Квадратичні вирази виду x^2+px+q на множники не розкладаються (дискримінант від'ємний). Після проведеного розкладання правильний дріб буде мати вигляд:

$$\frac{W_k(x)}{S_m(x)} = \frac{W_k(x)}{(x-a)^\alpha \cdot (x-b)^\beta \cdot \ldots \cdot (x^2+px+q) \cdot \ldots}.$$

Знаменник дробу – добуток функцій, що свідчить про те, що цей правильний дріб одержаний в результаті додавання декількох дробів, кожен з яких є правильним дробом, тобто отримаємо:

$$\frac{W_k(x)}{(x-a)^\alpha \cdot (x-b)^\beta \cdot \ldots \cdot (x^2+px+q)+\ldots} = \frac{f_1(x)}{(x-a)^\alpha} + \frac{f_2(x)}{(x-b)^\beta} + \ldots +$$

$$+\frac{f_i(x)}{x^2+px+q} + \ldots \text{ (наприклад, } \frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7} = \frac{71}{3\cdot 5\cdot 7} = \frac{71}{105}\text{)}. \qquad (10.6)$$

Наголошуємо, що дріб правильний, тобто менший від одиниці, тому дроби, які в сумі утворюють заданий дріб як складові частини, також правильні дроби (кожен з них менший від одиниці).

Розглянемо дріб $\frac{f_1(x)}{(x-a)^\alpha}$.

Цей дріб можемо розкласти на складові частини (нагадуємо, що $\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}=\frac{7}{2^3}$).

Його чисельник є многочленом степеня, що не перевершує число $(\alpha-1)$ (дріб правильний), тому можемо його записати у вигляді:

$$f_1(x) = A_{\alpha-1}x^{\alpha-1} + A_{\alpha-2}x^{\alpha-2} + \ldots + A_1x + A_0.$$

Якщо застосувати заміну $x=(x-a)+a$, то отримаємо:

$f_1(x) = C_{\alpha-1}(x-a)^{\alpha-1} + C_{\alpha-2}(x)^{\alpha-2} + \ldots + C_1(x-a) + C_0$, де коефіцієнти C_k складені з коефіцієнтів від A_0 до $A_{\alpha-1}$. Тоді:

$$\frac{f_1(x)}{(x-a)^\alpha} = \frac{C_{\alpha-1}(x-a)^{\alpha-1} + C_{\alpha-2}(x-a)^{\alpha-2} + \ldots + C_1(x-a) + C_0}{(x-a)^\alpha} = \frac{C_{\alpha-1}}{x-a} + \frac{C_{\alpha-2}}{(x-a)^2} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{C_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \frac{C_0}{(x-a)^\alpha}$$

Таким чином, правильний дріб виду $\frac{f_1(x)}{(x-a)^\alpha}$ розкладається на суму дробів, чисельники яких – числа. Аналогічно розкладається дріб $\frac{f_2(x)}{(x-b)^\beta}$.

Розглянемо правильний дріб $\frac{f_i(x)}{x^2+px+q}$, чисельник якого – многочлен виду $Ax+B$ (степінь чисельника обов’язково менший степеня знаменника не менше, ніж на одиницю).

Враховуючи, що інтеграл від суми функцій дорівнює сумі інтегралів від кожної з них, розкладання правильного дробу на складові приводить до знаходження наступних інтегралів:

$$1)\ \int\frac{kdx}{x-a};\qquad 2)\int\frac{k\cdot dx}{(x-a)^n};\qquad 3)\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx.$$

Відомо, що

$$\int\frac{k\cdot dx}{x-a}=k\int\frac{dx}{x-a}=\begin{vmatrix}x-a=t\\ dx=dt\end{vmatrix}=k\int\frac{dt}{t}=k\cdot\ln t+C=k\cdot\ln(x-a)+C\ .$$

Також відомо $\int\frac{k\cdot dx}{(x-a)^n}=k\int\frac{dx}{(x-a)^n}=k\int(x-a)^{-n}dx=\begin{vmatrix}x-a=t\\ dx-dt\end{vmatrix}=k\int t^{-n}dt=$

$$=k\cdot\frac{t^{-n+1}}{-n+1}+C=k\cdot\frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1}+C=\frac{k}{-n+1}\cdot\frac{1}{(x-a)^{n-1}}+C\ .$$

Розглянемо $\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx.$ Відомо, що $\int\frac{dx}{x}=\ln x+C.$

Тоді: $\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\begin{vmatrix}f(x)=t\\ f'(x)dx=dt\end{vmatrix}=\int\frac{dt}{t}=\ln t+C=\ln\ f(x)+C.$

З наведеного інтегралу робимо висновок: якщо підінтегральна функція є дробом, чисельник якого – похідна від знаменника, то такий інтеграл завжди буде дорівнювати натуральному логарифму знаменника.

Тому, якщо $Ax+B=(x^2+px+q)'$, то:

$$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=\int\frac{(x^2+px+q)'}{x^2+px+q}dx=\ln(x^2+px+q)+C\ .$$

Будь-яка зміна числа A може призвести до появи деякого множника перед інтегралом, але якщо $A=0$, то $(x^2+px+q)\neq A$.

Отже: $\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=\ln(x^2+px+q)+C$, якщо $Ax+B=(x^2+px+q)'$.

Розглянемо $\int\frac{B}{x^2+px+q}dx=B\int\frac{dx}{x^2+px+q}$.

Згадуємо, що підінтегральний квадратичний вираз на множники не розкладається. В таких випадках необхідно у квадратичному виразі виділити повний квадрат. Розглянемо на прикладі.

<u>Приклад:</u> Обчислити інтеграл, виділивши повний квадрат у знаменнику:

а) $\int\frac{dx}{x^2+4x+8}$; б) $\int\frac{dx}{\sqrt{2-6x-9x^2}}$.

Розв'язання:

а) $\int\frac{dx}{x^2+4x+8}$.

$x^2+4x+8=x^2+2\cdot2\cdot x+2^2-2^2+8=(x+2)^2+4=(x+2)^2+2^2$. Тоді:

$$\int\frac{dx}{x^2+4x+8}=\int\frac{dx}{(x+2)^2+2^2}=\frac{1}{2}arctg\frac{x+2}{2}+C\ .$$

б) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-6x-9x^2}}$.

$2-6x-9x^2=-\left(9x^2+6x-2\right)=-\left((3x)^2+2\cdot 3x+1-1-2\right)=-(3x+1)^2+3=$
$=\sqrt{3}^2-(3x+1)^2$. Тоді:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2-6x-9x^2}}=\int \frac{dx}{\sqrt{\sqrt{3}^2-(3x+1)^2}}=\frac{1}{3}arcsin\frac{3x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

Розглянемо загальний приклад: $\int \frac{2x^4-2x^3+4x^2-x+2}{x(x-1)^2(x^2+2x+2)}dx.$

Підінтегральна функція − правильний алгебраїчний дріб, у якому чисельник є многочленом четвертого степеня, а знаменник − п'ятого степеня. Тому розкладемо дріб на суму більш простих дробів:

$$\frac{2x^4-2x^3+4x^2-x+2}{x(x-1)^2(x^2+2x+2)}\equiv\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{Dx+E}{x^2+2x+2}.$$

У цьому виразі невідомі коефіцієнти такі, що рівняння задовольняється за будь-яких значеннь x. Тому цей вираз є тотожністю.

Але $\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{Dx+E}{x^2+2x+2}=$ (*)

$$=\frac{A(x-1)^2\left(x^2+2x+2\right)+Bx(x-1)\left(x^2+2x+2\right)+Cx\left(x^2+2x+2\right)+x(Dx+E)(x-1)^2}{x(x-1)^2\left(x^2+2x+2\right)}$$

Знаменники й чисельники тотожностей рівні. Тому:

$$2x^4-2x^3+4x^2-x+2\equiv A(x-1)^2(x^2+2x+2)+Bx(x-1)(x^2+2x+2)+$$
$$+Cx(x^2+2x+2)+(Dx+E)x(x-1)^2\Rightarrow A(x^2-2x+1)\cdot(x^2+2x+2)+$$
$$+B(x^2-x)(x^2+2x+2)+C(x^3+2x^2+2x)+(Dx^2+Ex)(x^2-2x+1)\equiv$$
$$\equiv x^4(A+B+D)+x^3(B+C-2D+E)+x^2(D-A+2C-2E)+$$
$$+x(-2A-2B+2C+E)+2A\equiv 2x^4-2x^3+4x^2-x+2.$$

З тотожності випливає, що при невідомих з однаковими степенями знаходяться однакові коефіцієнти. Порівняння коефіцієнтів дає можливість записати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases}A+B+D=2\\B+C-2D+E=-2\\A-2C-D+2E=-4\\2A+2B-2C-E=1\\2A=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1\\B+D=1\\B+C-2D+E=-2\\2C+D-2E=5\\2B-2C-E=-1\end{cases}.$$

Розв'яжемо систему за правилом Крамера:

$$A=1; B=\frac{\Delta_B}{\Delta}=\frac{0}{25}=0; C=\frac{\Delta_C}{\Delta}=1; D=\frac{\Delta_D}{\Delta}=1; E=\frac{\Delta_E}{\Delta}=-1.$$

Підставляючи отримані значення коефіцієнтів у рівняння (*), одержимо:

$$\frac{2x^4-2x^3+4x^2-x+2}{x(x-1)^2(x^2+2x+2)}=\frac{1}{x}+\frac{0}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{x-1}{x^2+2x+2}.$$

Тоді:

$$\int\frac{2x^4-2x^3+4x^2-x+2}{x(x-1)^2(x^2+2x+2)}dx=\int(\frac{1}{x}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{x-1}{x^2+2x+2})dx=$$

$$=\int\frac{1}{x}dx+\int\frac{1}{(x-1)^2}dx+\int\frac{x-1}{x^2+2x+2}dx=\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}+\int\frac{(x-1)dx}{x^2+2x+2}.$$

Обчислимо останній інтеграл окремо. Похідна від знаменника дорівнює $2x+2=2(x+1)$, тому чисельник запишемо у вигляді: $x-1=(x+1)-2$. Одержимо:

$$\int\frac{x-1}{x^2+2x+2}dx=\int\frac{(x+1)-2}{x^2+2x+2}dx=\int\frac{x+1}{x^2+2x+2}dx-\int\frac{2dx}{x^2+2x+2}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{2(x+1)}{x^2+2x+2}dx-2\int\frac{dx}{(x+1)^2+1}=\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2)-2\int\frac{dx}{1+(x+1)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2)-2arctg(x+1)+C.$$

Остаточно маємо:

$$\int\frac{2x^4-2x^3+4x^2-x+2}{x(x-1)^2(x^2+2x+2)}dx=\ln x-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2)-2arctg\ (x+1)+C.$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Знайти невизначені інтеграли:

9.61. $\int\frac{dx}{x^2-7x+10}$;

9.62. $\int\frac{dx}{4x^2+4x+5}$;

9.63. $\int\frac{dx}{9x^2+6x+4}$;

9.64. $\int\frac{4x-1}{4x^2-4x+5}dx$;

9.65. $\int\frac{x-2}{x^2-7x+12}dx$;

9.66. $\int\frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}}$;

9.67. $\int\frac{dx}{\sqrt{2-6x-9x^2}}$;

9.68. $\int\frac{3x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$.

9.69. $\int\frac{5x-7}{(x+1)(x-2)}dx$;

9.70. $\int\frac{21-x}{(x-5)(x+3)}dx$;

9.71. $\int\frac{17x+13}{(2x+1)(3x+2)}dx$;

9.72. $\int\frac{x+3}{(2x-1)(3x+2)}dx$

9.73. $\int\frac{3x-4}{x^2-x}dx$;

9.74. $\int\frac{x-9}{x^2+6x+5}dx$;

9.75. $\int\frac{-14x-18}{(x+1)(x+2)(x-3)}dx$;

9.76. $\int\frac{x^2+5x+8}{(x+4)(x+3)}dx$;

9.77. $\int \frac{2x^2-4x+1}{x(5x-1)}dx$; **9.78.** $\int \frac{2x^2+x-4}{x(x+2)}dx$.

Індивідуальне завдання

Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{dx}{x^2+nx+2n}$; б) $\int \frac{nx+5}{(x+n)(nx-2)}dx$;

де n – номер студента за списком.

§5. Інтегрування деяких тригонометричних виразів

Інтеграли виду $\int \sin kx \cos lxdx$, $\int \sin kx \sin lxdx$, $\int \cos kx \cos lxdx$:

Інтеграли виду $\int \sin kx \cos lxdx$, $\int \sin kx \sin lxdx$, $\int \cos kx \cos lxdx$, де l та k дійсні числа, $l \neq k$, знаходяться за допомогою формул:

$$\sin kx \cdot \cos lxdx = \frac{1}{2}\left(\sin(k-l)x + \sin(k+l)x\right),$$

$$\sin kx \cdot \sin lxdx = \frac{1}{2}\left(\cos(k-l)x - \cos(k+l)x\right), \qquad (10.7)$$

$$\cos kx \cdot \cos lxdx = \frac{1}{2}\left(\cos(k-l)x + \cos(k+l)x\right)$$

Приклад: Знайти невизначений інтеграл $\int \sin 3x \cos 7xdx$.

$$\int sin3xcos7xdx = \frac{1}{2}\int \left(sin(3-7)x + sin(3+7)x\right)dx = \frac{1}{2}\int \left(sin(-4)x + sin10x\right)dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int sin4xdx + \int sin10xdx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}cos4x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10}cos10x + C =$$

$$\frac{\cos 4x}{8} - \frac{\cos 10x}{10} + C \ .$$

Інтеграли виду $\int R(\sin x, \cos x)dx$:

Розглянемо інтеграли виду $\int R(\sin x, \cos x)dx$. Даний запис означає, що над синусом і косинусом проводяться тільки раціональні операції: додавання та віднімання, множення на сталі величини, піднесення до цілого степеня, ділення. Іншими словами, під символом $\int R(\sin x \cos x)dx$ розуміють інтеграл від раціональної функції синуса та косинуса.

Такі інтеграли приводяться до інтегралів від інтегральної функції нового аргументу t підстановкою, яку називають універсальною: $t = tg\frac{x}{2}$, тоді

$$sinx = \frac{2t}{1+t^2},\ cosx = \frac{1-t^2}{1+t^2};\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}. \qquad (10.8)$$

Приклад: Знайти невизначений інтеграл: $\int \frac{dx}{2sinx - cosx}$

Використаємо універсальну тригонометричну підстановку $t = tg\frac{x}{2}$. Тоді:

$$\int\frac{dx}{2sinx - cosx} = \int\frac{\frac{2dx}{1+t}}{2\frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int\frac{\frac{2dx}{1+t}}{\frac{4t-1+t^2}{1+t^2}} = 2\int\frac{dt}{t^2+4t-1} = 2\int\frac{dt}{(t+2)^2-5} =$$

$$= 2\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}+2-\sqrt{5}}{tg\frac{x}{2}+2+\sqrt{5}}\right| + C = \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}+2-\sqrt{5}}{tg\frac{x}{2}+2+\sqrt{5}}\right| + C.$$

Інтеграли виду $\int\sin^m x\cos^n xdx$:

Нехай хоча б один з показників степеня є непарне число. Нехай $n = 2k+1$. В такому випадку підінтегральний вираз можна перетворити так:
$\sin^m x\cos^n xdx = \sin^m x\cos^{2k+1} xdx = \sin^m x\cos^{2k} xdx = \sin^m x\left(1-\sin^2 x\right)^k \cos xdx$.

Застосовуємо підстановку $\sin x = u$, $\cos xdx = du$. Тоді питання зводиться до інтегрування суми степеневих функцій.

Приклад: Знайти невизначений інтеграл:

$$\int\sin^3 x\cos^2 xdx = \int\sin x\sin^2 x\cos^2 xdx = \int\sin x\left(1-\cos^2 x\right)\cos^2 xdx =$$

$$= \int\cos xd(\cos x) - \int\cos^4 xd(\cos x) = \frac{\cos^2 x}{2} - \frac{\cos^5 x}{5} + C.$$

Якщо ж обидва показники степеня парні числа, то користуються тригонометричними формулами пониження степеня:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x);\ \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x) \qquad (10.9)$$

Приклад: Знайти невизначений інтеграл:

$$\int\sin^4 xdx = \frac{1}{4}\int\left(1-\cos^2 2x\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{4}\int\cos 2xdx + \frac{1}{4}\int\cos^2 2xdx =$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4\cdot 2}\sin 2x + \frac{1}{4}\int\frac{1}{2}(1+\cos 4x)dx = \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

Інтеграли виду $\int R(\sin^2 x, \cos^2 x)dx$:

При розв’язуванні інтегралів виду $\int R(\sin^2 x, \cos^2 x)dx$ необхідно застосовувати підстановку:

$$z = tgx,\ sin^2 x = \frac{z^2}{1+z^2},\ cos^2 x = \frac{1}{1+z^2};\ dx = \frac{dz}{1+z^2}. \qquad (10.10)$$

Приклад: Знайти невизначений інтеграл: $\int\frac{dx}{4+5sin^2 x - 3cosx}$.

Використаємо підстановку $z = tgx$. Тоді:

$$\int \frac{dx}{4+5sin^2x-3cos^2x}=\int \frac{\frac{dz}{1+z^2}}{4+5\frac{z^2}{1+z^2}-3\frac{1}{1+z^2}}=\int \frac{\frac{dz}{1+z^2}}{\frac{4+4z^2-3+5z^2}{1+z^2}}=\int \frac{dz}{9z^2+1}=$$

$$=\frac{1}{3}arctr3z+C=\frac{1}{3}arctg\left(3tgx\right)+C.$$

Інтеграли виду $\int R(tgx, ctgx)dx$:

Даний інтеграл розв'язується за допомогою підстановки:

$$z=tgx,\ \frac{1}{z}=ctgx,\ dx=\frac{dz}{1+z^2}. \qquad (10.11)$$

і зводиться до інтегралу від дробово-раціональної функції.

Приклад: Знайти невизначений інтеграл $\int tg^2x$.

$$\int tg^2x=\int z^2\frac{dz}{1+z^2}=\int \frac{1+z^2-1}{1+z^2}dz=\int dz-\int \frac{dz}{1+z^2}=z-arctgz+C=tgx-x+C.$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Знайти невизначені інтеграли:

9.79. $\int sin2xsin\frac{2x}{3}dx$;

9.80. $\int sin6xcos2xdx$;

9.81. $\int cos\frac{x}{2}cos\frac{x}{3}dx$;

9.82. $\int sin3xsin5xdx$;

9.83. $\int sin5xsin2xdx$;

9.84. $\int cos5xcos2xdx$;

9.85. $\int sin2xcos5xdx$;

9.86. $\int cosxcos3xdx$;

9.87. $\int \frac{dx}{sinx}$;

9.88. $\int \frac{dx}{5+4sinx}$;

9.89. $\int \frac{dx}{2+3cosx}$;

9.90. $\int \frac{dx}{3sinx+2cosx+1}$;

9.91. $\int \frac{dx}{1+cosx}$;

9.92. $\int \frac{dx}{2+sinx}$;

9.93. $\int sin^2 2xdx$;

9.94. $\int cos^2 4xdx$;

9.95. $\int cos^4 xdx$;

9.96. $\int sin^3 2xdx$;

9.97. $\int cos^5 xdx$;

9.98. $\int \frac{cos^3x}{sin^4x}dx$;

6.99. $\int \frac{sin^3x}{cos^2x}dx$;

9.100. $\int sin^4xcos^3xdx$;

6.101. $\int sin^3xcos^3xdx$;

9.102. $\int sin^5xcos^4xdx$.

Індивідуальне завдання

Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int sin\left(n+1\right)xsin\left(n+3\right)xdx$;

б) $\int sin^nxcos^{n+1}xdx$;

де n – номер студента за списком.

Запитання до розділу X

1. Що таке первісна?
2. Що таке невизначений інтеграл?
3. Властивості невизначеного інтеграла.
4. Що таке підінтегральна функція?
5. До яких функцій застосовують метод безпосереднього інтегрування?
6. Які функції інтегрують методом заміни змінних?
7. Що таке формула інтегрування „частинами”?
8. В яких випадках використовують формулу інтегрування „по частинах”?
9. Як виділити цілу частину з неправильного дробу?
10. Як розкласти правильний дріб на доданки?
11. Що таке ”повний квадрат” і як він виділяється з квадратичного виразу?
12. Як інтегрується добуток функцій синуса та косинуса?
13. Як інтегруються функції тангенса та котангенса?
14. Що таке інтеграл, який зводиться сам до себе?
15. Що таке ”універсальна заміна” при інтегруванні тригонометричних функцій?

XI. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

§1. Поняття визначеного інтеграла та його обчислення

Розглянемо деяку неперервну функцію $y = f(x)$, що задана і обмежена на інтервалі $[a;b]$ (рис.10.1).

Функція разом з прямими $x = a$, $x = b$ та віссю OX утворює плоску фігуру, яка називається криволінійною трапецією. За обчислення площі цієї криволінійної трапеції виникають певні труднощі. Якщо AB − пряма, то фігура утворює звичайну прямолінійну трапецію з відомою формулою для обчислення її площі: $S = \frac{y_1 + y_2}{2} \cdot (b - a)$.

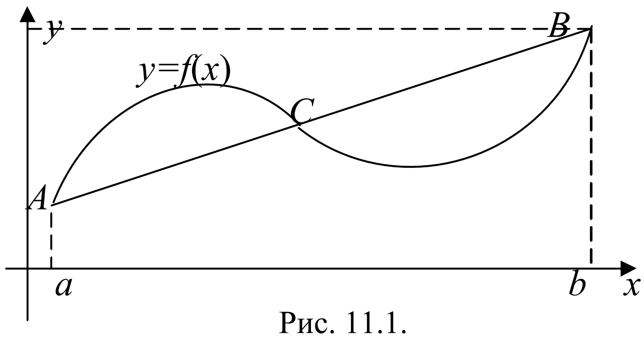


Рис. 11.1.

Застосування цієї формули до криволінійної трапеції призводить до великої помилки (відходить площа над відрізком AC і додається площа під відрізком CD, хоч ці площі нерівні між собою).

Для зменшення величини помилки розіб'ємо відрізок $(b - a)$ на частини (рис. 10.2) і отримаємо декілька криволінійних трапецій. В кожній з них кривизна функції завдяки малій величині відрізка кривої буде незначною, тому сам відрізок кривої буде дещо відрізнятись від прямої. Тому площа кожної криволінійної трапеції відрізнятиметься від відповідної площі прямолінійної трапеції, а сума площ утворює загальну площу всієї криволінійної трапеції. Чим на більшу кількість частин розбити відрізок $(b - a)$, тим точніше визначиться площа.

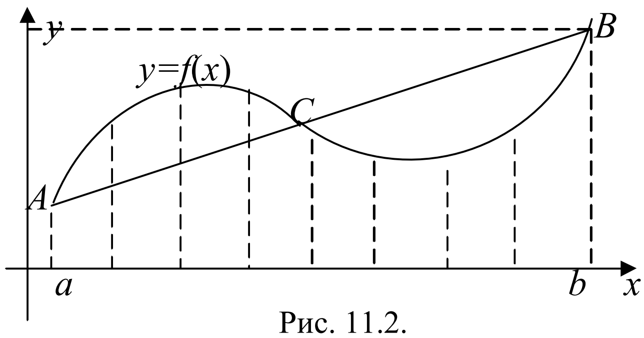


Рис. 11.2.

Якщо відрізок $(b - a)$ розбити на велику кількість частин, то відстань між двома найближчими значеннями $\Delta x = x_{i+1} - x_i$ для деякої елементарної площі S_i буде настільки малою, що різниця між значеннями функції буде несуттєвою, а сам відрізок кривої мало відрізнятиметься від прямокутника. Основу прямокутника становитиме відрізок Δx, а висоту − відрізок $f(x_i)$, як значення функції в точці x_i. Тому:

$$S_i \approx f(x_i) \cdot \Delta x .$$

Сума всіх площ утворює площу криволінійної трапеції, тобто:

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x .$$

Ця сума носить назву інтегральної суми Рімана. Абсолютно точне значення площі криволінійної трапеції отримаємо, якщо розбити всю площу на безліч частин, тобто коли $n \to \infty$, при цьому $\Delta x \to 0$. Отже, маємо формулу:

$$S = \lim_{\substack{y \to \infty \\ \Delta x \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x .$$

Озн. Граничне значення інтегральної суми Рімана $S = \lim_{\substack{y \to \infty \\ \Delta x \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x$ називається визначеним інтегралом і позначається символом $\int_a^b f(x)dx.$

Отже:
$$S = \int_a^b f(x)dx . \qquad (11.1)$$

За геометричним змістом визначений інтеграл є площею криволінійної трапеції, обмеженої знизу віссю OX, справа та зліва − прямими $x = a$ та $x = b$, а зверху − неперервною, невід’ємною та скінченною функцією. Саме тому введений Г. Лейбніцем значок інтеграла є стилізацією букви S як площі фігури (читається: інтеграл від а до бе від еф від ікс деікс). Визначений інтеграл як площа завжди є додатним числом.

Властивості визначеного інтегралу:

1. Якщо точка b наближається до точки a, то площа криволінійної трапеції зменшується, наближаючись до нуля. Тому $\int_a^a f(x)dx = 0,$ тобто визначений інтеграл з однаковими верхньою та нижньою границями завжди дорівнює нулю.

2. Якщо по осі абсцис замість змінної x ввести змінну t і мати вісь Ot та функцію $y = f(t),$ то величина площі при цьому не зміниться, тобто:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt.$$

3. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$. Заміна місцями в інтегралі верхньої та нижньої границь (операція називається зміною порядку інтегрування) змінює знак інтеграла:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a); \int_b^a f(x)dx = F(a) - F(b).$$

4. Якщо $a<c<b$, то $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$. За формулою Ньютона − Лейбніца $F(b) - F(a) = F(c) - F(a) + F(b) - F(c) = F(b) - F(a)$.

5. Визначений інтеграл суми двох функцій дорівнює сумі інтегралів цих функцій з тими ж межами: $\int\limits_a^b (f_1(x) + f_2(x))dx = \int\limits_a^b f_1(x)dx + \int\limits_a^b f_2(x)dx$.

6. Сталий множник можна винести за знак інтеграла, як і в невизначеному інтегралі: $\int\limits_a^b k \cdot f(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx$.

З рис. 10.3. видно, що величина площі криволінійної трапеції буде змінюватись, якщо змінювати на осі OX положення точок a і b. Так: $S = \int\limits_a^b f(x)dx \neq S_1 = \int\limits_{a_1}^{b_1} f(x)dx.$ Отже, величина площі змінюється як зі зміною положення точки a, так і зі зміною положення точки b. Тому можемо стверджувати, що площа як визначений інтеграл є функцією обох границь: верхньої та нижньої. Отже: $S = S(a;b)$.

Якщо положення точки a не змінювати, а змінювати тільки положення точки b, то площа буде залежати тільки від зміни положення точки b, тобто $S = S(b)$.

Таким чином:

$$S(b) = \int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(t)dt.$$

Враховуючи, що b − величина змінна, введемо заміну $b = x$.

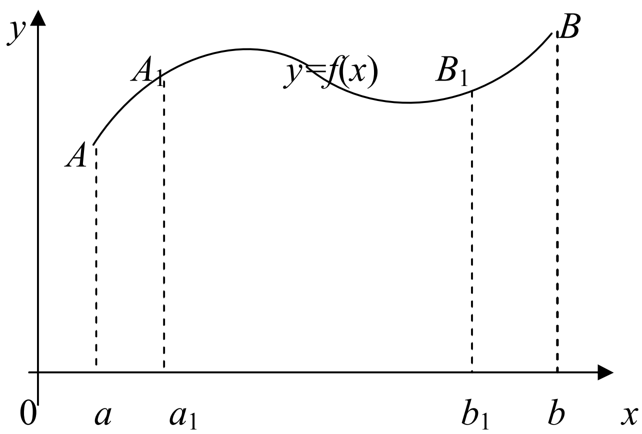


Рис.11.3.

Тоді отримаємо: $$S(x) = \int\limits_a^x f(t)dt.$$

Відмітимо, що площа криволінійної трапеції $S(x)$ буде зростати, якщо аргумент зростає. Якщо x отримає приріст Δx, то площа $S(x)$ отримає приріст ΔS. Завдяки малості Δx значення функції в точках x та $x + \Delta x$ практично співпадають, тому вважаємо, що площа ΔS утворена прямокутником, тобто $\Delta S \approx f(x) \cdot \Delta x$. Звідси: $f(x) \approx \dfrac{\Delta S}{\Delta x} \Rightarrow f(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta S}{\Delta x}$.

Але за визначенням похідної функції: $S'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta S}{\Delta x}$.

Теорема Барроу: Похідна від визначеного інтеграла, як функції його верхньої границі дорівнює самій підінтегральній функції, тобто $S'(x) = f(x)$.

За введеними позначеннями $S(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$, $S(b) = \int\limits_a^b f(t)dt$ і $S(a) =$

$= \int\limits_a^a f(t)dt.$ Але $S(a) = 0$.

Таким чином, можемо записати:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(t)dt = S(b) = S(b) - 0 = S(b) - S(a).$$

Але згідно з теоремою Барроу підінтегральна функція $f(x)$ є похідною від $S(x)$, тобто $S(x)$ є одна зі всіх можливих первісних (див. поняття визначеного інтеграла), а саме та з них, яка в точці x дорівнює нулю. Отже, $S(x)$ – первісна. Відомо, що всі первісні відрізняються між собою тільки на сталу, тобто $S(x) = F(x) + C.$ Якщо відомі методи інтегрування дають можливість знайти деяку первісну $F(x)$, то вона буде відрізнятись від необхідної первісної $S(x)$ лише на число: $S(b) = F(b) + C; S(a) = F(a) + C$, тобто:

$\int\limits_a^b f(x)dx = S(b) - S(a) = F(b) + C - F(a) - C = F(b) - F(a),$ де $F(a) \neq 0,$ і $b \geq a$.

Отже, одержали формулу: $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$ Ця формула називається **формулою Ньютона-Лейбніца.**

Відмітимо, щоб обчислити визначений інтеграл, треба, не звертаючи уваги на межі інтегрування, обчислити невизначений інтеграл $\int f(x)dx = F(x) + C,$ після чого обчислити значення первісної в точках $x = b$ та $x = a$ і знайти різницю між ними $F(b) - F(a).$ Виходячи з цього, можемо формулу Ньютона-Лейбніца записати у вигляді:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \qquad (11.2)$$

Приклад: Знайти інтеграли:

а) $\int\limits_{-1}^{7} \frac{dx}{\sqrt{3x-4}}$;

б) $\int\limits_{2}^{5} \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$;

в) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+cosx}$;

г) $\int\limits_{0}^{1} arcsinxdx$.

Розв'язання:

а) $\int\limits_{-1}^{7} \frac{dx}{\sqrt{3x-4}} = \int\limits_{-1}^{7} (3x+4)dx = \frac{1}{3} \frac{(3x+4)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} \Bigg|_{-1}^{7} = \frac{2}{3}\sqrt{3x+4}\Bigg|_{-1}^{7} = \frac{2}{3}\left(\sqrt{25}-\sqrt{1}\right) = 2\frac{2}{3}$;

б) $\int\limits_{2}^{5} \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}} = \int\limits_{2}^{5} \frac{dx}{9-(x-2)^2} = arcsin\frac{x-2}{3}\Bigg|_{2}^{5} = arcsin1 - arcsin0 = \frac{\pi}{2}$;

в) Скористаємося універсальною тригонометричною підстановкою $t = tgx$. Знайдемо $cosx = \frac{1-t^2}{1+t^2}$; $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ і нові межі інтегрування $t_1 = 0$ за $x_1 = 0$, та $t_2 = 1$ за $x_2 = \frac{\pi}{2}$. Тоді:

$$\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+cosx} = \int\limits_{0}^{1} \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = 2\int\limits_{0}^{1} \frac{dt}{t^2+3} = \frac{2}{\sqrt{3}} arctg\frac{t}{\sqrt{3}}\Bigg|_{0}^{1} = \frac{2}{\sqrt{3}} arctg\frac{1}{\sqrt{3}} -$$

$$-\frac{2}{\sqrt{3}} arctg\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{6} - \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 0 = \frac{\pi}{3\sqrt{3}};$$

г) Виконаємо інтегрування частинами:

$$\int\limits_{0}^{1} arcsinxdx = \left| \begin{matrix} u = arcsinx, & dv = dx \\ du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, & v = x \end{matrix} \right| = xarcsinx\Bigg|_{0}^{1} - \int\limits_{0}^{1} \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = 1 \cdot arcsin1 -$$

$$0 \cdot arcsin0 + \sqrt{1-x^2}\Bigg|_{0}^{1} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Знайти визначені інтеграли:

10.1. $\int\limits_{-2}^{3} \left(2x^3 + x^2 - 5\right)dx$;

10.2. $\int\limits_{-2}^{2} \left(x^3 + 4x\right)dx$;

10.3. $\int\limits_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3}$;

10.4. $\int\limits_{2}^{-13} \frac{dx}{\sqrt[5]{(3-x)^4}}$;

10.5. $\int\limits_{4}^{9} \frac{(x-1)dx}{\sqrt{x}+1}$;

10.6. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x^2+4x+5}$;

10.7. $\int\limits_{2}^{3} \frac{xdx}{x^2+1}$;

10.8. $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{cos^2 x}$;

10.9. $\int\limits_{0}^{2} \frac{x+3}{x^2+4}dx$;

10.10. $\int\limits_{1}^{2} \frac{xdx}{x^2+5x+4}$;

10.11. $\int_0^{\pi} sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2}dx$;

10.12. $\int_0^{\pi} cos\frac{3x}{2}cos\frac{x}{2}dx$;

10.13. $\int_{-0,5}^{1}\frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}$;

10.14. $\int_0^{\sqrt{3}-1}\frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$;

10.15. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+cosx}$;

10.16. $\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}}\frac{sin\frac{1}{x}dx}{x^2}$;

10.17. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{sinxdx}{cos^2x}$;

10.18. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2xdx$;

10.19. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{cosx-cos^3x}dx$;

10.20. $\int_2^3\frac{dx}{2x^2+3x-2}$.

10.21. $\int_1^2 x\ln xdx$;

10.22. $\int_0^1 xe^{-x}dx$;

10.23. $\int_1^2 x\ln(x+1)dx$;

10.24. $\int_0^1 x^2e^{-2x}dx$;

10.25. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x^2-1)sin2xdx$;

10.26. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} xcosxdx$.

Індивідуальне завдання

Знайти визначені інтеграли:

а) $\int_{-1}^{1}(2x^{n-10}+x^{n-2}-3e^{nx})dx$; б) $\int_{1-n}^{1}\frac{(2x+n)dx}{x^2+nx+n}$;

де n – номер студента за списком.

§ 2. Застосування визначеного інтеграла на практиці. Обчислення площ

За геометричним змістом визначений інтеграл є площею, обмеженою зліва прямою $x=a$, справа прямою $x=b$, знизу прямою $y=0$ (вісь Ox) і зверху неперервною функцією $f(x)$. За цих умов формула Ньютона-Лейбніца дає значення площі у вигляді додатного числа. Тому при розв'язуванні задач за допомогою визначеного інтеграла необхідно мати графік функції в межах інтегрування.

Якщо графіку функції відповідає рис. 11.4, то необхідно знайти окремо площі S_2 і S_1 (вона буде від'ємною, бо функція в інтервалі від a до b від'ємна), але оскільки площа за змістом від'ємною бути не може, то

$S = |S_1| + S_2$. Якщо ж графіку функції відповідає рис. 11.5, то спочатку розв'язують систему рівнянь з обох функцій і знаходять значення абсцис a та b точок перетину ліній.

За визначенням $\int_a^b f_1(x)dx$ є площею фігури між віссю OX та функцією $f_1(x)$, а $\int_a^b f_2(x)dx$ – площа між віссю OX та функцією $f_2(x)$. Тому $S = S_1 - S_2$.

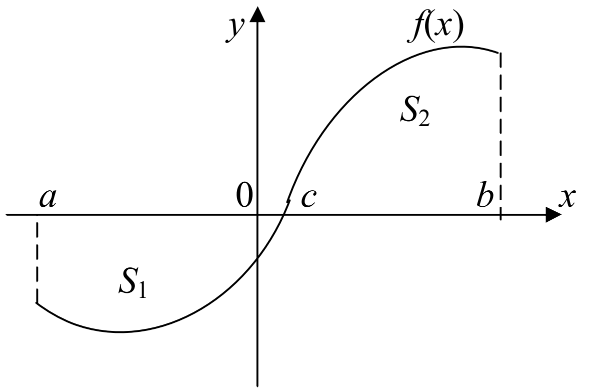


Рис. 11.4.

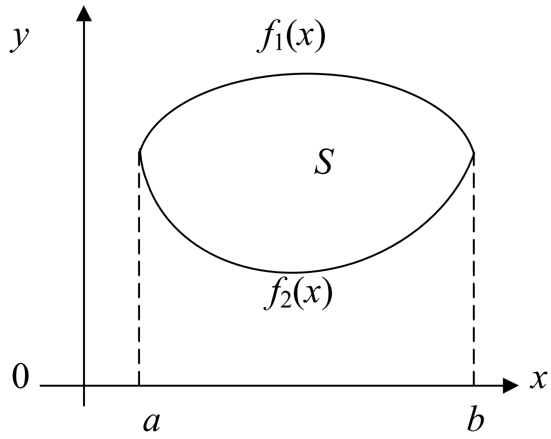


Рис. 11.5.

Приклад: Обчислити площу фігури, обмежену лініями $y = 2x + 3$ та $y = x^2$.

Знайдемо точки перетину функцій та побудуємо графіки заданих функцій. З системи рівнянь знаходимо: $x^2 = 2x + 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x+1)(x-3) = 0$ $\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1; y_1 = 1 \\ x_2 = 3; y_2 = 9 \end{cases}$, але $\int_{-1}^{3}(2x+3)dx$ є площею прямолінійної трапеції *aABb*, а $\int_{-1}^{3} x^2 dx$ – площею криволінійної трапеції *aAOBb.* Шукана площа обмежена заданими лініями і знаходиться між ними, тому $S = S_1 - S_2$.

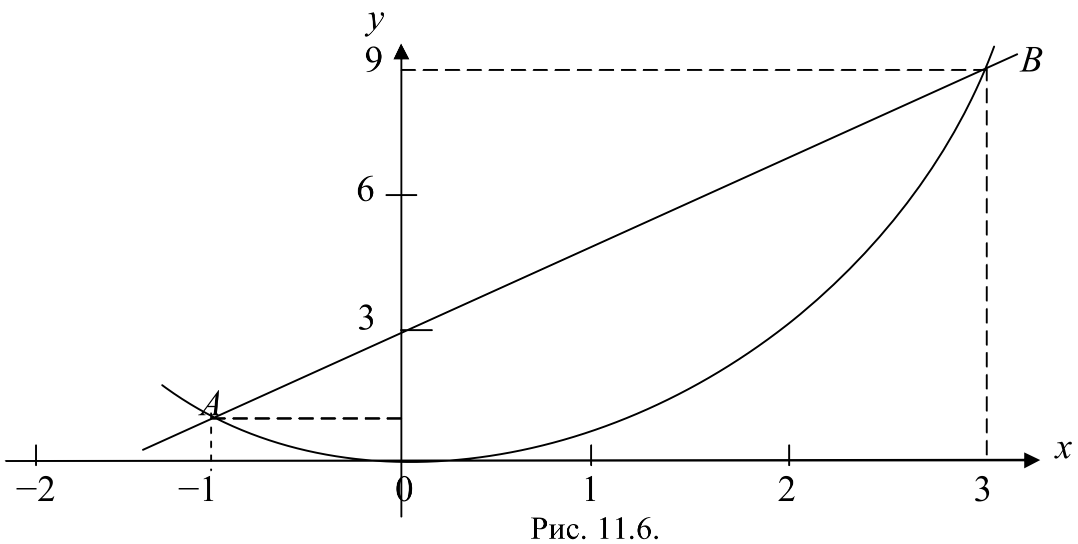


Рис. 11.6.

Отже:

$$S=\int_{-1}^{3}(2x+3)dx-\int_{-1}^{3}x^2dx=\int_{-1}^{3}2xdx+\int_{-1}^{3}3dx-\int_{-1}^{3}x^2dx=(x^2+3x-\frac{x^3}{3})\Big|_{-1}^{3}=9+9-9-$$

$$-1+3-\frac{1}{3}=10\frac{2}{3}\text{(кв. од.).}$$

Об’єм тіл обертання

Нехай необхідно обчислити об’єм тіла, утвореного обертанням довільної кривої $y=f(x)$ навколо осі OX (рис.11.7).

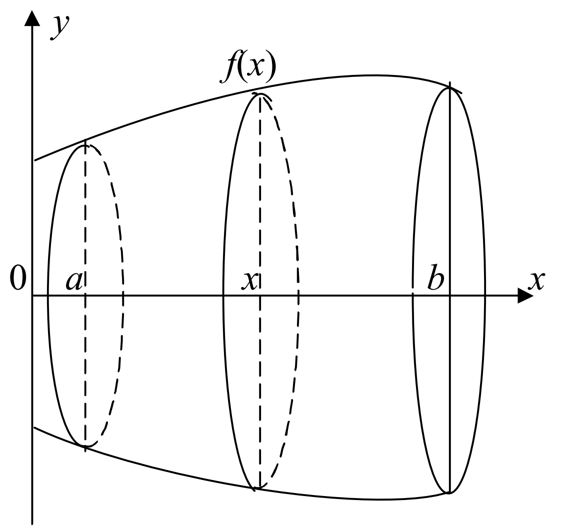


Рис. 11.7.

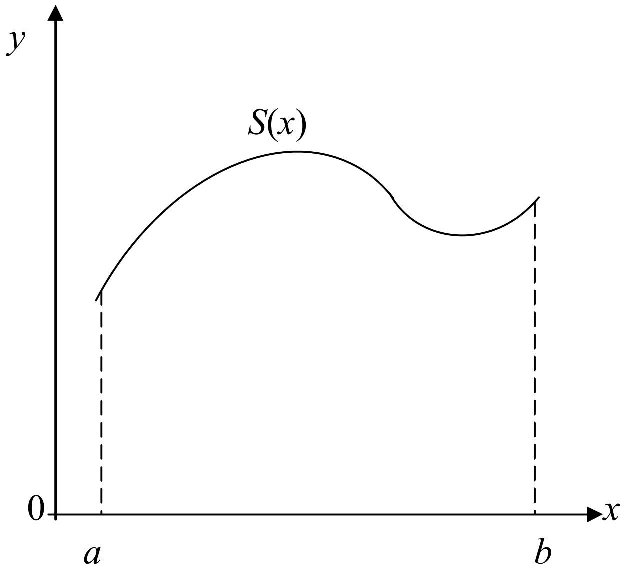


Рис. 11.8.

Якщо по осі OY відкладати значення площі перерізу тіла обертання, а по осі $OX-$ довжину відрізка осі обертання, то від фігури, зображеної на рис. 11.7, перейдемо до фігури, зображеної на рис. 11.8.

Тому $V=\int_a^b S(x)dx,$ але для тіла обертання (рис.113) з довільною точкою x маємо: $S(x)=\pi y^2$ (ордината y відіграє роль радіуса кола).

Тому об’єм тіла обертання:

$$V=\int_a^b \pi y^2 dx\ . \tag{11.3}$$

Якщо тіло утворене обертанням кривої навколо осі OY, то $V=\int_c^d \pi x^2 dy$, де c і d $-$ межі зміни величини y.

<u>Приклад:</u> Обчислити об’єм тіла обертання, утвореного обертанням кривої $y=\sqrt{x}$ навколо осі OX в межах: $a=0;b=9$.

Об’єм $V=\pi\int_0^9 y^2dx=\pi\int_0^9 xdx=\pi\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^9=\frac{\pi}{2}(81-0)=\frac{81}{2}\pi$ (*кв.од*).

Довжина дуги кривої

Відомо, що $\int dl = L + C$. Якщо $y = f(x)$ задана на $[a;b]$, то $L = \int\limits_a^b dl$.

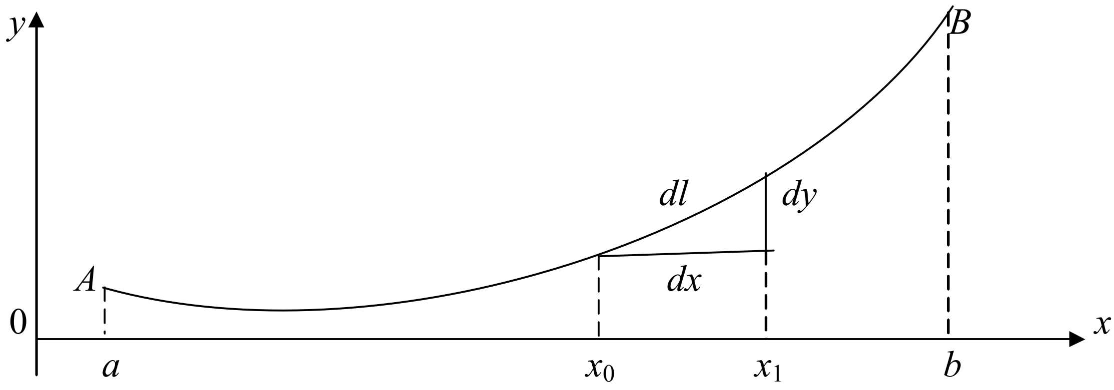


Рис. 11.9.

Якщо величина x (рис. 10.9.) отримає приріст Δx, то функція отримає приріст Δy, а довжина лінії збільшиться на величину Δl. Через малий приріст аргументу відрізок Δl кривої лише дещо відрізняється від прямої, тому за теоремою Піфагора можемо записати: $(\Delta l)^2 \approx (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$, або в диференціальній формі:

$$(dl)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 = (dx)^2 \cdot (1 + (\frac{dy}{dx})^2).$$

Тому $dl = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{1 + (y')^2} dx$.

Тоді довжина лінії:

$$L = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx \quad . \tag{11.4}$$

<u>Приклад:</u> Обчислити довжину лінії $y = \frac{x^2}{2}$, якщо $x \in [0;1]$.

Відомо $y = \frac{1}{2}x^2$, тоді похідна заданої функції $y' = \frac{1}{2} \cdot 2x = x \Rightarrow (y')^2 = x^2$.

Згідно з формулою (10.4), маємо:

$$\int\limits_0^1 \sqrt{1 + x^2} dx = \left| \begin{matrix} x = tgt; dx = \dfrac{dt}{\cos^2 t} \\ t = 0; t = \dfrac{\pi}{4} \end{matrix} \right| = \int\limits_0^{\frac{1}{4}\pi} \sqrt{1 + tg^2 t} \cdot \frac{dt}{\cos^2 t} = \int\limits_0^{\frac{1}{4}\pi} \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}} \cdot \frac{dt}{\cos^2 t} =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{dt}{\cos^3 t} = \int\limits_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{\cos t \cdot dt}{\cos^4 t} = \int\limits_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{\cos t \cdot dt}{(1 - \sin^2 t)^2} = \left| \begin{matrix} \sin t = z; \cos t dt = dz \\ z = 0; z = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{matrix} \right| =$$

$$= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dz}{(1-z^2)^2} = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dz}{(1-z)^2(1+z)^2} = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{A}{1-z} + \frac{B}{(1-z)^2} + \frac{C}{1+z} + \frac{D}{(1+z)^2}\right)dz =$$

$$= \left|A = B = C = D = \tfrac{1}{4}\right| = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{dz}{1-z} + \frac{dz}{(1-z)^2} + \frac{dz}{1+z} + \frac{dz}{(1+z)^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(-\ln(1-z) + \frac{1}{1-z} + \ln(1+z) - \frac{1}{1+z}\right)\Bigg|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{4}\left(\ln\frac{1+z}{1-z} + \frac{2z}{1-z^2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \ln\sqrt[4]{3+2\sqrt{2}} +$$

$$+ \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Площа поверхні тіл обертання

Якщо $\int ds = S + C$, то у межах обертання від a до b кривої $y = f(x)$ будемо мати $S = \int_a^b ds$, де ds — елемент площі поверхні тіла обертання (рис. 10.10).

Через малість dx можемо вважати виділеним елемент об'єму циліндра, площа поверхні якого $ds = 2\pi y \cdot dl$ (y відіграє роль радіуса основи циліндра, а dl − його твірної).

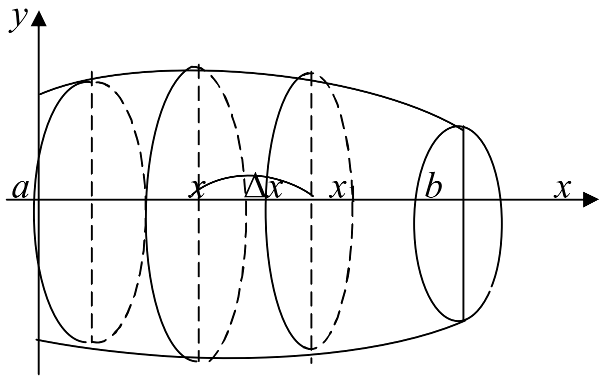


Рис. 11.10.

Враховуючи, що $dl = \sqrt{1+(y')^2}dx$, маємо $ds = 2\pi y\sqrt{1+(y')^2dx}.$

Тоді площа поверхні тіл обертання:

$$S = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}dx\ . \tag{11.5}$$

<u>Приклад:</u> Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кривої $y = \frac{x^2}{2}$ навколо осі OX у межах: $a = 0, b = 1$.

Маємо: $y' = (\frac{1}{2}x^2)' = \frac{1}{2} \cdot 2x = x$.

Тоді $S = 2\pi\int_0^1 \frac{1}{2}x^2\sqrt{1+x^2}dx = \pi\int_0^1 x^2\sqrt{1+x^2}dx = \begin{vmatrix} x = tgt; dx = \frac{dt}{\cos^2 t} \\ t = 0; t = \frac{1}{4}\pi \end{vmatrix} =$

$$= \pi\int_0^{\frac{1}{4}\pi} tg^2 t \cdot \cos t \cdot \frac{dt}{\cos^2 t} = \pi\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{\sin^2 t}{\cos^5 t}dt = \pi\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{\sin^2 t\cos t}{\cos^6 t}dt =$$

$$= \pi\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{\sin^2 t}{(1-\sin^2 t)^3}\cos t \cdot dt = \begin{vmatrix} \sin t = z; \cos t \cdot dt = dz \\ z = 0; z = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} = \pi\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \frac{t^2dt}{(1-t^2)^3} =$$

$$= \pi \int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \left(\frac{A}{1-t} + \frac{B}{(1-t)^2} + \frac{C}{(1-t)^3} + \frac{D}{1+t} + \frac{E}{(1+t)^2} + \frac{F}{(1+t)^3}\right) dt \Rightarrow$$

$$A = B = D = E = \frac{1}{16};\ C = F = \frac{1}{8}.$$

Необхідно самостійно визначити значення цих коефіцієнтів, провести інтегрування дробів і отримати:

$$\pi \int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \frac{t^2 dt}{(1-t^2)^3} = \tfrac{1}{16}\pi\left(\ln\frac{(1-t)^2}{1-t^2} + \frac{2t}{1-t^2} + \frac{4t}{(1-t^2)^2}\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \frac{\pi}{16}\cdot\left(\ln\frac{(1-\frac{\sqrt{2}}{2})^2}{1-\frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{2}}{1-\frac{1}{2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{2\sqrt{2}}{(1-\frac{1}{2})^2} - \ln 1 - 0 - 0\right) = \frac{\pi}{16}\ln(3-2\sqrt{2}) + \tfrac{5}{8}\sqrt{2}.$$

Економічна задача

Деякий банк приймає вклади під p% річних. Визначити суму, що набереться на рахунку через t років.

Звичайно, існує формула складних відсотків $N = N_0(1+p)^t$, де N_0 — початковий вклад, а N — остаточна сума вкладу. Але за великих значеннь t формула стає досить незручною в користуванні. Згадуємо, що у біномі Ньютона i-й член знаходиться за формулою: $\frac{t!}{i!(t-i)!}\cdot p^{t-i}$, де $t!$ (знак ! читається, як факторіал і означає добуток натуральних чисел від одиниці до t. Наприклад, $6! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6 = 720$), а кількість членів на один більша від показника степеня).

Якщо в момент t зроблено вклад N, то за час Δt його величина збільшиться на величину ΔN, яка буде пропорційною як часу t, так і внесеній сумі N. Тому ΔN пропорційна $N\Delta t$, звідки $\Delta N = kN\Delta t$, де k − коефіцієнт пропорційності, який повністю визначається відсотком прибутку p.

Тому: $\Delta N = pN\Delta t \Rightarrow dN = pNdt$, звідки $\frac{dN}{N} = pdt$. Для сталої величини p: $\int\frac{dN}{N} = p\int dt \Rightarrow \ln N = pt + \ln C \Rightarrow N = Ce^{pt}$. Якщо в момент $t = 0$ у банк була покладена початкова сума N_0, то $N_0 = Ce^{p\cdot 0} = C\cdot 1 = C$.

Отже: $C = N_0$, звідки маємо формулу:

$$N = N_0 e^{pt}. \tag{11.6}$$

Якщо $p = 0{,}05$, що відповідає 5%, а $t = 20$ років, то $pt = 0{,}05 \cdot 20 = = 1 \Rightarrow e^1 = e \approx 2{,}72$. Отже, вклад буде становити суму $N = 2{,}72N_0$ (легендарний вклад Полуботька збільшився за 300 років у 3 269 017 разів).

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Обчислити площу фігур, що обмежені лініями. Зробити малюнки:

10.27. Параболою $y = x^2$ і прямою $y = x$.

10.28. Параболою $y = x^2 - 4$ і прямою $y = 1$.

10.29. Параболою $y = x^2 - 4x$ і прямою $y = 0$.

10.30. Параболою $y = x^2 - 4x + 4$ і прямою $y = 4$.

10.31. Параболою $y = 4 - x^2$ і прямою $y = 1$.

10.32. Параболою $y = 2x - \frac{1}{4}x^2$ і прямою $4y = x + 6$.

10.33. Параболою $y = x^2 - 2$ і прямою $y = x$.

10.34. Параболою $y = 2x^2$ з прямими $x = 1$, $x = 2$ та віссю Ох.

10.35. Прямою $x = 4$, параболою $y = 3x^2 - 6x$ і віссю Ох на відрізку $[0;4]$.

10.36. Параболою $y = (x+2)^2$, прямою $y = 4 - x$ та віссю Ох.

10.37. Гіперболою $xy = 3$ і прямою $x + y = 4$.

10.38. Параболами $x^2 - 3y = 4$ і $x^2 + y = 8$.

10.39. Параболою $y = 5x - 2x^2$ та прямою $y = 2x - 2$.

10.40. Параболами $x = 4 - y^2$ і $x = y^2 - 2y$.

10.41. Параболами $x = 8 - y^2$ і $x = y^2$.

10.42. Параболою $x = 2y^2 + 6y$ і прямою $x - y + 2 = 0$.

Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі *Ox* фігури, утвореної вказаними лініями. Зробити рисунок.

10.43. $\begin{cases} x = 0; x = 3 \\ y = 0; y = 4x - x^2 \end{cases}$.

10.44. $\begin{cases} x = -1; x = 2 \\ y = 0; y = 4 - x^2 \end{cases}$.

10.45. $\begin{cases} x = 0; x = \pi \\ y = 0; y = \sin x \end{cases}$.

10.46. $\begin{cases} x = 2; x = 8 \\ y = 0; y = \dfrac{8}{x} \end{cases}$.

Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі *Oy* фігури, утвореної вказаними лініями. Зробити рисунок.

10.47. $\begin{cases} y = 0; y = 4 \\ x = 0; x^2 = 4y \end{cases}$.

10.48. $\begin{cases} y = 1; y = 6 \\ x = 0; x = \dfrac{6}{y} \end{cases}$.

10.49. Визначити довжину дуги кривої $y = \ln x$ від $x_1 = 0{,}75$ до $x_2 = 2{,}4$.

10.50. Визначити довжину дуги кривої $y = \dfrac{\sqrt{x^3}}{3}$ від $x_1 = 0$ до $x_2 = 12$.

10.51. Визначити площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox параболи $y^2 = 2x + 1$ в межах від $x_1 = 1$ до $x_2 = 7$.

Індивідуальне завдання

Обчислити площу фігури, що обмежена параболою $y = n - (x-1)^2$ і прямою $y = n - 4$ (n – номер студента за списком). Зробити малюнок.

§ 3. Невласні інтеграли

З геометричного означення визначеного інтеграла випливає, що шукана площа обмежена неперервними лініями з усіх чотирьох сторін: з боків та знизу прямими $x = a, x = b, y = 0,$ а зверху неперервною та обмеженою функцією $y = f(x)$. За обчислення таких інтегралів застосовується формула Ньютона-Лейбніца як спосіб обчислення площі. Такі визначені інтеграли, які у геометричному змісті визначають замкнену і обмежену зі всіх сторін площу**,** називаються **власними** інтегралами**.** Якщо умова обмеження чи замкнутості на визначеному інтервалі порушена, то інтеграл називається **невласним**.

Порушення умови обмеженості зі сторони вертикальних прямих $x = a$ та $x = b$ (обох чи хоч би однієї з них) призводить до появи так званих інтегралів I роду. Такі інтеграли легко побачити через їх специфічний вигляд :

$$\int_{-\infty}^{b} f_1(x)dx; \quad \int_{a}^{+\infty} f_2(x)dx; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f_3(x)dx.$$

Таким інтегралам відповідає рис. 11.11.

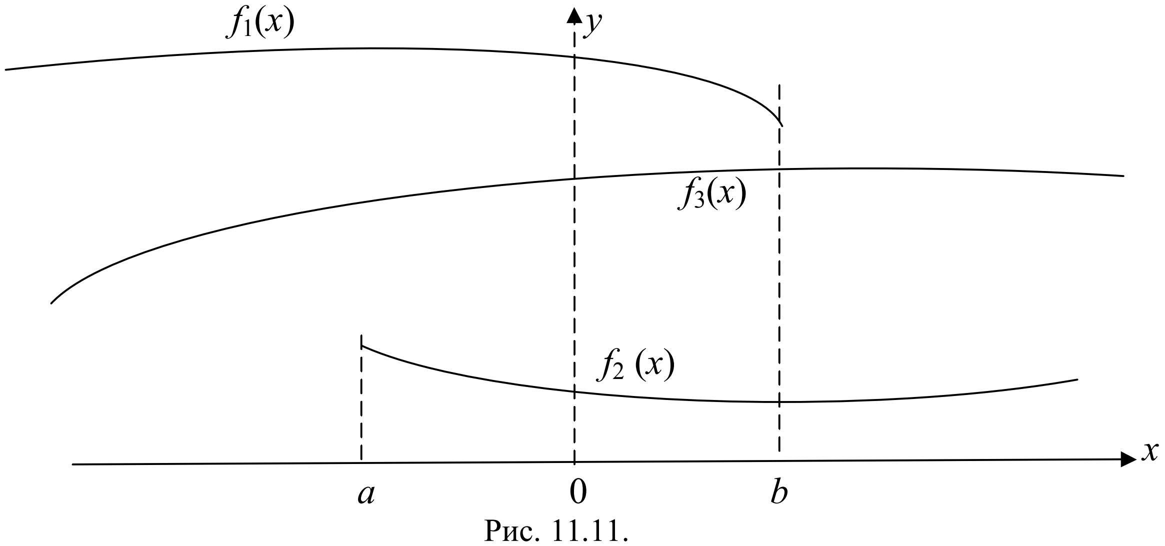


Рис. 11.11.

Безпосереднє застосування формули Ньютона-Лейбніца неможливе через відсутність обмеження границь, за якого ця формула справедлива. Тому такі інтеграли обчислюють таким чином: роблять штучне обмеження (рис. 11.12) і замість, наприклад, $\int_a^\infty f(x)dx$, розглядають $\int_a^b f(x)dx$, де b − довільне стале число.

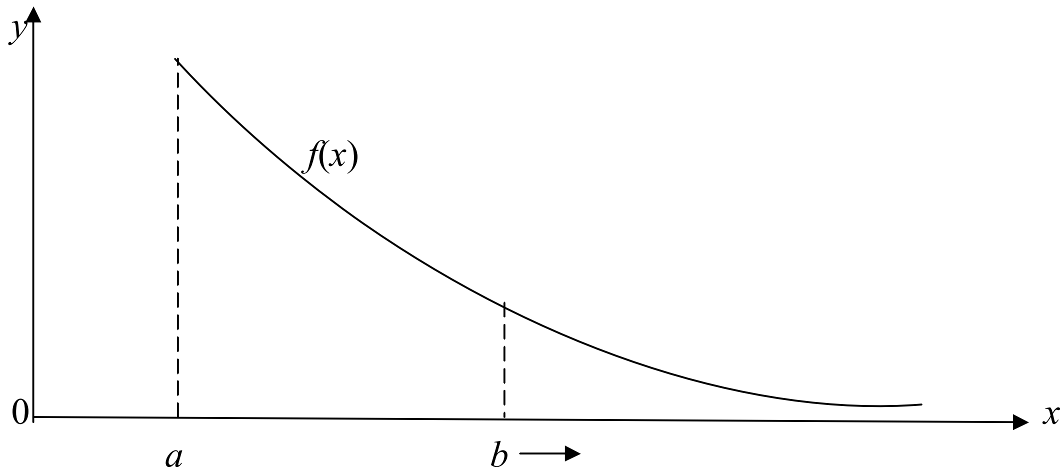


Рис. 11.12.

Тоді: $$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

згідно з формулою Ньютона-Лейбніца. Надалі розглядають:

$$\lim_{b\to\infty}(F(b) - F(a)).$$

Озн. Якщо границя $\lim_{b\to\infty}(F(b) - F(a))$ існує і дорівнює числу A, то невласний інтеграл збіжний. А якщо вказана границя не існує або безмежна, то інтеграл розбіжний.

Якщо невласний інтеграл збіжний, то площа фігури існує (не зважаючи на необмеженість границі), а якщо інтеграл розбіжний, то площа не існує.

Приклад: Обчислити: а) $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$; б) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$.

Розв'язання: а) Розглянемо $\int_1^b \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_1^b = \ln b - \ln 1 = \ln b - 0 = \ln b$ та $\lim_{b\to\infty} \ln b = \ln\infty = \infty$.

Границя необмежена, тому інтеграл розбіжний.

б) Для $\int_1^b \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_1^b = -\frac{1}{b} + \frac{1}{1} = 1 - \frac{1}{b} \Rightarrow \lim_{b\to\infty}(1 - \frac{1}{b}) = 1 - \frac{1}{\infty} = 1 - 0 = 1.$

Отже, інтеграл збіжний.

Порушення умови неперервності та обмеженості самої функції $y = f(x)$ також призводить до порушення умови замкнутості площі навіть за обмеженості границь (рис.101), хоч сам інтеграл на перший погляд має ”нормальний” вигляд, притаманний власному інтегралу: $\int_a^b f(x)dx$. Такі інтеграли називаються невласними інтегралами II роду.

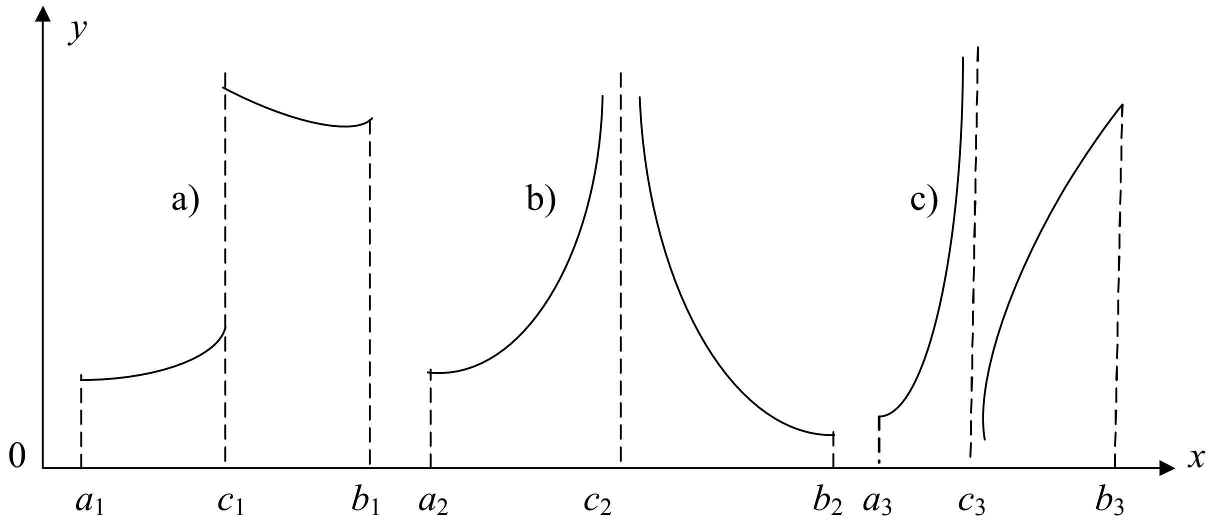


Рис. 10.13.

Приклади таких інтегралів:

$$\int_{-4}^{4}\frac{dx}{x};\int_{0}^{4}\frac{dex}{x^2};\int_{-10}^{4}\frac{dx}{\sqrt{4-x}};\int_{-4}^{1}\frac{dx}{x\ln x} \text{ тощо.}$$

Для інтегралів, які графічно відображені на рис.11.13 а), запишемо: $\int_{a_1}^{b_1} f(x)dx = \int_{a_1}^{c_1} f(x)dx + \int_{c_1}^{b_1} f(x)dx$ (це так звана кусково-неперервна функція). До інтегралів, зображених на рис. 11.13 *b*), *c*) застосовують граничний перехід. Підінтегральна функція така, що за $x = b$ вона стає необмеженою.

Виберемо зліва від точки b точку c, для якої $f(c) = A$. Тоді $\int_a^c f(x)dx = F(c) - F(a)$. Надалі розглядаємо $\lim_{c\to b}(F(c) - F(a))$. Якщо ця границя існує у вигляді невід’ємного числа (за правильного порядку інтегрування та невід’ємної функції), то інтеграл збіжний, у іншому випадку – розбіжний.

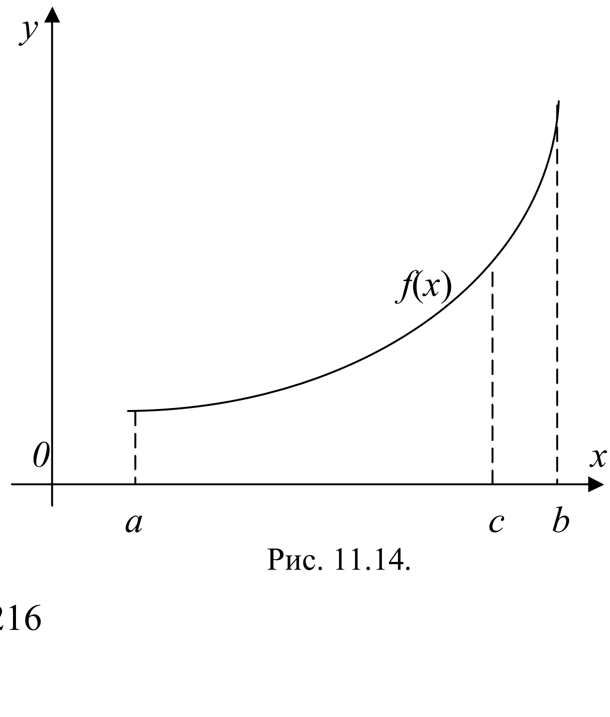


Рис. 11.14.

Якщо функція існує справа та зліва від точки розриву, то необхідно до точки розриву наближатись з обох сторін і розглянути дві границі.

<u>Приклад:</u> Обчислити $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^4}$.

Підінтегральна функція безмежно зростає при $x\to 0$, який входить в межі інтегрування. Отже, цей інтеграл є невласним інтегралом II роду.

Тому запишемо:

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^4}=\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x^4}+\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^4}$$

і до кожного з них застосуємо граничний перехід.

а) $\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x^4}=\lim\limits_{b\to 0-o}\int_{-1}^{b}\frac{dx}{x^4}=\lim\limits_{b\to 0-o}(-\frac{1}{3x^3})\Big|_{-1}^{b}=-\frac{1}{3}\lim\limits_{b\to 0-o}(\frac{1}{b^3}+1)=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(0-0)^3}-\frac{1}{3}.$

$\frac{1}{(0-o)^3}=-\infty$, тоді $\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x^4}=-\frac{1}{3}(-\infty)-\frac{1}{3}=\infty.$

б) $\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^4}=\lim\limits_{a\to 0+o}\int_{a}^{1}\frac{dx}{x^4}=\lim\limits_{a\to 0+o}(-\frac{1}{3x^3})\Big|_{a}^{1}=-\frac{1}{3}(1-\frac{1}{(0+o)^3})= =-\frac{1}{3}+\infty=\infty.$

Отже, $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^4}=\infty+\infty=\infty$, – інтеграл розбіжний.

Якщо не звертати увагу на те, що інтеграл невласний, і застосувати до нього формулу Ньютона-Лейбніца, то отримаємо: $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^4}=\left(-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^3}\right)\Big|_{-1}^{1}=-\frac{2}{3}$.

Отримали від'ємне значення інтеграла за невід'ємної функції і правильному порядку інтегрування, що є неможливим. Приклад досить наглядно ілюструє, яку помилку можна допустити, якщо нехтувати поняттям невласного інтеграла.

Існують невласні інтеграли, які вміщують в собі ознаки як інтегралів I роду, так і II роду. Наприклад, $\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{x^2-4}$ має безмежну границю, що притаманно інтегралам I роду, а підінтегральна функція в області інтегрування не існує при значенні $x=2$, що характерно для рівнянь II роду. Такі інтеграли також обчислюються через граничний перехід. Досить зручно цей інтеграл розбити на три окремих інтеграли:

$$\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{x^2-4}=\int_{0}^{2}\frac{dx}{x^2-4}+\int_{2}^{k}\frac{dx}{x^2-4}+\int_{k}^{\infty}\frac{dx}{x^2-4},$$

(число k може бути будь-яким числом, більшим числа 2, наприклад $k=10$). Перші два інтеграли II роду, а третій − I роду.

Звернемо увагу на невласний інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$, який називається інтегралом Пуассона і відіграє важливу роль в теорії ймовірностей та математичної статистики.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Дослідити невласні інтеграли на збіжність і за можливості обчислити:

10.51. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+13}$;

10.52. $\int_0^4 \frac{dx}{x^2-4}$;

10.53. $\int_0^{\infty} \frac{xdx}{(x+2)^3}$;

10.54. $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{e^{x^3}} dx$;

10.55. $\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{dx}{1-\cos 2x}$;

10.56. $\int_{-1}^{7} \frac{dx}{\sqrt[3]{7-x}}$.

Індивідуальне завдання

Дослідити невласний інтеграл на збіжність: $\int_n^{\infty} \frac{dx}{x^2+2nx+\left(n^2+4\right)}$,

n – номер студента за списком.

§4. Наближені методи інтегрування

Застосування формули Ньютона-Лейбніца викликає необхідність знаходження первісної $F(x)$. Крім певної кількості інтегралів, для яких взагалі неможливо виразити первісну через елементарні функції, сам процес знаходження її в багатьох випадках вимагає досить великих затрат часу.

Разом з тим, усі визначені інтеграли застосовують для тих чи інших практичних задач з певною точністю обчислення. Наприклад, при обчисленні земельних площ потрібна набагато менша точність, ніж за виготовлення деталей космічних апаратів. Тому застосовують існуючі в достатній кількості методи наближеного обчислення визначених інтегралів, з яких ми розглянемо найбільш вживані.

Формула трапецій

Для обчислення $\int_a^b f(x)dx$ розіб'ємо область інтегрування на n рівних частин (рис.11.15). Отримаємо n криволінійних трапецій, площу кожної з яких замінимо площею прямолінійної трапеції.

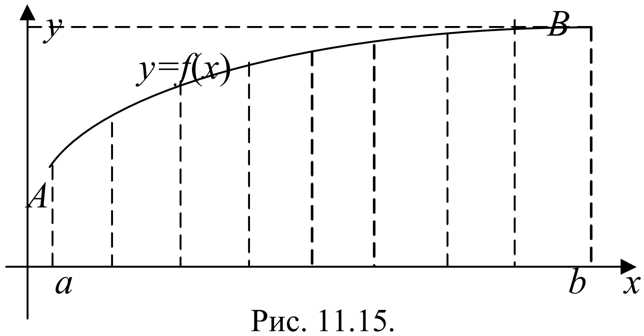


Рис. 11.15.

Тоді $S \approx s_1 + s_2 + ... + s_n$, де $s_1 = \dfrac{aA + x_1B}{2} \cdot (x_1 - a);\ s_2 = \dfrac{x_1B + x_2C}{2}(x_2 - x_1)$ і т.д.

Якщо позначити $x_1 - a = x_2 - x_1 = ... = b - x_{n-1} = \Delta x$, то $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$. Разом з тим $aA = f(a),\ x_1B = f(x_1)$ і т.д., тому

$$S \approx \frac{f(a)+f(x_1)}{2} \cdot \frac{b-a}{n} + \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \cdot \frac{b-a}{2} + \frac{f(x_2)+f(x_3)}{2} \cdot \frac{b-a}{n} + ...$$

$$... + \frac{f(x_{n-1})+f(b)}{2} \cdot \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{2n} \cdot \left(f(a) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + ... + f(b)\right).$$

Введемо позначення: $f(a) = y_a$, $f(b) = y_b, f(x_i) = y_i$. Отримаємо:

$$S \approx \frac{b-a}{2n}(y_a + y_b + 2y_1 + \ \ + 2y_2 + ...).$$

Якщо ввести позначення $y_a + y_b = У_{кр}$ та $y_1 + y_2 + y_3 + ... + y_{n-1} = У_{пром}$, то формула отримає досить простий вигляд:

$$S \approx \frac{b-a}{2n}\left(У_{кр} + 2У_{пром}\right). \qquad (11.7)$$

Ця формула називається ***формулою трапецій***.

Приклад: Обчислити $\int\limits_0^6 (x^3 - x^2 - 2x - 1)dx.$

За формулою Ньютона-Лейбніца:

$$\int\limits_0^6 (x^3 - x^2 - 2x - 1)dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2 - x\right)\Big|_0^6 = \frac{6^4}{4} - \frac{6^3}{3} - 6^2 - 6 - 0 = 210.$$

Для обчислення за формулою трапецій розіб'ємо область інтегрування на 6 частин точками: $a = 0;\ x_1 = 1;\ x_2 = 2;\ x_3 = 3;\ x_4 = 4;\ x_5 = 5;\ b = 6$. Знаходимо значення функції в цих точках:

$y_a = y(0) = -1;$

$y_b = y(6) = 6^3 - 6^2 - 12 - 1 = 216 - 36 - 13 = 180 - 13 = 167;$

$y_1 = y(1) = 1 - 1 - 2 - 1 = -3;$

$y_2 = y(2) = 8 - 4 - 4 - 1 = -1;$

$y_3 = y(3) = 27 - 9 - 6 - 1 = 11;$

$y_4 = y(4) = 64 - 16 - 8 - 1 = 39;$

$y_5 = y(5) = 125 - 25 - 10 - 1 = 89.$

Знаходимо: $У_{кр.} = y_a + y_b = -1 + 167 = 166;\ У_{пром} = -3 - 1 + 11 + 39 + 89 = 135.$

Тоді: $S \approx \dfrac{6-0}{2 \cdot 6}(166 + 2 \cdot 135) = \dfrac{1}{2}(166 + 270) = 83 + 135 = 218.$

Отримане значення площі на 8 одиниць більше від точного значення. Якщо область інтегрування розбити на більшу кількість частин, то точність обчислення збільшиться. Рекомендується провести самостійні обчислення якщо $n=12$.

Формула парабол (мала формула Сімпсона)

Розглянемо $\int_a^b f(x)dx,$ де $f(x)$ − функція невеликої кривизни (рис. 11.16).

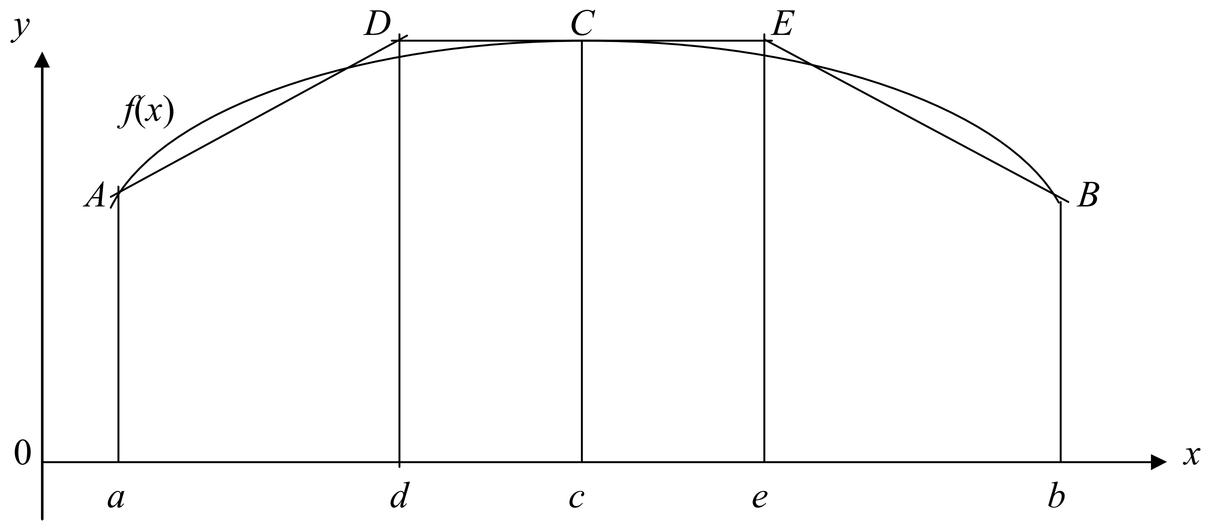


Рис. 11.16.

З середини відрізка $b-a$ (точка c) проводимо вертикаль cC і в точці C до кривої проведемо дотичну. Поділимо відрізок $b-a$ точками d і e на три рівні частини. З цих точок проводимо вертикалі до перетину з дотичною в точках D і E. Проводимо прямі AD та EB, перетворюючи криволінійні трапеції $aADd$ та $eEBb$ в прямолінійні. Шукану площу замінимо сумою трьох площ, утворених трапеціями: $aADd$, $dDEe$, $eEBb$.

Тоді $S \approx S_1 + S_2 + S_3$. Враховуємо, що $ad = de = eb = \dfrac{b-a}{3}$.

Отримаємо: $S_1 = S_{aADd} = \dfrac{b-a}{3} \cdot \dfrac{aA + dD}{2} = \dfrac{b-a}{6}(y_a + dD); S_2 = S_{dDEe} =$

$= \dfrac{b-a}{3} \cdot \dfrac{dD + eE}{2} = \dfrac{b-a}{6} \cdot (dD + eE); S_3 = S_{eEBb} = \dfrac{b-a}{3} \cdot \dfrac{eE + bB}{2} = \dfrac{b-a}{6}(eE + y_b)$.

В сумі одержимо: $S \approx \dfrac{b-a}{6}\left(y_a + y_b + 2(dD + eE)\right)$.

Розглянемо трапецію, $dDEe$ у якої cC – середня лінія, завдяки чому $dD + eE = 2cC = 2y_c$. Тому отримаємо:

$$S \approx \frac{b-a}{6}(y_a + y_b + 4y_c). \qquad (11.8)$$

Формула називається ***малою формулою Сімпсона*** або формулою парабол завдяки умові застосування її до ліній малої кривизни, до яких належить і парабола. Для многочленів степеня не вище третього (слабка кривизна) формула дає точні значення інтеграла.

Приклад: Обчислити $\int_0^6 (x^3 - x^2 - 2x - 1)dx$.

Відомо, що $b - a = 6$, $y_a = -1$ $y_b = 167$, $y_c = y(3) = 11$.

Тоді $S \approx \frac{6}{6}(-1 + 167 + 4 \cdot 11) = 210$.

Велика формула Сімпсона

За малої кривизні лінії формула парабол дає чудові результати, але її неможливо застосувати до функції, зображеної на рис. 11.17, для якої $f(a) = = f(c) = f(b) = 0$, а площа нулю не дорівнює.

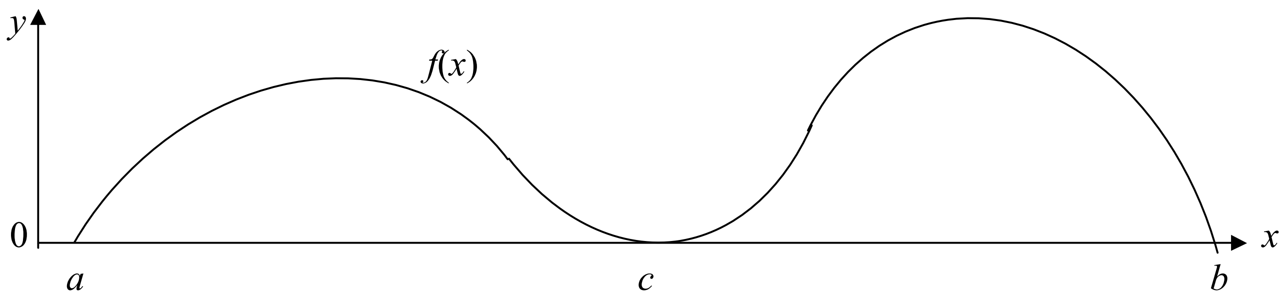


Рис. 11.17.

Якщо формулу парабол застосувати окремо до лівої та правої частин кривої, то отримаємо необхідну площу. Взагалі, якщо розглядати невелику ділянку кривої, то на ній кривизна лінії буде малою, тому до неї можливо застосувати формулу парабол (рис. 11.18).

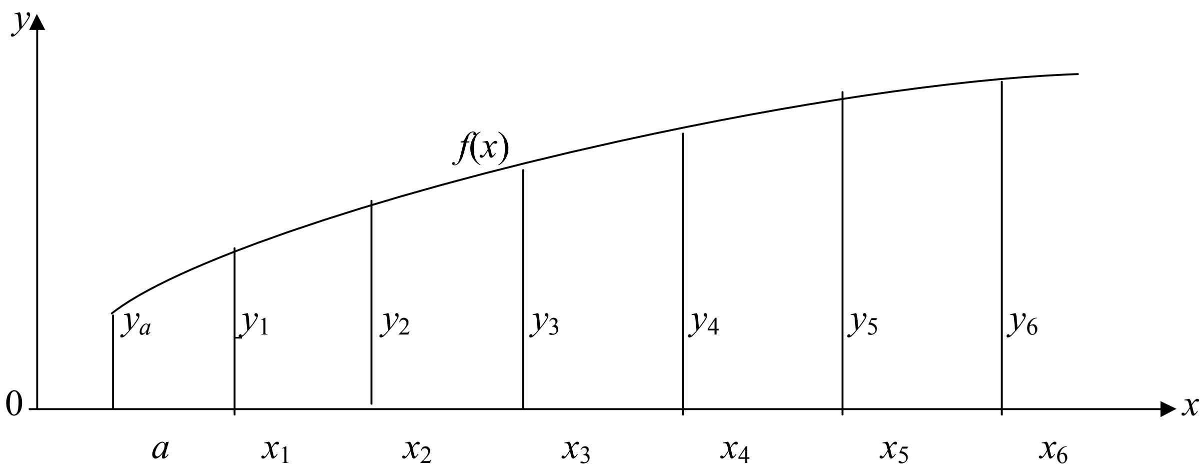


Рис. 11.18.

Розіб’ємо область інтегрування $[a;b]$ на n парних частин і до кожної пари застосуємо формулу парабол. Ординати кривої в точках a, x_2, x_4, x_6 і т.д. для кожної пари будуть основами трапецій, а в точках x_1, x_3, x_5 і т.д. – їх середніми лініями. Довжина основи кожної пари є величина $\frac{b-a}{n}\cdot 2$.

Тоді $S_1=\frac{1}{6}\cdot\frac{2(b-a)}{n}(y_a+y_2+4y_1);S_2=\frac{1}{6}\cdot\frac{2(b-a)}{n}(y_2+y_4+4y_3)$ і т.д.

Додаючи, отримаємо:

$$S=S_1+S_2+S_3+...=\frac{b-a}{3n}(y_a+2y_2+4y_1+2y_4+4y_3+...+y_b)=$$

$$=\frac{b-a}{3n}(y_a+y_b+2(y_2+y_4+y_6+...)+4(y_1+y_3+y_5+...)).$$

Якщо позначити $y_a+y_b=У_{кр.}$, $y_1+y_3+\ +y_5+...=У_{непар}$, $y_2+y_4+\ +y_6+...=$ $У_{пар}$, то отримаємо формулу:

$$S=\frac{b-a}{3n}(У_{кр}+2У_{пар}+4У_{непар}). \qquad (11.9)$$

Ця формула називається ***великою формулою Сімпсона*** і дає досить високу точність обчислення.

<u>Приклад:</u> Обчислити $\int\limits_0^6\frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.

За формулою Ньютона-Лейбніца: $I=\int\limits_0^6\frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}=$

$$=\begin{vmatrix}x^2+2x+2=t^2\\2(x+1)dx=2tdt\\t_1=\sqrt{2};t_2=\sqrt{50}\end{vmatrix}=\int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{50}}\frac{tdt}{\sqrt{t^2}}=\int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{50}}dt=t\Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{50}}=\sqrt{50}-\sqrt{2}=5{,}657.$$

За формулою Сімпсона: нехай $n=6$.

Тоді $a=0$; $b=6$; $x_1=1$; $x_3=3$; $x_5=5$; $x_2=2$; $x_4=4$; $x_6=6$; $y_a=\frac{1}{\sqrt{2}}$;

$$y_b=\frac{7}{\sqrt{50}};\ y_1=\frac{2}{\sqrt{5}};\ y_3=\frac{4}{\sqrt{17}};\ y_5=\frac{6}{\sqrt{37}};\ y_2=\frac{3}{\sqrt{10}};\ y_4=\frac{5}{\sqrt{26}}.$$

Тоді $I\approx\frac{6}{3\cdot 6}(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{7}{\sqrt{50}}+\ +2(\frac{3}{\sqrt{10}}+\frac{5}{\sqrt{26}})+4(\frac{2}{\sqrt{5}}+\frac{4}{\sqrt{17}}+\frac{6}{\sqrt{37}})=5{,}653.$

Різниця між точним та наближеним значеннями становить всього $0{,}004$, хоч інтервал інтегрування розбито всього на 6 частин.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Обчислити визначені інтеграли за формулою Ньютона-Лейбніца і за формулою трапецій при діленні області інтегрування на 8 рівних частин.

10.57. $\int\limits_{1}^{9}\sqrt[3]{9x-17}dx$; **10.58.** $\int\limits_{4}^{12}\sqrt[3]{9x-44}dx$;

10.59. $\int\limits_{2}^{10}\sqrt[3]{9x-26}dx$; **10.60.** $\int\limits_{-4}^{4}\sqrt[3]{9x+28}dx$;

10.61. $\int\limits_{-2}^{6}\sqrt[3]{9x+10}dx$; **10.62.** $\int\limits_{-3}^{5}\sqrt[3]{9x+19}dx$.

Обчислити визначені інтеграли за формулою Ньютона-Лейбніца та за формулами Сімпсона ($n=10$ для великої формули).

10.63. $\int\limits_{-1}^{2}\ln(3x+4)dx$; **10.64.** $\int\limits_{2}^{5}\ln(3x-5)dx$;

10.65. $\int\limits_{-4}^{-1}\ln(3x+13)dx$; **10.66.** $\int\limits_{1}^{4}\ln(3x-2)dx$;

10.67. $\int\limits_{3}^{6}\ln(3x-8)dx$; **10.68.** $\int\limits_{0}^{3}\ln(3x+1)dx$.

Запитання до розділу XI

1. Що називається визначеним інтегралом?
2. Який геометричний зміст визначеного інтеграла?
3. Що таке інтеграл зі змінною верхньою границею?
4. В чому полягає теорема Барроу?
5. Що таке формула Ньютона-Лейбніца?
6. Які властивості має визначений інтеграл?
7. Які особливості використання визначеного інтеграла до обчислення площ?
8. За якою формулою обчислюється об’єм тіла обертання?
9. За якою формулою обчислюється довжина дуги кривої?
10. Як обчислюється площа поверхні тіла обертання?
11. Як обчислюються довготермінові вклади?
12. В чому полягає різниця між власними та невласними інтегралами?
13. Чи може бути невизначений інтеграл невласним?
14. Що таке невласні інтеграли I роду?
15. Які інтеграли належать до невласних інтегралів II роду?
16. Чи можуть визначені інтеграли мати ознаки невласних інтегралів I та II роду?
17. Що таке збіжність та розбіжність невласного інтеграла?

18. Який вигляд має формула трапецій?
19. Що таке формула парабол?
20. Для чого потрібна велика формула Сімпсона та який вона має вигляд?

XII. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Озн. Диференціальним називається рівняння, що зв'язує між собою незалежну змінну x, функцію y та її похідні або диференціали. Найвищий порядок похідної визначає порядок диференціального рівняння. Наприклад, рівняння

$$f(x, y, y', y'', y''', C) = 0 \qquad (12.1)$$

є диференціальним рівнянням третього порядку. Наявність похідної чи диференціала в диференціальному рівнянні обов'язкова, тоді як змінні x чи y можуть бути відсутні. Наприклад, рівняння $y'' = 4$ являє собою диференціальне рівняння другого порядку, не зважаючи на відсутність у ньому змінних x та y.

Озн. Розв'язком диференціального рівняння називається функція $y = f(x)$, яка, будучи підставленою разом зі своїми похідними у диференціальне рівняння, перетворює його у тотожність.

<u>Приклад 1:</u> розв'язати диференціальне рівняння $y' = 2x + 2$.
Тоді $dy = (2x+2)dx \Rightarrow y = \int (2x+2)dx = x^2 + 2x + C_1$.

<u>Приклад 2</u>: розв'язати диференціальне рівняння $y'' = 2x + 2$.

$$y'' = 2x + 2 \Rightarrow y' = x^2 + 2x + C_1 \Rightarrow y = \frac{x^3}{3} + x^2 + C_1x + C_2 .$$

<u>Приклад 3</u>: розв'язати диференціальне рівняння $y''' = 2x + 2$.

$$y''' = 2x + 2 \Rightarrow y'' = x^2 + 2x + C_1 \Rightarrow y' = \frac{x^3}{3} + x^2 + C_1x + C_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{3} + \frac{C_1x^2}{2} + C_2x + C_3.$$

Розв'язки всіх трьох диференціальних рівнянь називаються загальними. У кожному з них число суттєво незалежних сталих співпадає з порядком рівняння.

Озн. Суттєво незалежними сталими називаються такі сталі, які не виражаються одна через одну.

Наприклад, якщо розв'язок третього рівняння записати у вигляді: $y = \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{3} + \frac{C_1x^2}{2} + C_2x + C_3 + C_4 + C_5$, то сталі C_3, C_4, C_5 не належать до суттєво незалежних, оскільки $C_3+C_4+C_5=C$, в той час як C_1 і C_2 одна через одну не виражаються.

Озн. Якщо для диференціального рівняння відомі деякі додаткові умови, за яких можемо визначити конкретні значення сталих, що задовольняють задані умови, то такі додаткові умови називаються початковими умовами.

Приклад: $y' = 2x + 2; y(1) = 2$. Початкова умова $y(1) = 2$ означає, що функція $y = f(x)$ проходить через точку *(1; 2)*. Тоді $y = x^2 + 2x + C$. Накладемо початкову умову $x = 1; y = 2 \Rightarrow 2 = 1 + 2 + C \Rightarrow C = -1$. Із загального розв'язку знаходимо частинний розв'язок $y = x^2 + 2x - 1$. При зміні початкових умов змінюється вигляд частинного розв'язку. Таких частинних розв'язків можна знайти безліч.

Як відомо з інтегрального числення, знаходження функції за відомою її похідною проводиться за дією інтегрування, тому розв'язок диференціального рівняння зводиться до цієї дії. Якщо диференціальне рівняння має вигляд $y' = f(x)$, то його загальний розв'язок буде $y = \int f(x)dx + C$. При цьому не має значення, обчислюється цей інтеграл чи ні.

§1. Диференціальні рівняння I порядку

Диференціальні рівняння з відокремленими змінними

Існує декілька видів диференціальних рівнянь першого порядку, які досить легко обчислюються. Одним з таких типів є диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними.

Озн: Диференціальними рівняннями I порядку з відокремленими змінними називають такі диференціальні рівняння, загальний вигляд яких можна представити як: $y' = f_1(x) \cdot f_2(y)$. (12.2)

Якщо $f_2(y) \neq 0$, то його можна записати у вигляді: $\dfrac{dy}{f_2(x)} = f_1(x)dx$. (12.3)

І тоді говорять, що змінні відокремили. В загальному випадку рівняння (12.3) є частковим випадком рівняння: $f_1(x)dx + f_2(y)dy = 0$. У цьому рівнянні біля диференціала dx відсутня функція, що залежить від y, а біля диференціала dy відсутня функція, що залежить від x. Кажуть, що змінні відокремлені. З властивостей невизначеного інтеграла відомо, що мають зміст тільки ті інтеграли, у яких функція і диференціал мають одну і ту ж змінну. У рівнянні з відокремленими змінними саме такий випадок, тому такі рівняння розв'язують методом інтегрування:

$$\int f_1(x)dx + \int f_2(y)dy = C.$$

Приклад: Розв'язати рівняння $x^2dx + y^2dy = 0$.

$$\int x^2dx + \int y^2dy = C \Rightarrow \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} = C \Rightarrow x^3 + y^3 = 3C.$$

Отримали загальний розв'язок рівняння.

Досить часто для того, щоб отримати рівняння з відокремлюваними змінними, змінні необхідно відокремити. Наприклад, як у наступному рівнянні:

$$f_1(x)f_2(y)+f_3(x)f_4(y)y'=0, \quad (12.4)$$

або у диференціальній формі, як

$$f_1(x)f_2(y)dx+f_3(x)f_4(y)dy=0. \quad (12.5)$$

Біля dx крім функції $f_1(x)$, яка цей диференціал задовольняє, знаходиться функція $f_2(y)$, яка цей диференціал не задовольняє, але задовольняє dy. Аналогічно функція $f_3(x)$ не задовольняє dy, але задовольняє dx. Функції, що не задовольняють диференціали, необхідно відокремити, що досягається шляхом ділення на всі функції, що не задовольняють диференціали. До них належать $f_2(y)$ та $f_3(x)$.

Таким чином, для відокремлення змінних рівняння необхідно поділити на добуток $f_2(y)\cdot f_3(x)$. Отримаємо:

$$\frac{f_1(x)\cdot f_2(y)dx+f_3(x)\cdot f_4(y)dy}{f_2(y)\cdot f_3(x)}=0\Rightarrow \frac{f_1(x)\cdot f_2(y)dx}{f_2(y)\cdot f_3(x)}+\frac{f_3(x)\cdot f_4(y)dy}{f_2(y)\cdot f_3(x)}=0\Rightarrow$$

$$\frac{f_1(x)}{f_3(x)}+\frac{f_4(y)dy}{f_2(y)}=0.$$

Змінні відокремлені, тому можемо рівняння інтегрувати:

$$\int\frac{f_1(x)}{f_3(x)}dx+\int\frac{f_4(y)}{f_2(y)}dy=C.$$

<u>Приклад:</u> розв'язати диференціальне рівняння $ydx+xdy=0$.

$\frac{ydx+xdy}{xy}=0\Rightarrow\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}=0\Rightarrow \ln x+\ln y=\ln C\Rightarrow \ln xy=\ln C\Rightarrow xy=C$ – загальний розв'язок рівняння.

Однорідні диференціальні рівняння

Озн. Однорідним називається таке рівняння, в якому множення кожної невідомої на величину t призводить до множення всього рівняння на величину t^n. При цьому число n вказує на порядок однорідності цього рівняння.

Наприклад, рівняння $y^2+5xy-6x^2=0$ буде однорідним, бо множення кожної невідомої на t дає $(ty)^2+5(tx)(ty)-6(tx)^2=0$. Звідси:

$$t^2y^2+5tx\cdot ty-6t^2x^2=0\Rightarrow t^2(y^2+5xy-6x^2)=0.$$

Рівняння помножене на t^2, тому воно має другий порядок однорідності. Розв'язується таке рівняння заміною $y=tx$ (тобто $t=\frac{y}{x}$, де $x\neq 0$).

Отже, маємо: $y^2+5xy-6x^2=0\Rightarrow t^2x^2+5xtx-6x^2=0\Rightarrow$

$$t^2x^2+5tx^2-6x^2=0\Rightarrow x^2(t^2+5t-6)=0\Rightarrow\begin{cases}t^2+5t-6=0\\ x\neq 0\end{cases}\Rightarrow$$

$$t^2+5t-6=0\Rightarrow t_1=-6\cup t_2=1\Rightarrow y=-6x\cup y=x.$$

Озн. Однорідним диференціальним рівнянням називають диференціальне рівняння, яке можна записати у вигляді:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right), \tag{12.6}$$

або $f_1(x,y)dx + f_2(x,y)dy = 0$, де $f_1(x,y)$ і $f_2(x,y)$ − однорідні функції, що мають порядок однорідності n. У цьому випадку можемо легко перейти до виду $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$. Якщо у кожній з функцій винести множник x^n, то вони запишуться:

$$f_1(x,y) = x^n F_1\left(\frac{y}{x}\right) \text{ і } f_2(x,y) = x^n F_2\left(\frac{y}{x}\right).$$

Тоді:

$$x^n F_1\left(\frac{y}{x}\right)dx + x^n F_2\left(\frac{y}{x}\right)dy = 0 \Rightarrow x^n\left(F_1\left(\frac{y}{x}\right)dx + F_2\left(\frac{y}{x}\right)dy\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_1\left(\frac{y}{x}\right)dx + F_2\left(\frac{y}{x}\right)dy = 0 \Rightarrow F_1\left(\frac{y}{x}\right) + F_2\left(\frac{y}{x}\right)\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow F_2\left(\frac{y}{x}\right)y' + F_1\left(\frac{y}{x}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$y' = -\frac{F_1\left(\frac{y}{x}\right)}{F_2\left(\frac{y}{x}\right)} = f\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow y' = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Диференціальне однорідне рівняння, як і звичайне однорідне, розв’язується заміною $y = tx$. Підставимо заміну в рівняння:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow t'x + tx' = f(t) \Rightarrow t'x + t = f(t) \Rightarrow t'x = f(t) - t \Rightarrow t'xdx = \left(f(t) - t\right) \Rightarrow$$

$$xdt = \left(f(t) - t\right)dx \Rightarrow \frac{dt}{f(t) - t} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dt}{f(t) - t} = \ln|x| + \ln|C|.$$

Якщо позначити $\int \frac{dt}{f(t) - t} = F(t)$, то $F(t) = \ln Cx \Rightarrow F\left(\frac{y}{x}\right) = \ln Cx$.

Отримали розв’язок однорідного диференціального рівняння в загальному вигляді.

<u>Приклад:</u> Розв’язати диференціальне рівняння: $y' = \frac{y}{x} + tgx$.

Дане рівняння є однорідним, тому скористаємося заміною $y = xu$, тоді похідна $y' = u + xu'$. Підставимо покладену заміну у задане рівняння:

$$u + xu' = \frac{xu}{x} + tg\frac{xu}{x} \Rightarrow$$

$$u + xu' = u + tgu \Rightarrow$$

$$xu' = tgu \Rightarrow x\frac{du}{dx} = tgu.$$

Помножимо дане рівняння на $ctgudx$, тоді отримане рівняння $ctgudu = \frac{dx}{x}$ – є диференційним з відокремлюваними змінними.

Інтегруючи обидві частини рівняння одержимо:

$$\ln|sinu| = \ln|x| + \ln C;$$

$$\ln|sinu| = \ln|Cx|;$$

$$sinu = Cx \Rightarrow u = arcsin(Cx).$$

Оскільки $y = xu$, то $y = xarcsin(Cx)$ – загальний розв’язок рівняння.

Лінійні диференціальні рівняння з правою частиною

Озн. Лінійним диференціальним рівнянням називається таке рівняння, в якому величини y та y' знаходяться в першому степені і не перемножуються між собою. Загальний вигляд таких рівнянь:

$$y' + p(x)y = q(x). \tag{12.7}$$

Наявність правої частини позбавляє можливості відокремити змінні. У диференціальній формі рівняння буде:

$$dy + p(x)ydx = q(x)dx.$$

За ділення на y, яке знаходиться біля dx, отримаємо:

$$\frac{dy}{y} + p(x)dx = \frac{q(x)}{y}dx.$$

У правій частині відокремлення відсутнє. Це тому, що справа присутня функція $q(x)$, яка в попередніх типах рівнянь була відсутня (права частина рівняння дорівнювала нулю).

Існує декілька способів розв’язування лінійних рівнянь з правою частиною. За методом Бернуллі позначимо $y = uv$, з яких одну (u або v) можемо вибрати наперед. Наприклад, функцію $y = \sin x$ можемо виразити через наперед задану функцію $y = \ln x$ наступним чином: $\sin x = \ln x \cdot \frac{\sin x}{\ln x}$.

Отже, в рівнянні $y' + p(x)y = q(x)$ зробимо заміну $y = uv$, причому виберемо v наперед (функцію v необхідно вибрати такою, щоб вона полегшила розв’язування рівняння). Для спрощення запису рівняння замість $p(x)$ будемо писати p, а замість $q(x)$ відповідно q. Тоді:

$$y' + px = q \Rightarrow u'v + uv' + puv = q \Rightarrow u'v + u(v' + pv) = q.$$

Виберемо v такою, щоб вираз в дужках дорівнював нулю, тобто: $v' + pv = 0$.

За підстановки в рівняння отримаємо: $u'v + 0 \cdot u = q \Rightarrow u'v = q$.

Таким чином, отримали два рівняння:

$$v' + pv = 0;\; u'v = q .$$

Розв'язуємо перше рівняння і знаходимо значення v, яке підставляємо в друге рівняння і знаходимо u'. Завдяки праву вибору функції v виберемо з них ту, у якої стала, що з'являється за обчислення невизначеного інтеграла, дорівнює нулю. Шляхом інтегрування знаходимо функцію u, після чого знаходимо $y = uv$. Досить зручно з обох знайдених рівнянь скласти систему:

$$\begin{cases} v' + pv = 0 \\ u'v = 0 \end{cases}. \tag{12.8}$$

<u>Приклад:</u> Розв'язати диференціальне рівняння: $y' = 2y + x$.

Дане рівняння є лінійним, оскільки y і y' у однаковому степені (першому). Тому скористаємося заміною $y = uv$ і $y' = u'v + uv'$. Тоді:

$$u'v + uv' = 2uv + x,$$

$$v(u' + 2u) = x - uv',$$

$$\begin{cases} u' + 2u + 0, \\ x - uv' = 0, \end{cases}$$

Розв'яжемо окремо перше рівняння системи:

$$u' + 2u = 0,$$

$$\frac{du}{dx} + 2u = 0, \left| \cdot \frac{dx}{u}, \right.$$

$$\frac{du}{u} + 2dx = 0,$$

$$\int \frac{du}{u} + 2\int dx = 0,$$

$$\ln u + 2x = 0 \Rightarrow u = e^{-2x}.$$

Отриманий вираз підставимо в друге рівняння системи:

$$x - uv' = 0 \Rightarrow x - e^{-2x}v' = 0,$$

$$x - e^{-2x} \cdot \frac{dv}{dx} = 0, \left| \cdot \frac{dx}{e^{-2x}}, \right.$$

$$xe^{2x}dx - dv = 0,$$

$$\int xe^{2x}dx - \int dv = 0.$$

Обчислимо частинами перший інтеграл:

$$\int xe^{2x}dx = \begin{vmatrix} u = x & dv = e^{2x}dx \\ du = dx & \dfrac{e^{2x}}{2} = v \end{vmatrix} = \frac{xe^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2}x}{2}dx = \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C.$$

Тоді, $\dfrac{xe^{2x}}{2}-\dfrac{e^{2x}}{4}+C=v$.

З поставленої умови: $y=uv=e^{-2x}(\dfrac{xe^{2x}}{2}-\dfrac{e^{2x}}{4}+C)=\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{C}{e^{2x}}$ – загальний розв'язок диференціального рівняння.

Узагальнене диференціальне лінійне рівняння Я. Бернуллі

Озн. Узагальненим диференціальним лінійним рівнянням Бернуллі називається рівняння виду

$$y'+p(x)y=q(x)\cdot y^n. \tag{12.9}$$

Якщо $n=0$, то отримаємо лінійне рівняння, розглянуте у попередньому пункті. Узагальнене рівняння також розв'язується заміною $y=uv$. Функції $p(x)$ та $q(x)$ позначатимемо p та q. Тоді:

$$y'+py=qy^n \Rightarrow u'v+uv'+puv=q(uv)^n \Rightarrow u'v+u(v'+pv)=qu^nv^n \Rightarrow$$

$$\begin{cases} v'+pv=0 \\ u'v=qu^nv^n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v'+pv=0 \\ u'=qu^nv^{n-1} \end{cases}.$$

Знайдене з першого рівняння значення v підставляємо у друге рівняння і знаходимо спочатку значення u', а потім u.

<u>Приклад:</u> Розв'язати диференціальне рівняння $y'-\dfrac{y}{x}=x^2y^2$ за початкової умови: $y(1)=1$.

Введемо заміну $y=uv$ і розглянемо систему рівнянь $\begin{cases} v'-\dfrac{v}{x}=0 \\ u'v=x^2u^2v^2 \end{cases}$.

Розв'яжемо перше рівняння: $v'-\dfrac{v}{x}=0 \Rightarrow v'dx-\dfrac{v}{x}dx=0 \Rightarrow dv-\dfrac{v}{x}dx=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{dv}{v}=\dfrac{dx}{x} \Rightarrow \ln v=\ln x \Rightarrow v=x.$

Підставимо отримане значення v у друге рівняння:

$$u'v=x^2u^2v^2 \Rightarrow u'=x^2u^2v \Rightarrow u'dx=x^2u^2xdx \Rightarrow du=x^3u^2dx \Rightarrow \frac{du}{u^2}=x^3dx \Rightarrow$$

$$\int\frac{du}{u^2}=\int x^3dx \Rightarrow -\frac{1}{u}=\frac{x^4}{4}-C_1 \Rightarrow u=-\frac{4}{x^4-4C_1} \Rightarrow u=\frac{4}{C-x^4}.$$

Тоді: $y=uv=x\cdot\dfrac{4}{C-x^4}=\dfrac{4x}{C-x^4}$.

Накладемо початкову умову: якщо $x=1$, то $y=1$. Тоді: $\frac{4}{C-1}=1 \Rightarrow C=5$. Підставимо отримане значення C у загальний розв'язок рівняння і отримаємо частковий розв'язок: $y=\frac{4x}{5-x^4}$.

Рівняння у повних диференціалах

Для функції двох змінних $z=f(x,y)$ повний диференціал є виразом $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$, де частинні похідні − деякі функції від змінних x та y, тобто $\frac{\partial z}{\partial x}=P(x,y)$ і $\frac{\partial z}{\partial y}=Q(x,y)$, а мішані похідні другого порядку $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ рівні між собою. Тому: $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$.

Досить часто зустрічаються рівняння І порядку у вигляді

$$f_1(x,y)dx+f_2(x,y)dy=0. \qquad (12.10)$$

Озн. Якщо функції $f_1(x,y)$ і $f_2(x,y)$ такі, що $\frac{\partial f_1(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial f_2(x,y)}{\partial x}$, то ці функції є частинними похідними, а саме диференціальне рівняння називається рівнянням у повних диференціалах, в якому $dz=0$ (тоді $z=C$).

Якщо $f_1(x,y)$ є частинною похідною $\frac{\partial F_1(x,y)}{\partial x}$, в якій y виконує роль сталої, то $\int\frac{\partial F_1(x,y)}{\partial x}dx=\int f_1(x,y)dx=F_1(x,y)+C(y)$.

Функція $C(y)$ відіграє роль сталої. Отримана функція виконує роль розв'язку рівняння, але функція $C(y)$ невідома. Разом з тим $f_2(x,y)$ – частинна похідна $\frac{\partial F_1(x,y)}{\partial y}$, тому похідна від отриманого розв'язку:

$$\frac{\partial}{\partial y}(F_1(x,y)+C(y))=f_2(x,y)\Rightarrow\frac{\partial F_1(x,y)}{\partial y}+\frac{\partial C(y)}{\partial y}=f_2(x,y).$$

Звідси: $\frac{\partial C(y)}{\partial y}=f_2(x,y)-\frac{\partial F_1(x,y)}{\partial y}\Rightarrow C(y)=\int(f_2(x,y)-\frac{\partial F_1(x,y)}{\partial y})dy$.

Оскільки $dz=0$, то отриманий розв'язок $F_1(x,y)+C(y)$ необхідно прирівняти деякій сталій, тому $F_1(x,y)+C(y)=C_1$ буде розв'язком диференціального рівняння.

Приклад 1: Розв'язати рівняння $(x^2+y)dx+(x^3+4y^2)dy+0$.

Перевіряємо наявність повного диференціала:

$\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y)=1$; $\frac{\partial}{\partial x}(x^3+4y^2)=3x^2$. Але $3x^2 \neq 1$, тому це рівняння не буде рівнянням у повних диференціалах.

Приклад 2: Розв'язати рівняння $2xy^3dx+(3x^2y^2+1)dy=0$.

Перевіряємо умову $\frac{\partial}{\partial y}(2xy^3)=\frac{\partial}{\partial x}(3x^2y^2+1) \Rightarrow 2x\cdot 3y^2 = 3\cdot 2x\cdot y^2$.

Отже, це є рівняння у повних диференціалах. Тому:

$$\int 2xy^3dx = y^3\int 2xdx = x^2y^3 + C(y).$$

Отримана функція така, що частинна похідна по змінній y є $3x^2y^2+1$, тому:

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^2y^3+C(y))=3x^2y^2+1 \Rightarrow x^2\cdot 3y^2+C'(y)=3x^2y^2+1 \Rightarrow C'(y)=1 \Rightarrow C(y)=y.$$

Отже, загальний розв'язок рівняння буде:

$$x^2y^3+y=C.$$

Зауваження: замість $\frac{\partial C(y)}{\partial y}$ записали $C'(y)$, тому що у функції $C(y)$ відсутня змінна x.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь з відокремлюваними змінними:

11.1. $y'=e^{-2x}$;

11.2. $y'=sin5x$;

11.3. $y'=\frac{1}{x^2+4}$;

11.4. $y'=\frac{1}{sin^2 2x}$;

11.5. $\frac{dx}{x^2}=\frac{dy}{y^2}$

11.6. $y'=e^{x+y}$

11.7. $y'=\sqrt[3]{x^5y^2}$;

11.8. $y'=y\sqrt[4]{xy}$;

11.9. $\sqrt{x^3}y'=y^2x$;

11.10. $\sqrt[3]{x}y'=y^2$;

11.11. $\sqrt{xy}y'=y^2$;

11.12. $y'=y\sqrt[5]{x^3y^2}$;

11.13. $y'=y\sqrt[3]{xy^2}$

11.14. $\sqrt[3]{x}y'=\sqrt[4]{y}x$

11.15. $y'=y\sqrt[4]{x^3y}$;

11.16. $y'=\sqrt[3]{x^8y}$;

11.17. $x\sqrt{1+y^2}dx+y\sqrt{1+x^2}dy+0$;

11.18. $xyy'=1-x^2$;

11.19. $y'=10^{2x+y}$;

11.20. $y'=(2y+1)ctgx$.

Розв'язати однорідні диференціальні рівняння:

11.21. $(x+y)dx-(x-y)dy=0$; **11.22.** $xdx-ydy=ydy$;

11.23. $(x^2+xy+y^2)dx=x^2dy$; **11.24.** $xy'=y+\sqrt{y^2-x^2}$;

11.25. $xy'=y\ln\frac{y}{x}$; **11.26.** $y'=\frac{y^2}{x^2}-2$;

11.27. $y'=\frac{2xy}{x^2-y^2}$; **11.28.** $y'=\frac{y}{x}+\frac{x}{y}$;

11.29. $xy'-y=\sqrt{y^2+x^2}$; **11.30.** $y^2+x^2y'=xyy'$.

Розв'язати лінійні диференціальні рівняння:

11.31. $y'+2xy=xe^{-x^2}$; **11.32.** $xy'=y\ln y$;

11.33. $xy'-2y=2x^4$; **11.34.** $(2x+1)y'=4x+2y$;

11.35. $y'+y=x$; **11.36.** $(xy+e^x)dy-xdy=0$;

11.37. $x^2y'+xy+1=0$; **11.38.** $y=x(y'-xcosx)$;

11.39. $2y=x(xy'-1)\ln x$; **11.40.** $y'-y=e^x$.

Розв'язати узагальнені диференціальні рівняння Бернуллі:

11.41. $y'x+y=-xy^2$; **11.42.** $y'+2xy=2x^3y^3$;

11.43. $xy'+y=x^2\ln x$; **11.44.** $(2xy+y^3)dy=dx$;

11.45. $(x^2\ln y-x)y'=y$; **11.46.** $y'+2xy=x^2y^3$;

11.47. $y'x+y=5x^3y^2$; $y(1)=1$; **11.48.** $y'x+3y=4x^4y^2$; $y(1)=1$;

11.49. $(2xy+y^4)dy=dx$; $y(1)=1$; **11.50.** $xy'+y=x\ln x$; $y(e)=1$.

Розв'язати диференціальні рівняння у повних диференціалах:

11.51. $(x^2+y^2)dx-2xydy=0$; **11.52.** $(3y+4x)dx+(3x+3y^2)dy=0$;

11.53. $(y^2+8x)dx+(2xy+5y^3)dy=0$; **11.54.** $(xe^y)y'+e^y+ye^x=0$;

11.55. $\left(1+x\sqrt{x^2+y^2}\right)dx=\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)ydy=0$;

Індивідуальне завдання

Розв'язати диференціальні рівняння:

а) $y'=\frac{x^n}{e^{2n-3y}}$; б) $\sqrt[n]{x}y'=y^{n-2}$;

в) $(x^n+y^n)dx-(x^n-y^n)dy=0$; г) $y'-\frac{y}{n}=e^{nx}$;

д) $y'-\frac{y}{x}=x^ny^n$; е) $2xy^ndx+(nx^2y^{n-1}+n)dy=0$.

де n – номер студента за списком.

§ 2. Диференціальні рівняння II порядку

Диференціальні рівняння II порядку з явно відсутнім *y*

Загальний вигляд рівнянь II порядку:

$$f(x, y, y', y'') = 0. \tag{12.11}$$

Як було показано, рівняння другого порядку вміщує дві суттєві сталі. Деякі з рівнянь допускають зниження порядку, в результаті якого отримуємо рівняння першого порядку.

Озн. Диференціальним рівняння з явно відсутнім y називають рівняння виду:

$$f(x, y', y'') = 0. \tag{12.12}$$

Якщо ввести заміну $y' = z$, то після повторного диференціювання отримаємо: $y'' = z'$, тому рівняння буде мати вигляд $f(x, z, z') = 0$, яке розв'язується як рівняння першого порядку.

<u>Приклад:</u> Розв'язати рівняння $y'' + y' \cdot tgx = \cos x$. Знайти частинний розв'язок, який відповідає початковим умовам: $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

У рівнянні відсутнє y, тому вводимо заміну $y' = z \Rightarrow y'' = z'$. Підставляючи в рівняння, отримаємо:

$$z' + z \cdot tgx = \cos x.$$

Маємо лінійне диференціальне рівняння I порядку, яке розв'язується заміною $z = uv$. Після підстановки отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} v' + v \cdot tgx = 0 \\ u'v = \cos x \end{cases}.$$

Перше з отриманих рівнянь розв'язуємо, як рівняння з відокремленими змінними:

$$dv + v \cdot tgx \cdot dx = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} + tgx \cdot dx = 0 \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = -\int tgx \cdot dx \Rightarrow \ln v =$$

$$= \int \frac{-\sin x \cdot dx}{\cos x} \Rightarrow \left| \begin{matrix} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{matrix} \right| \Rightarrow \ln v = \int \frac{dt}{t} \Rightarrow \ln v = \ln t \Rightarrow v = t \Rightarrow v = \cos x.$$

Розв'язуємо друге рівняння системи:

$$u'v = \cos x \Rightarrow u' \cos x = \cos x \Rightarrow u' = 1 \Rightarrow u = x + C_1.$$

Тоді: $z = uv \Rightarrow z = (x + C_1)\cos x \Rightarrow y' = (x + C_1)\cos x.$

Накладемо початкову умову:

$y'(0) = 0 \Rightarrow 0 = (0 + C_1)\cos 0 \Rightarrow 0 = C_1 \cdot 1 \Rightarrow C_1 = 0.$

Отже, частинний розв'язок рівняння першого порядку буде:

$$y' = x \cdot \cos x.$$

Розв'яжемо це рівняння:

$y' = x \cdot \cos x \Rightarrow dy = x\cos x \cdot dx \Rightarrow \int dy = \int x\cos x \cdot dx.$

Підінтегральна сума є добутком функцій, не зв'язаних між собою через похідну, тому потрібно застосувати формулу інтегрування "частинами ":

$$\int udv = uv - \int vdu \Rightarrow y = \int x\cos x \cdot dx = \begin{vmatrix} x = u; \cos x \cdot dx = dv \\ dx = du; v = \sin x \end{vmatrix} = x\sin x - \int \sin xdx =$$

$x\sin x - \cos x + C$.

В результаті отримали розв'язок рівняння другого порядку у вигляді:

$$y = x\sin x + \cos x + C.$$

Накладемо початкову умову:

$y(0) = 1 \Rightarrow 1 = 0 \cdot \sin 0 + \cos 0 + C \Rightarrow 1 = 1 + C \Rightarrow C = 0$.

Звідси частинний розв'язок рівняння буде:

$$y = x\sin x + \cos x.$$

Диференціальні рівняння II порядку з явно відсутнім *x*

Озн. Диференціальним рівнянням з явно відсутнім x називають рівняння виду:

$$f(y, y', y'') = 0. \tag{12.13}$$

Дані рівняння розв'язують за допомогою введення заміни $y' = z(y) \Rightarrow$ $y'' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot y' = y' \frac{dz}{dy} = z\frac{dz}{dy}.$

Тоді $f(y, z, z\frac{dz}{dy}) = 0$ є диференціальним рівнянням першого порядку.

<u>Приклад:</u> Розв'язати рівняння $y \cdot y'' = (y')^2$.

В рівнянні явно відсутнє x, тому вводимо заміну $y' = z \Rightarrow y'' = z\frac{dz}{dy}$.

Отримаємо: $yz\frac{dz}{dy} = z^2 \Rightarrow z(y\frac{dz}{dy} - z) = 0$.

Звідси переходимо до системи:

$$\begin{cases} z = 0 \\ y\frac{dz}{dy} = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ ydz = zdy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ \frac{dz}{z} = \frac{dy}{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ \int\frac{dz}{z} = \int\frac{dy}{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ \ln z = \ln y + \ln C \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ z = C_1 y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y' = 0 \\ y' = C_1 y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = C_0 \\ y = C_2 e^{C_1 x} \end{cases}.$$

Отримали загальний розв'язок рівняння другого порядку.

Лінійні диференціальні рівняння II порядку

Озн. Неоднорідним диференціальним рівнянням II порядку називають диференціальне рівняння виду: $y'' + p(x)\cdot y' + q(x)\cdot y = f(x),$ (12.14)

де $p(x),\ q(x),\ f(x)$ − деякі функції від аргументу x.

У вказаному рівнянні функція y та її похідні y' та y'' знаходяться в першому степені і не перемножуються між собою.

Озн. Однорідним диференціальним рівнянням II порядку називають диференціальне рівняння виду

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{12.15}$$

Тобто якщо у рівнянні (12.14) $f(x) = 0,$ то отримаємо лінійне однорідне диференціальне рівняння.

З усіх лінійних рівнянь другого порядку будемо вивчати такі, у яких функції $p(x)$ та $q(x)$ замінені числами p і q. Отже, будемо вивчати однорідні рівняння виду:

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{12.16}$$

та неоднорідні рівняння виду:

$$y'' + py' + qy = f(x). \tag{12.17}$$

Такі рівняння називаються лінійними диференціальними рівняннями зі сталими коефіцієнтами.

Теореми про розв'язки однорідних рівнянь

1. Якщо y_1 – деякий розв'язок рівняння (12.16), то $y = Cy_1$ також буде його розв'язком.

Для перевірки підставимо $y = Cy_1$ в рівняння (12.16), враховуючи, що $y' = Cy_1',\ y'' = Cy_1''$. Тоді: $Cy_1'' + Cpy_1' + Cqy_1 = 0.$

Винесемо сталу C як множник і отримаємо: $C(y_1'' + py_1' + qy_1) = 0,$ звідки $C \neq 0,$ а $y''_1 + py_1' + qy_1 \equiv 0$ тотожно (адже y_1 є розв'язком).

2. Якщо y_1 та y_2 − деякі розв'язки, то $y = y_1 \pm y_2$ також є розв'язком. Враховуємо, що $y' = y_1' \pm y_2'$ і $y'' = y_1'' \pm y_2''$.

Тоді:

$$y_1'' \pm y_2' + p(y_1' \pm y_2') + q(y_1 + y_2) = 0 \Rightarrow (y_1'' + py_1' + qy_1) \pm (y_2'' + py_2' + qy_2) = 0,$$

де вирази в дужках тотожно дорівнюють нулю.

3. Якщо y_1 і y_2 є деякими розв'язками, то: $y = C_1y_1 + C_2y_2$ утворює загальний розв'язок рівняння (1), в якому C_1 і C_2 − суттєві сталі (див. §1). Підставимо цей загальний розв'язок у рівняння (16):

$$C_1y_1'' + C_2y_2'' + p(C_1y_1' + C_2y_2') + q(C_1y_1 + C_2y_2) = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow C_1(y_1'' + py_1' + qy_1) + C_2(y_2'' + py_2' + qy_2) = 0,$ де вирази у дужках тотожно дорівнюють нулю.

З останньої теореми робимо важливий висновок: якби нам вдалося якимось чином знайти розв’язки y_1 та y_2, то без будь-якого інтегрування могли б відразу записати загальний розв’язок рівняння (12.16).

Розв’язок однорідного рівняння

Уважно розглядаючи рівняння (12.16), розуміємо, що розв’язком його не можуть бути степеневі, тригонометричні, логарифмічні, обернені тригонометричні функції. Самі функції та їх перша і друга похідна сильно відрізняються між собою (для $y = \ln x \Rightarrow y' = \frac{1}{x} \Rightarrow y'' = -\frac{1}{x^2}$), що за їх підстановки в (12.16) не дає можливості отримати тотожність (згадуємо, що розв'язок завжди перетворює рівняння в тотожність). Практично залишаються одні показникові функції, похідні яких подібні і самій функції, і між собою. Отже, спробуємо знайти деякий розв’язок рівняння (11.16) серед функцій типу $y = e^{kx}$. Тоді $y' = ke^{kx}, y'' = k^2e^{kx}$. Підставляючи в (11.16), отримаємо:

$$k^2e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0 \Rightarrow e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0\,.$$

Оскільки $e^{kx} \neq 0$, то:

$$k^2 + pk + q = 0\,. \tag{11.18}$$

Отримане рівняння називають характеристичним.

В розв’язку $y = e^{kx}$ число k має бути таким, щоб задовольняло характеристичне рівняння.

Відомо, що залежно від дискримінанта можуть бути три випадки:

а) дискримінант $D > 0$, існує два різних корені k_1 і k_2;

б) $D = 0$, обидва корені дійсні й рівні (так званий двократний корінь);

в) $D < 0$, дійсні корені відсутні. Але якщо уявити, що існує квадратний корінь з від’ємного числа (так званий уявний корінь), то отримаємо два корені рівняння.

Загальний розв’язок однорідного рівняння залежить від дискримінанту, а тому за розв’язування рівняння (12.16) необхідно скласти і розв’язати характеристичне рівняння.

Випадок різних дійсних коренів

Розв’язком характеристичного рівняння є два числа k_1 і k_2. Це означає, що існують два числа, за допомогою яких знаходимо розв’язки: $y_1 = e^{k_1x}$ і $y_2 = e^{k_2x}$. Тоді: $y = C_1y_1 + C_2y_2 = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$.

Висновок. Якщо корені характеристичного рівняння є числа k_1 і k_2, то розв'язок однорідного лінійного диференціального рівняння другого порядку необхідно шукати у вигляді:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}. \qquad (12.19)$$

<u>Приклад:</u> Розв'язати рівняння $y'' - 7y' + 12y = 0$.

Складаємо та розв'яжемо характеристичне рівняння:

$$k^2 - 7k + 12 = 0 \Rightarrow (k-4)\cdot(k-3) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} k_1 = 3 \\ k_2 = 4 \end{array}\right.. \text{ Тоді } \left[\begin{array}{l} y_1 = e^{3x} \\ y_2 = e^{4x} \end{array}\right. \Rightarrow y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x}.$$

Розв'язане диференціальне рівняння не вміщує x, тому його можна розв'язувати методом зниження порядку (див.§3, п.2), але це набагато складніше.

Випадок дійсних рівних коренів

Якщо дискримінант характеристичного рівняння дорівнює нулю, то корені цього рівняння будуть $k_1 = k_2 = k$, тому: $\left[\begin{array}{l} y_1 = C_1 e^{kx} \\ y_2 = C_2 e^{kx} \end{array}\right. \Rightarrow \quad y = C_1 e^{kx} + C_2 e^{kx} =$

$= (C_1 + C_2)e^{kx} = Ce^{kx}$.

Отже, отримали не загальний розв'язок з двома суттєво незалежними сталими, а один частковий. Необхідно знайти другий корінь. Уявимо, що нам вдалося незначно змінити числа p і q так, що розв'язками характеристичного рівняння стали числа $k_1 = k$; $k_2 = k + \Delta k$ (метод Л. Ейлера). За теоремою Вієта:

$$k_1 + k_2 = -p \text{ і } k_1 k_2 = q.$$

Тоді: $y'' - (k_1 + k_2)y' + k_1 k_2 y = 0 \Rightarrow y'' - (2k + \Delta k)y' + k(k + \Delta k) = 0,$ яке необхідно розв'язати. Часткові розв'язки цього рівняння: $\left[\begin{array}{l} y_1 = e^{kx} \\ y_2 = e^{(k+\Delta k)x} \end{array}\right.$.

Згідно з теоремою про розв'язки (§4) $y_3 = y_2 - y_1$ також буде розв'язком диференціального рівняння, тобто: $y_3 = e^{(k+\Delta k)x} - e^{kx} \Rightarrow y_3 = e^{kx}(e^{\Delta kx} - 1)$ − розв'язок.

Крім того, $\dfrac{y_3}{\Delta k}$ також буде розв'язком рівняння, тобто $y_4 = \dfrac{y_3}{\Delta k}$. Розглянемо граничний перехід:

$$\lim_{\Delta k \to 0} y_4 = \lim_{\Delta k \to 0} \frac{y_3}{\Delta k} = \lim_{\Delta k \leftarrow 0} \frac{e^{kx}(e^{\Delta kx} - 1)}{\Delta k} = e^{kx} \lim_{\Delta k \to 0} \frac{e^{\Delta kx}}{\Delta k} = xe^{kx} \text{ (друга визначна границя).}$$

Отже, $y_4 = xe^{kx}$ також буде розв'язком рівняння. Враховуючи, що $y_1 = e^{kx}$, загальний розв'язок буде мати вигляд:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_4 = C_1 e^{kx} + C_2 xe^{kx}.$$

Висновок. Якщо корені характеристичного рівняння − однакові числа, тобто $k_1 = k_2 = k,$ то розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння II порядку необхідно шукати у вигляді:

$$y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx} . \qquad (12.20)$$

Приклад: Розв'язати рівняння $y'' - 12y' + 36y = 0$.

Складемо та розв'яжемо характеристичне рівняння:
$k^2 - 12k + 36 = 0 \Rightarrow (k-6)^2 = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = 6$.

Корені характеристичного рівняння однакові, тому:

$$\left[\begin{array}{l} y_1 = e^{6x} \\ y_2 = e^{6x} \end{array}\right. \Rightarrow y = C_1 e^{6x} + C_2 x e^{6x}.$$

Випадок уявних коренів

Серед дійсних чисел відсутнє число a, для якого $a^2 < 0$. Якщо деяке від'ємне число $-a$ записати: $-a = -1 \cdot a = -1 \cdot b^2$, де $b^2 > 0$, то $\sqrt{-a} = \sqrt{-1 \cdot b^2} =$
$= |b| \cdot \sqrt{-1}$. Якщо уявити, що існує таке число (якого серед дійсних чисел насправді немає), квадрат якого дорівнює -1, то $\sqrt{-1}$ буде добуватись. Позначимо це число буквою i (від лат. "imaginaries"− уявний). Тоді $i \cdot i = i^2 = -1 \Rightarrow \sqrt{-1} = i.$

Якщо розв'язок характеристичного рівняння буде: $k = a \pm \sqrt{-D}$, тобто $k = a \pm bi,$ де a − дійсне число, а bi − уявне, то $a \pm bi$ називається комплексним числом.

Запис $a \pm bi$ називається алгебраїчною формою комплексного числа. Крім того існує його показникова форма у вигляді e^{xi} та тригонометрична форма у вигляді $\cos x \pm i \sin x$. Одне й те ж число може записуватись у будь-якій із форм. Наприклад:

$e^{xi} = \cos x + i \sin x$, $e^{-xi} = \cos x - i \sin x$ (формули Л. Ейлера), звідки:

$$\cos x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}, \ \sin x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}.$$

Якщо у формулі Л. Ейлера замінити x на nx, то отримаємо відому формулу Муавра: $e^{nxi} = \cos nx + i \sin nx$.

Відмітимо, що $a \pm bi = r(\cos\varphi \pm i \sin\varphi)$.

За формулами Ейлера знаходяться наступні співвідношення:
$e^{\pm 2\pi i} = 1; e^{\pm \pi i} = -1; e^{\frac{\pi}{2}i} = i; e^{-\frac{\pi}{2}i} = -i$ та інші.

Якщо характеристичне рівняння має два різних комплексних корені у вигляді: $k_1 = a + bi; k_2 = a - bi$, то $y_1 = e^{(a+bi)x} = e^{ax} e^{bxi}; y_2 = e^{(a-bi)x} = e^{ax} \cdot e^{-bx} \Rightarrow$
$\Rightarrow y = C_1 e^{ax} e^{bxi} + C_2 e^{ax} e^{-bxi} = e^{ax}(C_1 e^{bxi} + C_2 e^{-bxi})$. Використовуємо формулу Муавра:
$e^{bxi} = \cos bx + i \sin bx,\ e^{-bxi} = \cos bx - i \sin bx$.

Тоді:
$y = e^{ax}(C_1(\cos bx + i\sin bx) + C_2(\cos bx - i\sin bx)) = e^{ax}((C_1 + C_2)\cdot\cos bx +$
$+ i(C_1 - C_2)\sin bx) = e^{ax}(C_3\cos bx + C_4\sin bx)$.
Числа C_1 і C_2 − довільні і можуть бути дійсними чи комплексними, тому $C_3 = C_1 + C_2$ і $C_4 = i(C_1 - C_2)$ − можуть бути дійсними числами. Наприклад, якщо $C_1 = 3 - i; C_2 = 3 + i$, то $C_1 + C_2 = 3 - i + 3 + i = 6$ (дійсне число) і $i(C_1 - C_2) = i(3 - i - 3 - i) = i(-2i) = -2i^2 = -2\cdot(-1) = 2$ − також дійсне число. Як завжди, позначимо довільні сталі через C_1 і C_2 та отримаємо загальний розв'язок у вигляді: $e^{ax}(C_1\cos bx + C_2\sin bx)$.

Висновок. Якщо корені характеристичного рівняння − комплексні числа, що мають вигляд $k = a \pm bi$, то розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння II порядку шукають у вигляді:

$$y = e^{ax}(C_1\cos bx + C_2\sin bx). \qquad (12.21)$$

Приклад: Розв'язати рівняння $y'' - 4y' + 40y = 0$.

Складаємо та розв'яжемо характеристичне рівняння: $k^2 - 4k + 40 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow k = 2 \pm 6i$. Отже, $a = 2$, $b = 6$. Тоді:

$$y = e^{2x}(C_1\cos 6x + C_2\sin bx).$$

Як підсумок параграфа можемо навести алгоритм розв'язування лінійних однорідних диференціальних рівнянь II порядку:

1. Необхідно скласти характеристичне рівняння.
2. Знайти корені характеристичного рівняння k_1 і k_2.
3. Якщо корені дійсні й різні, то розв'язок $y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$.
4. Якщо корені дійсні й рівні, то розв'язок $y = C_1e^{kx} + C_2xe^{kx}$.
5. Якщо корені комплексні, тобто $k = a \pm bi$, то розв'язок

$y = e^{ax}(C\cos bx + C\sin bx)$.

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння

Розглянемо неоднорідне рівняння $y'' + py' + qy = f(x)$, яке відрізняється від однорідного наявністю правої частини у вигляді будь-якої функції. Нехай функція y_n є деякий частинний розв'язок вказаного рівняння.

Тоді $y = y_0 + y_n$ є його загальним розв'язком рівняння, в якому y_0 − розв'язок однорідного рівняння (12.16).

Підставимо $y = y_0 + y_n$ у рівняння (12.17), враховуючи, що $y' = y_0' + y_n'$ і $y'' = y_0'' + y_n''$.

Тоді: $y_0'' + y_n'' + p(y_0' + y_n') + q(y_0 + y_n) = f(x) \Rightarrow (y_0'' + py_0' + qy_0) + (y_n'' + py_n' + qy_n) =$ $= f(x)$.

Але $y_0'' + py_0' + qy_0 \equiv 0$, ($y_0$ − розв'язок однорідного рівняння), а частинний розв'язок неоднорідного рівняння $y_n'' + py_n' + qy_n \equiv f(x)$. В y_0 входить дві суттєво незалежних сталих, тому $y = y_0 + y_n$ є загальним розв'язком неоднорідного рівняння.

Якщо рівняння має вигляд:

$$y'' + py' + qy = f_1(x) + f_2(x)\,, \tag{12.22}$$

то y_n шукають у вигляді $y_{n_1} + y_{n_2}$, де y_{n_1} − частинний розв'язок рівняння

$$y'' + py' + qy = f_1(x)\,, \tag{12.23}$$

а y_{n_2} − частинний розв'язок рівняння

$$y'' + py' + \ + qy = f_2(x)\,. \tag{12.24}$$

Інакше кажучи, для того, щоб розв'язати рівняння (12.22), необхідно розв'язати рівняння (23) і (24), з яких знайти розв'язки

$$y_1 = y_0 + y_{n_1} \quad \text{і} \quad y_2 = y_0 + y_{n_2}\,,$$

після чого записати загальний розв'язок рівняння (21) за допомогою принципу накладання у вигляді: $y = y_0 + y_{n_1} + y_{n_2}$

Розглянемо правила знаходження y_n для деяких функцій $f(x)$.

$f(x)$ − ***многочлен виду*** $P_n(x)$

Якщо права частина неоднорідного рівняння є многочленом виду

$$P_n(x) = A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \ldots + A_1 x + A_0\,,$$

то частинний розв'язок y_n шукають у вигляді:

а) $y_n = Q_n(x)$, якщо $q \neq 0$, тобто $Q_n(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$;

б) $y_n = x \cdot Q_n(x)$, якщо $q = 0; p \neq 0$;

в) $y_n = x^2 \cdot Q_n(x)$, якщо $p = q = 0$.

<u>Приклад 1:</u> Розв'язати рівняння $y'' - 12y' + 35y = 35x^2 + 11x + 25$.

Складемо та розв'яжемо характеристичне рівняння $k^2 - 12k + 35 = 0 \Rightarrow (k-5)\cdot(k-7) = 0 \Rightarrow k_1 = 5; k_2 = 7 \Rightarrow y_0 = C_1 e^{5x} + C_2 e^{7x}$.

В рівнянні $q = 35 \neq 0$, тому частинний розв'язок шукаємо у вигляді многочлена другого степеня (права частина рівняння − також многочлен другого степеня). Отже, $y_n = ax^2 + bx + c$ є розв'язком, який перетворює диференціальне рівняння в тотожність. Знаходимо похідні y' та y'', які разом з y підставимо в рівняння:

$$y' = 2ax + b; y'' = 2a \Rightarrow 2a - 12(2ax + b) + 35(ax^2 + bx + c) \equiv 35x^2 + 11x + 25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 35ax^2 + (-24a + 35b)x + (2a - 12b + 35c) \equiv 35x^2 + 11x + 25\,.$$

Многочлени тотожно рівні, якщо рівні коефіцієнти за невідомих з рівними степенями, тому:

$$\begin{cases} 35a = 35 \\ -24a + 35b = 11 \\ 2a - 12b + 35c = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \Rightarrow y_n = x^2 + x + 1. \\ c = 1 \end{cases}$$

В результаті загальний розв'язок диференціального рівняння буде:

$$y = C_1 e^{5x} + C_2 e^{7x} + x^2 + x + 1.$$

Приклад 2: Розв'язати рівняння $y'' - 7y' = 21x^2 + 8x + 5.$

Характеристичне рівняння:

$$k^2 - 7k = 0 \Rightarrow k(k-7) = 0 \Rightarrow k = 0;$$

$$k = 7 \Rightarrow y_0 = C_1 e^{0x} + C_2 e^{7x} \Rightarrow y_0 = C_1 + C_2 e^{7x}.$$

У рівнянні $q=0$, тому частинний розв'язок шукаємо у вигляді: $y_n = x(ax^2 + bx + c)$.

Тоді: $y_n = ax^3 + bx^2 + cx \Rightarrow y_n' = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow y_n'' = 6ax + 2b$. Підставимо в рівняння: $6ax + 2b - 7(3ax^2 + 2bx + c) \equiv 21x^2 + 8x + 5 \Rightarrow$

$$\Rightarrow -21ax^2 + (6a - 14b)x + (2b - 7c) \equiv 21x^2 + 8x + 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -21a = 21 \\ 6a - 14b = 8 \\ 2b - 7c = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \Rightarrow y_n = -x^3 - x^2 - x. \\ c = -1 \end{cases}$$

Загальний розв'язок буде: $y = C_1 + C_2 e^{7x} - x^3 - x^2 - x$.

$f(x)$ ***– показникова функція виду*** Ae^{mx}

Частинний розв'язок шукають у вигляді:

а) $y_n = ae^{mx}$, якщо m − не корінь характеристичного рівняння;

б) $y_n = axe^{mx}$, якщо m − один з коренів характеристичного рівняння;

в) $y_n = ax^2 e^{mx}$, якщо m − двократний корінь характеристичного рівняння.

Приклад 1: Розв'язати рівняння $y'' - 12y' + 35y = 6e^{4x}$.

Характеристичне рівняння має корені $k_1 = 5; k_2 = 7$. Тоді: $y_0 = C_1 e^{5x} + C_2 e^{7x}$.

Показник степеня $m = 4$ не співпадає ні з одним коренем, тому:

$$y_n = ae^{4x} \Rightarrow y_n' = 4ae^{4x} \Rightarrow y_n'' = 16ae^{4x}.$$

Підставляємо в рівняння і отримаємо:

$16ae^{4x} - 12 \cdot 4ae^{4x} + 35ae^{4x} \equiv 6e^{4x} \Rightarrow 3ae^{4x} \equiv 6e^{4x} \Rightarrow a = 2 \Rightarrow \; y_n = 2e^{4x}$.

Загальний розв'язок рівняння: $y = C_1 e^{5x} + C_2 e^{7x} + 2e^{4x}$.

Приклад 2: Розв'язати рівняння $y'' - 8y' + 16y = 8e^{4x}$.

Характеристичне рівняння $k^2 - 8k + 16 = 0 \Rightarrow (k-4)^2 = 0 \Rightarrow k = 4$. Розв'язок однорідного рівняння: $y_0 = C_1 e^{4x} + C_2 xe^{4x}$.

Двократний корінь однорідного рівняння співпадає зі степенем показникової функції диференціального рівняння, тому:

$$y_n = ax^2e^{4x} \Rightarrow y_n' = 2axe^{4x} + 4ax^2e^{4x} = 2a(x+2x^2)e^{4x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_n'' = 2a(1+4x)e^{4x} + 8a(x+2x^2)e^{4x} = 2ae^{4x}(1+8x+8x^2).$$

За підстановки в рівняння отримаємо:

$$2ae^{4x}(1+8x+8x^2) - 16ae^{4x}(x+2x^2) + 16ax^2e^{4x} \equiv 8e^{4x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2ae^{4x}(1+8x+8x^2-8x-16x^2+8x^2) \equiv 8e^{4x} \Rightarrow a = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_n = 4e^{4x} \Rightarrow y = C_1e^{4x} + C_2xe^{4x} + 4e^{4x}.$$

$f(x)$ – ***функція виду*** $P_n(x)e^{mx}$

Частинний розв'язок рівняння шукають у вигляді:

а) $y_n = Q_n(x)e^{mx}$, якщо m не є коренем характеристичного рівняння;

б) $y_n = xQ_n(x)e^{mx}$, якщо $m = k_1$ або $m = k_2$;

в) $y_n = x^2Q_n(x)e^{mx}$, якщо $m = k_1 = k_2 = k$.

Якщо в правій частині неоднорідного рівняння многочлен є числом, тобто $P_n(x)e^{mx} = Ae^{mx}$, то маємо частковий випадок, розглянутий у пункті 2.

<u>Приклад:</u> Розв'язати рівняння $y'' - 12y' + 35y = (3x^2 + 4x - 5)e^{4x}$.

Складемо та розв'яжемо характеристичне рівняння $k^2 - 12k + 35 = 0$: $k = 5; k = 7 \Rightarrow y_0 = C_1e^{5x} + C_2e^{7x}$. З умови $m = 4$, тобто $m \neq 5$; $m \neq 7$. Отже, частинний розв'язок шукаємо у вигляді: $y_n = (ax^2 + bx + c)e^{4x}$.

$$y_n' = (2ax+b)e^{4x} + 4(ax^2+bx+c)e^{4x} = (4ax^2 + 2(a+2b)x + b + 4c)e^{4x} \Rightarrow$$

$$y_n'' = (8ax + 2a + 4b)e^{4x} + 4(4ax^2 + 2(a+2b)x + b + 4c)e^{4x} = 2(8ax^2 + 8(a+b)x +$$
$$+ a + 4b + 8c)e^{4x}.$$

Підставляємо в диференціальне рівняння і отримуємо:

$$(16ax^2 + 16ax + 16bx + 2a + 8b + 16c)e^{4x} - 12(4ax^2 + 2ax + 4bx + b + 4c)e^{4x} + 35(ax^2 +$$
$$+ bx + c)e^{4x} \equiv (3x^2 + 4x - 5)e^{4x} \Rightarrow (3ax^2 + (-8a + 3b)x + 2a - 4b + 3c)e^{4x} \equiv$$
$$\equiv (3x^2 + 4x - 5)e^{4x} \Rightarrow 3ax^2 + (-8a + 3b)x + 2a - 4b + 3c \equiv 3x^2 + 4x - 5.$$

З тотожності отримаємо систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 3a = 3 \\ -8a + 3b = 4 \\ 2a - 4b + 3c = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \Rightarrow y_n = (x^2 + 4x + 3)e^{4x}. \\ c = 3 \end{cases}$$

Загальний розв'язок рівняння буде: $y = C_1e^{4x} + C_2e^{4x} + (x^2 + 4x + 3)e^{4x}$.

$f(x)$ – ***тригонометрична функція виду*** $A\cos\alpha\, x + B\sin\alpha\, x$

Права частина рівняння є сумою функцій, тому використовуємо принцип накладання, згідно з яким частинний розв'язок рівняння шукають у вигляді суми двох частинних розв'язків.

Частинний розв'язок шукаємо у вигляді:

а) $y_n = a\cos\alpha x + b\sin\alpha x$, якщо $i\alpha$ не є коренем характеристичного рівняння;

б) $y_n = x(a\cos\alpha x + b\sin\alpha x)$, якщо $i\alpha$ − корінь характеристичного рівняння.

<u>Приклад 1:</u> Розв'язати рівняння $y'' - 5y' + 6y = -18\cos 3x + 12\sin 3x.$

Складемо та розв'яжемо характеристичне рівняння $k^2 - 5k + 6 = 0 \Rightarrow k_1 = 2$, $k_2 = 3$.

$$y_0 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}.$$

Корені рівняння дійсні, тому:

$y_n = a\cos 3x + b\sin 3x \Rightarrow y_n' = -3a\sin 3x + 3b\cos 3x \Rightarrow y_n'' = -9a\cos 3x - 9b\sin 3x.$

Підставимо в рівняння і отримаємо:

$-9a\cos 3x - 9b\sin 3x - 5(-3a\sin 3x + 3b\cos 3x) + 6a\cos 3x + 6b\sin 3x \equiv$

$\equiv -18\cos 3x + 12\sin 3x \Rightarrow (-3a - 15b)\cos 3x + (15a - 3b)\sin 3x \equiv -18\cos 3x + 12\sin 3x$.

З тотожності отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} -3a - 15b = -18 \\ 15a - 3b = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 5b = 6 \\ 5a - b = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 5b = 6 \\ 25a - 5b = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow y_n = \cos 3x + \sin 3x.$

Загальний розв'язок рівняння:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \cos 3x + \sin 3x.$$

<u>Приклад 2:</u> Розв'язати рівняння $y'' + 4y = 8\cos 2x + 12\sin 2x.$

Складемо та розв'яжемо характеристичне рівняння $k^2 + 4 = 0 \Rightarrow k^2 = -4 \Rightarrow$ $k = \pm 2i$.

Тоді:

$$y_0 = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x.$$

Значення $i\alpha = 2i$ співпадає з коренями характеристичного рівняння, тому $y_n = x(a\cos 2x + b\sin 2x) \Rightarrow y_n' = a\cos 2x + b\sin 2x + x(-2a\sin 2x + 2b\cos 2x) =$

$= (a + 2bx)\cos 2x + (-2ax + b)\sin 2x \Rightarrow y_n'' = 2b\cos 2x - 2(a + 2bx)\sin 2x - 2a\sin 2x +$

$+ 2(-2ax + b)\cos 2x = (4b - 4ax)\cos 2x - (4a + 4bx)\sin 2x.$

Підставивши значення y_n і y_n'' у рівняння, отримаємо:

$(4b - 4ax)\cos 2x - (4a + 4bx)\sin 2x + 4x(a\cos 2x + b\sin 2x) \equiv 8\cos 2x + 12\sin 2x \Rightarrow$

$4b\cos 2x - 4a\sin 2x \equiv 8\cos 2x + 12\sin 2x.$

З тотожності випливає: $\begin{cases} 4b = 8 \\ -4a = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = -3 \end{cases}.$

Отже, частинний розв'язок матиме вигляд: $y_n = x(2\sin 2x - 3\cos 2x)$.

А загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + x(2\sin 2x - 3\cos 2x).$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Розв'язати диференціальні рівняння методом пониження порядку:

11.56. $xy'' + y' = 0$; **11.57.** $yy'' = 1 + y'^2$;

11.58. $y'' - xy' = 0$; **11.59.** $y'' + y' = \sin x$;

11.60. $2y'y'' = 1$; **11.61.** $2yy'' = y^2 + (y')^2$;

11.62. $xy'' = 1 + x^2$; **11.63.** $y'' + 2xy'^2 = 0$;

11.64. $xy'' - y' = x^2e^x$; **11.65.** $y'' - \dfrac{y'}{x-1} = x^2 - x$;

11.66. $\left(1 + x^2\right)y'' + 2xy' = x^3$; **11.67.** $y'' + y'tgx = \sin 2x$;

11.68. $(3y+4)y'' - 3y'^2 = 0$; **11.69.** $(y-1)y'' - 2y'^2 = 0$.

Знайти частинний розв'язок заданого рівняння:

11.70. $y'y'' = 2y,\ y(0) = y'(0) = 0$; **11.71.** $yy'' = (y')^2,\ y(0) = 1; y(0) = 3$;

11.72. $2yy'' = 3 + (y')^2,\ y(1) = y'(1) = 1$; **11.73.** $xy'' - y' = \ln x,\ y(1) = y'(1) = 1$;

11.74. $xy'' - y' = x^2e^x,\ y(0) = -1; y(0) = 0$;

11.75. $y'' + y'tgx = \sin 2x,\ y(0) = 1; y'(0) = 0$;

11.76. $x^3y'' + x^2y' = 1, y(1) = y'(1) = 1$.

Знайти загальні розв'язки лінійних однорідних диференціальних рівнянь:

11.77. $y'' + 2y' - 3y = 0$; **11.78.** $y'' - 2y' + y = 0$;

11.79. $y'' + 3y = 0$; **11.80.** $y'' - 4y' + 5y = 0$;

11.81. $y'' - 4y = 0$; **11.82.** $y'' + 4y = 0$.

Знайти загальні розв'язки лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь:

11.83. $y'' + 2y' + y = -2$; **11.84.** $y'' + y' = 4$;

11.85. $y'' + 2y' + 2y = 1$; **11.86.** $y'' + 2y' = x^2 - 1$;

11.87. $y'' + 6y' + 5y = e^{2x}$; **11.88.** $y'' + 4y' + 3y = 9e^{-3x}$;

11.89. $y'' + y' = xe^{-x}$; **11.90.** $y'' - 2y' = 4x^2e^x$;

11.91. $y'' - 6y' + 25y = 2sinx + 3\cos x$; **11.92.** $y'' + 4y = 3\cos x$.

Індивідуальне завдання

1. Розв'язати диференціальне рівняння методом пониження порядку: $y'' + y' = \sqrt[n]{x}$.

2. Знайти загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння:

а) $y'' - 2ny' + n^2y = 0$; б) $y'' + n^2 = 0$; в) $y'' - (n+2)y' + 2ny = 0$.

3. Знайти загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння:
а) $y'' - (1+n)y' + ny = x^2 + nx + (n+1)$; б) $y'' + n^2 y = (n-1)\cos x$,
де n – номер студента за списком.

§ 3. Загальний метод розв'язування неоднорідних диференціальних рівнянь II порядку (метод Лагранжа або варіації довільних сталих)

В попередньому параграфі розглянуто методи знаходження розв'язків неоднорідних рівнянь виду $y'' + py' + qy = f(x)$ тільки для деяких специфічних функцій у правій частині рівняння. Якщо вигляд $f(x)$ відрізняється від вигляду розглянутих функцій, то застосувати наведені методи знаходження розв'язків рівнянь неможливо. Для таких випадків існує запропонований Лагранжем загальний метод розв'язування диференціальних рівнянь, названий методом варіації довільних сталих. Згідно з цим методом на розв'язок однорідного рівняння $y_0 = C_1 y_1 + C_2 y_2$ накладається умова: замість чисел C_1, C_2 підібрати такі функції $C_1(x)$ та $C_2(x)$ за яких:

$$y = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 \tag{12.25}$$

буде розв'язком неоднорідного рівняння. Таким чином, на дві невідомі функції накладено одну умову, тому для однозначності вибору функцій необхідна ще одна. За другу умову (для полегшення розв'язку) виберемо твердження: нехай $C_1(x)$ і $C_2(x)$ будуть такими, щоб y' мала той же вигляд, який вона має при сталих коефіцієнтах, тобто виконувалась умова:

$$y' = C_1(x) y_1' + C_2(x) y_2'. \tag{12.26}$$

Але $y' = C_1'(x) y_1 + C_1(x) y' + C_2'(x) y_2 + C_2(x) y_2' = (C_1(x) y_1' + C_2(x) y_2) +$
$+ (C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2)$, звідки:

$$C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 = 0. \tag{12.27}$$

Знаходимо з (12.26) другу похідну: $y'' = C_1'(x) y_1' + C_1(x) y_1'' + C_2'(x) y_2' + C_2(x) y_2''$,
тоді $y'' = (C_1(x) y_1'' + C_2(x) y_2'') + (C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2')$.

Підставимо отримані значення y, y', y'' в $y'' + py' + qy = f(x)$:
$(C_1(x) y_1'' + C_2(x) y_2'') + (C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' + p(C_1(x) y_1' + C_2(x) y_2') + q(C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2) =$
$= f(x) \Rightarrow (C_1(x) y_1'' + pC_1(x) y_1') + qC_1(x) y_1) + (C_2(x) y_2'' + pC_2(x) y_2' +$
$+ qC_2(x) y_2'') + (C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2') = f(x).$

Розв'язки y_1 і y_2 − частинні розв'язки однорідного рівняння, тому вирази у перших двох дужках тотожно дорівнюють нулю, тобто:

$C_1(x) y_1'' + pC_1(x) y_1' + qC_1(x) y_1 \equiv 0$ і $C_2(x) y_2'' + pC_2(x) y_2' + qC_2(x) y_2 \equiv 0.$

Тоді:

$$C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x). \qquad (12.28)$$

Це рівняння є результатом накладання другої умови. Зводимо рівняння (12.27) і (12.28) у систему:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x) \end{cases}. \qquad (12.29)$$

Із системи знаходимо невідомі $C_1'(x)$ і $C_2'(x)$, інтегрування яких дає можливість знайти $C_1(x)$ і $C_2(x)$.

Приклад: Розв'язати рівняння $y'' + 4y = \dfrac{4}{\cos 2x}$.

Розв'язок характеристичного рівняння: $k^2 + 4 = 0 \Rightarrow k = \pm 2i$, тоді: $y_1 = \cos 2x$; $y_2 = \sin 2x \Rightarrow y_0 = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$.

Знаходимо похідні: $y_1' = -2\sin 2x; y_2' = 2\cos 2x$. Запишемо систему:

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0 \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' = \dfrac{4}{\cos 2x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1'\cos 2x + C_2'\sin 2x = 0 \\ -2C_1'\sin 2x + 2C_2'\cos 2x = \dfrac{4}{\cos 2x} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1'\cos 2x + C_2'\sin 2x = 0 \\ -C_1'\sin 2x + C_2'\cos 2x = \dfrac{2}{\cos 2x} \end{cases} \qquad (*)$$

Помножимо перше рівняння на $\sin 2x$, а друге – на $\cos 2x$ і отримаємо:

$$\begin{cases} C_1'\sin 2x \cdot \cos 2x + C_2'\sin^2 2x = 0 \\ -C_1'\sin 2x \cdot \cos 2x + C_2'\cos^2 2x = 2 \end{cases}.$$

За додавання рівнянь отримаємо: $C_2'(\sin^2 2x + \cos^2 2x) = 2 \Rightarrow C_2' = 2$. Підставимо його в (*) і отримаємо: $C_1'\cos 2x + 2\sin 2x = 0 \Rightarrow C_1' = -2tg 2x$.

Знаходимо функції $C_1(x)$ і $C_2(x)$: $C_2(x) = 2x + C_3$;

$$C_1(x) = -2\int tg 2x dx = -2\int \frac{\sin 2x}{\cos 2x}dx = \begin{vmatrix} \cos 2x = t \\ -2\sin 2x = dt \end{vmatrix} = -2\int \frac{-dt}{2t} =$$

$$= \int \frac{dt}{t} = \ln t + C_4 = \ln \cos 2x + C_4.$$

Підставляючи отримані значення функцій у рівняння (12.24), отримаємо:

$$y = (\ln\cos 2x + C_4)\cos 2x + (2x + C_3)\sin 2x = C_4\cos 2x + C_3\sin 2x + \cos 2x \cdot \ln\cos 2x +$$
$$+ 2x \cdot \sin 2x.$$

Позначимо довільні сталі більш звичними C_1 і C_2, після чого розв'язок рівняння запишемо:

$$y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \cos 2x \cdot \ln\cos 2x + 2x \cdot \sin 2x.$$

Отримали розв'язок: $y_0 = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x; y_n = 2x \cdot \sin 2x + \cos 2x \cdot \ln\cos 2x$.

§ 4. Системи диференціальних рівнянь

Розглянемо систему з двох диференціальних рівнянь I порядку у вигляді

$$\begin{cases} y' = f_1(x, y, z) \\ z' = f_2(x, y, z) \end{cases},$$

яку називають нормальною.

Розглянемо алгоритм розв'язування таких систем:

1. Продиференціювати рівняння $y' = f(x, y, z)$ і отримати y''.

2. Замінити в отриманому рівнянні значення z' другим рівнянням системи.

3. Знайти з першого рівняння системи значення z і його також підставити у знайдене вище рівняння з y''.

4. Отримати рівняння II порядку, яке вміщує змінну x та функцію y разом з її похідними y' та y''.

5. Розв'язати рівняння II порядку і знайти y.

6. Знайти y' і, підставляючи його та y у перше рівняння системи, знайти z.

<u>Приклад:</u> Розв'язати систему диференціальних рівнянь $\begin{cases} y' = y - z \\ z' = y + z \end{cases}$.

Диференціюємо перше рівняння: $y'' = y' - z' \Rightarrow y'' = y' - (y + z) = y' - y - z$ (*)

З першого рівняння системи знаходимо: $z = y - y'$. (**)

Підставляємо отримане значення z в (*):

$$y'' = y' - y - y + y' \Rightarrow y'' - 2y' + 2y = 0 \Rightarrow k^2 - 2k + 2 = 0 \Rightarrow k = 1 \pm i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x).$$

Один розв'язок знайдено. Знаходимо y' і підставляємо її в (**):

$$y' = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x) + e^x (-C_1 \sin x + C_2 \cos x) = e^x (C_1 + C_2) \cos x +$$

$$+ (C_2 - C_1) \sin x) \Rightarrow z = y - y' \Rightarrow z = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x) - e^x ((C_1 + C_2) \cos x +$$

$$+ (C_2 - C_2) \sin x) = e^x (C_1 \sin x - C_2 \cos x) -$$ це другий розв'язок.

Запишемо розв'язки в систему: $\begin{cases} y = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x) \\ z = e^x (C_1 \sin x - C_2 \cos x) \end{cases}$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Розв'язати системи диференціальних рівнянь:

11.93. $\begin{cases} y' = y - 3z \\ z' = y + 5z \end{cases}$;

11.94. $\begin{cases} y' = z + e^{3x} \\ z' = y + 5e^{3x} \end{cases}$;

11.95. $\begin{cases} y' = y - z \\ z' = 3y + 6z \end{cases}$;

11.96. $\begin{cases} y' = z + x^2 \\ z' = 4y + 2x \end{cases}$;

11.97. $\begin{cases} y' = 4y - z \\ z' = y + 2z \end{cases}$;

11.98. $\begin{cases} y' = z - e^x \\ z' = 4y + 2e^x \end{cases}$;

11.99. $\begin{cases} y' = 2x - 3y - 4z \\ z' = x + y + z \end{cases}$;

11.100. $\begin{cases} y' = 2y + 4z + \cos x \\ z' = -y - 2z + \sin x \end{cases}$;

11.101. $\begin{cases} y' = 1 + 4x + 2y + 4z \\ z' = y + z + 1{,}5x^2 \end{cases}$;

11.102. $\begin{cases} y' = 2y + z + \cos x \\ z' = 3\sin x - y \end{cases}$.

Індивідуальне завдання

Розв'язати систему диференціальних рівнянь: $\begin{cases} y' = y - nz \\ z' = y + (n+1)z \end{cases}$, де n – номер студента за списком.

Запитання до розділу XII

1. Які рівняння називаються диференціальними?
2. Як визначається порядок диференціального рівняння?
3. Що називається розв'язком диференціального рівняння?
4. Що таке суттєво незалежні сталі?
5. Що таке частинний та загальний розв'язок диференціального рівняння?
6. Яке рівняння називається рівнянням з відокремленими змінними?
7. Що таке рівняння зі змінними, які відокремлюються?
8. Яке правило відокремлення змінних?
9. Що таке лінійне рівняння I порядку з правою частиною?
10. В чому полягає метод Й. Бернуллі?
11. Яке рівняння називається однорідним?
12. Що таке рівняння в повних диференціалах?
13. Які рівняння II порядку допускають пониження порядку?
14. Що таке лінійне однорідне рівняння II порядку?
15. Як утворюється характеристичне рівняння?
16. Який вигляд має розв'язок однорідного рівняння II порядку за додатного, від'ємного та нульового дискримінанту?
17. Що таке неоднорідне рівняння II порядку?
18. Як знаходиться частинний розв'язок неоднорідного рівняння для правої частини у вигляді: а) многочлена; б) показникової функції; в) добутку многочлена на показникові функції; г) тригонометричної функції?
19. Як знаходиться частинний розв'язок неоднорідного рівняння, права частина якого є сумою функцій?
20. В чому полягає зміст методу варіації довільних сталих?
21. Як розв'язуються системи, складені з двох диференціальних рівнянь першого порядку?

XIII. РЯДИ

§ 1. Основні поняття і теореми

Нехай задана нескінченна послідовність чисел $u_1, u_2, u_3, ... u_n, ...$

Озн. Числовим рядом називають суму членів заданої послідовності

$$u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ... \qquad (13.1)$$

А самі числа $u_1, u_2, u_3, ... u_n, ...$ називаються членами ряду.

Озн. Якщо члени ряду − додатні числа, то ряд називається знакопозитивним.

Озн. Якщо серед членів ряду зустрічаються додатні та від'ємні числа, то ряд називається знакозмінним.

Озн. Якщо у знакозмінному ряді спостерігається почергова зміна знаку, то він називається знакопочерговим.

Наприклад, ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} ...$ є знакопозитивним, ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + ...$ − знакозмінним, а ряд $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} ...$ − знакопочерговим.

Розглянемо основні поняття на прикладі знакопозитивного ряду. Частковою сумою членів ряду називається сума перших k членів, яка позначається S_k. Тоді: $S_1 = u_1$;

$$S_2 = u_1 + u_2;$$

$$S_3 = u_1 + u_2 + u_3;$$

$$S_k = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_k;$$

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_k + ... + u_n.$$

Озн. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ існує у вигляді скінченного числа, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то ряд (15.1) буде збіжним, а число S – сумою ряду.

Наприклад, відома зі школи спадна геометрична прогресія, знаменник якої дорівнює $\frac{1}{2}$, є числовим рядом:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots \qquad (13.2)$$

сума якого дорівнює $\frac{1}{1-0,5}=2$.

Дійсно, $S_2=1,5$; $S_4=1\frac{7}{8}=1,875$ ... $S_{10}=1\frac{127}{128}=1,9921875$.

Озн. Якщо границя $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ необмежена або не існує, то ряд (12.1) буде розбіжним і суми не матиме. Наприклад, ряд $2+2+\ \ldots\ +2+\ldots$ буде розбіжним, бо його часткова сума $S_n=\underbrace{2+2+2+\ldots+2}_{n}=2n$.

Основні теореми

Теорема 1. Якщо з ряду (12.1) вилучити декілька членів і при цьому отриманий ряд збіжний, то ряд (12.1) також буде збіжним, тобто якщо збігається ряд

$$u_4+u_5+u_6+u_7+\ldots+u_n+\ldots, \qquad (13.3)$$

то ряд

$$u_1+u_2+u_3+u_4+u_5+u_6+u_7+\ldots+u_n+\ldots$$

також збігається.

Теорема 2. Якщо ряд (15.1) збіжний, то ряд, отриманий з ряду (13.1) вилученням декількох членів, також збіжний, тобто із збіжності ряду

$$u_1+u_2+u_3+u_4+u_5\ldots+u_n+\ldots$$

випливає збіжність ряду

$$u_3+u_4+u_5+\ldots+u_n+\ldots.$$

Теорема 3. Множення членів ряду на сталу не впливає на його збіжність: якщо ряд (12.1) збіжний, то ряд

$$cu_1+cu_2+cu_3+\ldots+cu_n+\ldots$$

також збіжний.

Теорема 4. Якщо ряд (12.1) збіжний і має суму S_1 і ряд

$$v_1+v_2+v_3+\ldots+v_n+\ldots \qquad (13.4)$$

також збіжний і має суму S_2, то ряди, утворені додаванням та відніманням членів з однаковими номерами, будуть збіжними і мати відповідно суми $S_1 + S_2$ та $S_1 - S_2$, тобто:

$$(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + (u_3 + v_3) + ... = S_1 + S_2$$

і

$$(u_1 - v_1) + (u_2 - v_2) + (u_3 - v_3) + ... = S_1 - S_2.$$

Теорема 5. Якщо ряди (13.1) і (13.4) такі, що $u_1 \le v_1$;. $u_2 \le v_2$; ... $u_n \le v_n$, а ряд (13.1) розбіжний, то ряд (13.4) також буде розбіжним.

Теорема 6. Якщо ряди (13.1) і (13.4) такі, що $u_1 \ge v_1$; $u_2 \ge v_2$;...; $u_3 \ge v_3$, а ряд (13.1) збіжний, то ряд (13.4) також збіжний.

Останні дві теореми називаються порівняльними і мають широке практичне застосування за дослідження збіжності рядів.

Приклад: Обчислити суму заданого ряду:

а) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + ... + \frac{1}{n(n+1)} + ...$; б) $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + ... + \frac{1}{3 \cdot 2^{n-1}} + ...$.

Розв'язання:

а) Для знаходження суми ряду $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + ... + \frac{1}{n(n+1)} + ...$ скористаємося тотожністю: $\frac{1}{k \cdot (k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. Тоді сума може бути представлена у вигляді: $S = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + ... + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$.

Тоді $\lim\limits_{x \to \infty} S = \lim\limits_{x \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$.

Тобто ряд збігається і його сума дорівнює 1.

б) Для ряду $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+...+\frac{1}{3\cdot 2^{n-1}}+...$ винесемо спільний множник $\frac{1}{3}$ за дужки: $\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{2^{n-1}}+...\right)$. В дужках одержали ряд, що являє собою нескінченну прогресію, знаменник якої $q=\frac{1}{2}$.

Тоді $S=\frac{b_1}{1-q}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$. Отже, сума заданого ряду $S=\frac{1}{3}\cdot 2=\frac{2}{3}$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Записати можливий загальний член ряду:

12.1. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+...;$

12.2. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+...;$

12.3. $\frac{1}{10}+\frac{2}{100}+\frac{3}{1000}+\frac{4}{10000}+...;$

12.4. $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+...;$

12.5. $sin\alpha+\frac{sin2\alpha}{2}+\frac{sin3\alpha}{3}+...;$

12.6. $cos\alpha+\frac{cos2\alpha}{2}+\frac{cos3\alpha}{6}+...;$

12.7. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 9}+...;$

12.8. $\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{9\cdot 7}+\frac{1}{14\cdot 11}+...;$

12.9. $1{,}1-1{,}02+1{,}003-1{,}0004+...$

12.10. $1+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}+...;$

Обчислити суму заданого ряду:

12.11. $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+...;$

12.12. $3-\frac{3}{2}+\frac{3}{4}-\frac{3}{8}+\frac{3}{16}-...;$

12.13. $1{,}1-1{,}02+1{,}003-1{,}0004+...;$

12.14. $\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\frac{1}{10000}+...;$

12.15. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+...;$

12.16. $1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27}+\frac{16}{81}+...;$

12.17. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+...;$

12.18. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+...;$

12.19. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+...$

12.20. $3-\frac{1}{2\cdot 1}+\frac{1}{3\cdot 2}+\frac{1}{4\cdot 3}+...;$

Індивідуальне завдання

Обчислити суму заданого ряду:

$$\frac{1}{N\cdot(N+1)}+\frac{1}{(N+1)\cdot(N+2)}+\frac{1}{(N+2)\cdot(N+3)}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}+\ldots$$

§2. Необхідна ознака збіжності рядів

У теорії рядів з'ясування питання про збіжність ряду має більше значення, ніж питання про знаходження його суми.

Розглянемо ряд $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$.

Якщо ряд (13.1) такий, що $u_1\le u_2\le u_3\le\ldots\le u_n\le\ldots$,то ряд буде розбіжним. Наприклад, ряд з натуральних чисел $1+2+3+\ldots+n+\ldots$ є розбіжним. Частинна сума ряду за додавання наступного числа зростає на ціле число. Розбіжним буде також ряд, складений з однакових чисел. Так, ряд

$$2+2+2+2+\ldots$$

буде розбіжним (кожен наступний член збільшує суму на дві одиниці). Тому можемо говорити тільки про збіжність спадного ряду, у якого кожен наступний член менший попереднього (додавання наступних членів збільшує суму на все менше число).

Можемо стверджувати: у збіжному ряді (13.1) завжди

$$\lim_{n\to\infty}u_n=0 \tag{13.5}$$

Розглянемо ряд

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\ldots, \tag{13.6}$$

який називається гармонічним. В цьому ряді також $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=\frac{1}{\infty}=0.$ Щоб зрозуміти, збіжний ряд чи розбіжний, використаємо порівняльні теореми. Для цього запишемо більшу кількість членів: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}+\frac{1}{17}+\ldots$ і створимо з її членів групи, починаючи з третього члена: перша група вміщує два члени, друга − чотири, третя − вісім і т.д. Отримаємо:

$$1+\frac{1}{2}+\underbrace{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)}_{2}+\underbrace{\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)}_{4}+\underbrace{\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}\right)}_{8}+$$

$$+\underbrace{\left(\frac{1}{17}+\ldots+\frac{1}{32}\right)}_{16}+\underbrace{\left(\frac{1}{33}+\ldots+\frac{1}{64}\right)}_{32}+\ldots$$

Складемо допоміжний ряд таким чином: в першій групі число $\frac{1}{3}$ замінимо меншим числом $\frac{1}{4}$, у другій групі три перших числа − меншим числом $\frac{1}{8}$ (останнім у групі), у всіх інших групах аналогічно всі попередні члени групи замінимо останнім членом групи. Отримаємо:

$$1+\frac{1}{2}+\underbrace{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)}_{2}+\underbrace{\left(\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{8}\right)}_{4}+\underbrace{\left(\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{16}\right)}_{8}+\underbrace{\left(\frac{1}{32}+\ldots+\frac{1}{32}\right)}_{16}+\underbrace{\left(\frac{1}{64}+\ldots+\frac{1}{64}\right)}_{32}\ldots=$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots$$

Ряд розбіжний, тому що члени ряду не зменшуються. Але цей ряд складений з гармонічного ряду шляхом заміни більших членів меншими. Тому на підставі п'ятої теореми гармонічний ряд розбіжний.

На підставі цієї ж теореми ряд

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots \qquad (13.7)$$

буде розбіжним, тому що члени ряду більші відповідних членів розбіжного гармонічного ряду ($\sqrt{2}<2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}>\frac{1}{2}$ і т.д.).

Аналогічно ряд

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots \qquad (13.8)$$

збіжний, тому що члени цього ряду менші відповідних членів ряду (13.2), який як спадна геометрична прогресія (будь-яка спадна геометрична прогресія зі знаменником q має суму $S=\frac{1}{1-q}$) належить до збіжних рядів.

Приклад: Чи виконується необхідна ознака збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n^2+1}$.

Розв'язання:

Знайдемо границю загального члена $U_n=\frac{2n}{n^2+1}$ за необмеженого зростання його номера *n*: $\lim\limits_{x\to\infty}U_n=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2n}{n^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{2n}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}}=\frac{0}{1}=0$.

Отже, необхідна умова збіжності $\lim\limits_{x\to\infty} U_n = 0$ виконується.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Перевірити, чи виконується необхідна ознака збіжності рядів:

12.21. $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}+\frac{6}{7}+...+\frac{2n}{2n+1}$;

12.22. $1+\frac{3}{4}+\frac{5}{9}+...+\frac{2n-1}{n^2}$;

12.23. $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{10}+...+\frac{n}{1+n^2}$;

12.24. $\frac{1}{1001}+\frac{2}{2001}+...+\frac{n}{1000n+1}$;

12.25. $\sqrt{2}+\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{4}{3}}+...+\sqrt{\frac{n+1}{n}}$;

12.26. $\frac{1}{2}+\frac{1}{9}+\frac{1}{28}+...+\frac{1}{1+n^3}$;

12.27. $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+...+\frac{1}{2n+1}$;

12.28. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+...+\frac{1}{2n-1}$;

12.29. $\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...+\frac{1}{n!}$

12.30. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+...+\frac{1}{n+n!}$;

Індивідуальне завдання

Перевірити виконання необхідної ознаки збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{Nn}{n^N+1}$,

де N – номер студента за списком.

§3. Достатні умови збіжності

Ознака Даламбера

Якщо знакопозитивний ряд

$$u_1+u_2+u_3+u_4+...+u_n+...$$

такий, що

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l, \tag{13.9}$$

то ряд (13.1) буде збіжним при $l<1$ і розбіжним за умови $l>1$, а за $l=1$ ознака відповіді не дає (ряд може бути збіжним чи розбіжним).

Приклад: Дослідити на збіжність ряд: $1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+...+\frac{1}{n!}$

Розв'язання: Якщо $u_n=\frac{1}{n!}$ то $u_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}$.

Тоді $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}=\frac{n!}{(n+1)!}=\frac{n!}{n!\cdot(n+1)}=\frac{1}{n+1}$.

Обчислимо границю цього виразу: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=\frac{1}{\infty}=0<1$ – ряд збіжний.

Приклад: Дослідити на збіжність гармонічний ряд:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+... \ .$$

Розв'язання: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$.

Ознака відповіді не дає, але, як ми знаємо з попереднього параграфу, цей ряд розбіжний.

Приклад: Дослідити на збіжність ряд:

$$1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{13\cdot 4}+...+\frac{1}{n(n+1)}+...$$

Розв'язання: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)}=\lim\limits_{n\leftrightarrow\infty}\frac{n}{n+2}=1$, але ряд збіжний.

Ознака Коші

Якщо для знакопозитивного ряду $u_1+u_2+u_3+...+u_n+...$ існує

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l, \qquad (13.10)$$

то за $l<1$ ряд збіжний, за $l>1$ − розбіжний, а за $l=1$ ознака відповіді не дає.

Приклад: Дослідити на збіжність ряд: $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+...+\frac{1}{n^n}+...$

Розв'язання: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=\frac{1}{\infty}=0<1$ – ряд збіжний.

Інтегральна ознака

Якщо у знакопозитивному ряді $u_1+u_2+u_3+...+u_n+...$ виконується умова $u_1\ge u_2\ge u_3\ge...\ge u_n\ge...$ і існує така функція $f(x)$, для якої справедливо $f(1)=u_1$; $f(2)=u_2$, $f(3)=u_3$, ..., $f(n)=u_n$,..., то ряд (15.1) буде збіжним, якщо невласний інтеграл $\int_1^\infty f(x)dx$ збіжний, і розбіжним, якщо інтеграл розбіжний.

Приклад : Дослідити на збіжність гармонічний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

Розв'язання: Складемо функцію $f(x)=\frac{1}{x}$, яка задовольняє ознаку. Отримаємо:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x}=\lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{x}=\lim_{b\to\infty}\ln x\Big|_1^b=\lim_{b\to\infty}(\ln b-\ln 1)=\ln\infty=\infty.$$ Інтеграл розбіжний.

Отже, ряд також розбіжний (ознака Даламбера відповіді не давала).

Приклад: Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$.

Розв'язання: Складемо функцію:

$$f(x)=\frac{1}{x(x+1)}\Rightarrow\int_1^\infty\frac{dx}{x(x+1)}=\lim_{b\to\infty}\int_1^b\frac{dx}{x(x+1)}=\lim_{b\to\infty}\int_1^b\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx=$$

$$=\lim_{b\to\infty}(\ln x-\ln(x+1))\Big|_1^b=\lim_{b\to\infty}\ln\frac{x}{x+1}\Big|_1^b=\lim_{b\to\infty}\left(\ln\frac{b}{b+1}-\ln\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\ln\lim_{b\to\infty}\frac{b}{b+1}-\ln\frac{1}{2}=\ln 1+\ln 2=\ln 2-$$ інтеграл збіжний, тому ряд також збіжний.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Користуючись ознакою Даламбера, дослідити на збіжність ряди:

12.31. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$;

12.32. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2^n(2n+1)}$;

12.33. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n}$;

12.34. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$;

12.35. $\sum_{n=1}^{\infty}n\,tg\frac{\pi}{2^{n+1}}$;

12.36. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{2^n\cdot n!}$;

12.37. $\sum_{n=1}^{\infty}n^2 sin\frac{\pi}{2^n}$;

12.38. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(2n)!}$;

Користуючись радикальною ознакою Коші, дослідити на збіжність ряди:

12.39. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$;

12.40. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n}$;

12.41. $\sum_{n=1}^{\infty}sin^n\frac{\pi}{2^n}$;

12.42. $\sum_{n=1}^{\infty}arctg^n\frac{1}{n}$.

Користуючись інтегральною ознакою Коші, дослідити на збіжність ряди:

12.43. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3+n^2}$;

12.44. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n\ln^2 n}$;

12.45. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$; **12.46.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}$;

12.47. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3+n^2}$; **12.48.** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n\ln n}$.

Індивідуальне завдання

Дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Nn-N}{N^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{Nn+1}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(Nn+1)(Nn+3)}$;

де N – номер студента за списком.

§4. Знакозмінні ряди

Якщо члени знакопочергового ряду

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + ... \tag{13.11}$$

такі, що $u_1 > u_2 > u_3 > u_4 ...$ і

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0, \tag{13.12}$$

то ряд буде збіжним (ознака Лейбніца).

Наприклад, ряд $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...$ збіжний, тому що $1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\frac{1}{4}>...$ і $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=\frac{1}{\infty}=0.$

На відміну від знакопочергового у знакозмінного ряду знак ”–” може бути розташований довільним чином (не обов’язково за знаком ”+” буде знак ”–”), тому знакопочерговий ряд є частковим випадком знакозмінного ряду.

Озн. Якщо знакозмінний ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + ..., \tag{13.13}$$

члени якого можуть бути як додатними, так і від’ємними, є таким, що ряд

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + |u_4| ..., \tag{13.14}$$

складений з абсолютних величин його членів, буде збіжним, то цей знакозмінний ряд буде збіжним і називається абсолютно збіжним рядом.

Озн. Якщо знакозмінний ряд (13.13) збіжний, а ряд (13.14), складений з абсолютних величин його членів, буде розбіжним, то цей знакозмінний ряд називається умовно збіжним.

Наприклад, ряд $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...$ умовно збіжний, тому що гармонічний ряд (13.7) розбіжний, а ряд $1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+...$ абсолютно збіжний, бо ряд, складений з абсолютних величин його членів, як було показано, збіжний.

Зауваження 1: Якщо знакозмінний ряд збігається абсолютно, то будь-яка перестановка членів ряду місцями не впливає на його збіжність та суму;

Зауваження 2: Якщо знакозмінний ряд збігається умовно, то перестановка місцями членів ряду може змінити суму ряду і навіть зробити його розбіжним.

Розглянемо збіжний знакозмінний ряд $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...$. Суму вказаного ряду позначимо через S. Переставимо члени ряду (пам'ятаємо, що їх безліч) так, щоб за кожним додатним членом знаходилось два від'ємних. Отримаємо:

$$\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\right)+...=$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\right)+...=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...\right)=\frac{1}{2}S.$$

Застосування наведеної перестановки зменшило суму ряду у 2 рази.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

З'ясувати, які з поданих рядів абсолютно збіжні, які неабсолютно, які розбігаються:

12.49. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi n}{3}$;

12.50. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\ln(n+1)}$;

12.51. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$;

12.52. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n(n+1)}$;

12.53. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n)^3}$;

12.54. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$;

Індивідуальне завдання

Дослідити ряд на абсолютну збіжність $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(Nn)^N}$, де N – номер студента за списком.

§ 5.Функціональні ряди

Озн. Ряд $u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+u_4(x)+...+u_n(x)+...$ (13.15) називається функціональним, якщо всі $u_k(x)$ – певні функції. Якщо в цих функціях замість змінної x підставити сталу, то функціональний ряд перетвориться в числовий. З одного і того ж функціонального ряду можливо отримати будь-яку кількість числових рядів (достатньо тільки змінити значення сталої). Отримані числові ряди можуть бути збіжними чи розбіжними.

Озн. Сукупність всіх значень x, за яких функціональний ряд буде збіжним, називається областю збіжності ряду (рис.13.1).

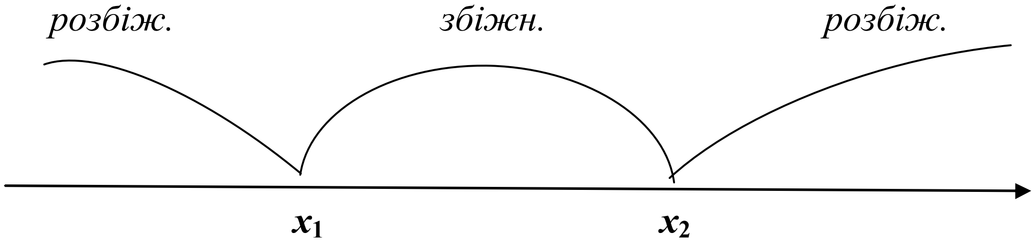


Рис. 13.1.

Наприклад, ряд $1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\ldots$ буде розбіжним на інтервалі $[-1;1]$ і збіжним на інтервалах $(-\infty;-1)$ та $(1;+\infty)$.

Озн. Функціональний ряд $u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+u_4(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots$ називається мажорантним для $x\in[a;b]$, якщо існує такий збіжний знакопозитивний числовий ряд $v_1+v_2+v_3+\ldots+v_n+\ldots$, для якого на інтервалі $[a;b]$ справедливо:

$$|u_1(x)|\le v_1;|u_2(x)|\le v_2;|u_3(x)|\le v_3;\ldots|u_n(x)|\le v_n;\ldots.$$

Наприклад, ряд

$$\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\ldots+\frac{\cos nx}{n^2}+\ldots$$

буде мажорантним на всій числовій осі, бо існує збіжний числовий ряд

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots,$$

для якого $|\cos x|\le 1,\ |\cos 2x|\le 1$ і т.д.

З теорії рядів відомі три важливих для подальшого вивчення висновки:

Висновок 1. В області мажорантності $[a;b]$ функціональний ряд має суму у вигляді деякої неперервної функції, тобто:

$$u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\ldots=S(x),$$

де $S(x)$ як сума ряду є неперервна функція на інтервалі $[a;b]$.

Висновок 2. Якщо мажорантний на $[a;b]$функціональний ряд має суму $S(x)$, то цей ряд в області мажорантності можна почленно інтегрувати (рис. 13.2), тобто:

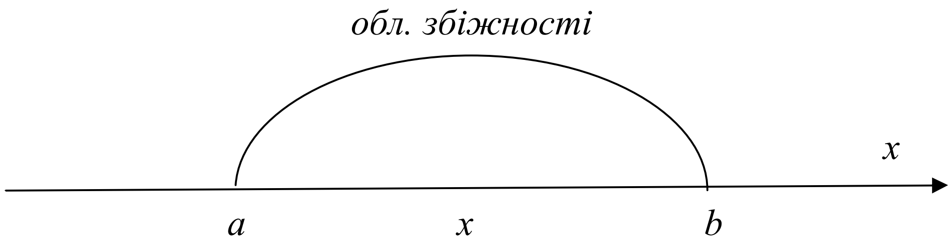


Рис. 13.2.

$$\int_a^x (u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x)\ldots)dx = \int_a^x S(x)dx. \tag{13.16}$$

Висновок 3. Якщо функціональний ряд на $[a;b]$ збіжний і має суму $S(x)$, а його члени мають на цьому інтервалі неперервні похідні $u_1'(x), u_2'(x), u_3'(x), \ldots$, які утворюють на інтервалі мажорантний ряд $u_1'(x) + u_2'(x) + u_3'(x) + \ldots$, то його сума є похідною від $S(x)$, тобто:

$$u_1'(x) + u_2'(x) + u_3'(x) + \ldots = S'(x). \tag{13.17}$$

§ 6. Степеневі ряди

Озн. Степеневим рядом називається функціональний ряд, члени якого − степеневі функції.

Ряд має вигляд:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots. \tag{13.18}$$

Теорема Абеля: Якщо степеневий ряд збігається за $x_0 \neq 0$, то він абсолютно збігається за $|x| < |x_0|$. Якщо степеневий ряд розбіжний за деякого x_1, то він буде розбіжним для будь-якого $|x| > |x_1|$.

Степеневий ряд має область збіжності з центром у точці $x = 0$ (рис.13.3).

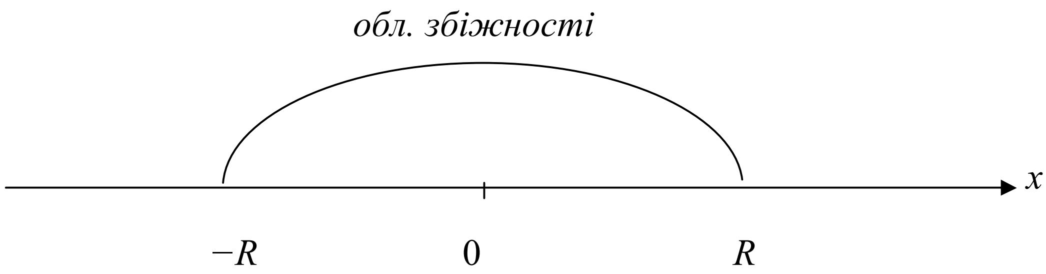


Рис. 13.3.

Область збіжності симетрична відносно $x = 0$, тому величину R називають радіусом збіжності. На кінцях інтервалу ($x = \pm R$) для встановлення збіжності ряду необхідні додаткові дослідження. Радіус збіжності степеневого ряду залежно від його вигляду може змінюватись у межах від 0 до ∞.

Для знаходження радіуса збіжності степеневого ряду розглядають ряд, складений з абсолютних величин його членів, тобто розглядають ряд

$$|a_0| + |a_1| \cdot |x_1| + |a_2| \cdot |x_2| + |a_3| \cdot |x_3| + \ldots + |a_n| \cdot |x_n| + \ldots,$$

для якого використовують ознаку Даламбера.

Якщо існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \left|\frac{x_{x+1}}{x_x}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \cdot |x| = |x| \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x| \cdot L,$

то до неї можемо застосувати ознаку Даламбера для числових рядів, враховуючи, що всі множники при невідомих − числа. Тоді можемо стверджувати, що ряд (13.18) буде збіжним, якщо вираз $|x| \cdot L < 1$ і розбіжним, якщо $|x| \cdot L > 1$. Отже, для всіх $|x| < \frac{1}{L}$ ряд (13.18) буде збіжним, а для $|x| > \frac{1}{L}$ − розбіжним. Інтервал $(-\frac{1}{L}; \frac{1}{L})$ є інтервалом збіжності степеневого ряду, тобто (див. рис.13.3) $R = \frac{1}{L}$. Таким чином, радіус збіжності:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}. \tag{13.19}$$

Якщо сталі величини у формулі (12.17) мають степеневу форму, то для знаходження радіуса збіжності зручно використовувати ознаку збіжності Коші, за якою: $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}$.

<u>Приклад:</u> Визначити область збіжності ряду

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots .$$

З умови маємо: $a_n = \frac{1}{n}$ і $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$. За ознакою Даламбера $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$. Отже, в інтервалі $(-1;1)$ ряд збіжний.

Для $x = -1$ отримаємо знакозмінний умовно збіжний ряд $-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \ldots$. Для $x = 1$ отримаємо розбіжний гармонічний ряд. Отже, наведений у прикладі ряд буде збіжним в інтервалі $[-1;1)$.

Якщо степеневий ряд (13.17) збігається на інтервалі $(-R;R)$, то на деякому інтервалі $[a;b]$, що знаходиться всередині $(-R;R)$, ряд (13.17) буде мажорантним, тобто його сума є неперервною функцією (рис. 13.4), а інтервал $[a;b]$ є інтервалом мажорантності.

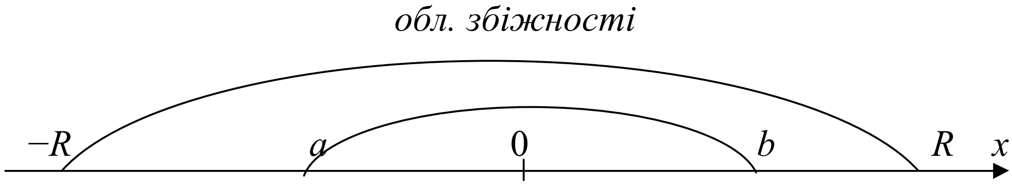


Рис. 13.4.

Для степеневого ряду (13.17) характерно, що:

а) в області збіжності ряд, складений з похідних степеневого ряду, також буде збіжним, і його сума дорівнює похідній від суми ряду (12.17), тобто якщо

$$u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots=S(x)\text{, то}$$

$$u_1'(x)+u_2'(x)+u_3'(x)+\ldots=S'(x). \qquad (13.20)$$

Це означає, що в області збіжності за диференціювання степеневого ряду отримаємо ряд, сума якого дорівнює похідній від суми цього ряду.

б) в області збіжності при інтегруванні степеневого ряду отримаємо ряд, сума якого дорівнює інтегралу від суми цього ряду, тобто якщо

$$u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\ldots=S(x)\text{, то}$$

$$\int_a^x (u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\ldots)dx=\int_a^x S(x)dx, \qquad (13.21)$$

де інтервал $[a;x]$ належить $(-R;R)$.

Висновки

На будь-якому відрізку, що знаходиться всередині області збіжності степеневого ряду:

1) сума степеневого ряду − неперервна функція;

2) степеневий ряд допускає почленне інтегрування і сума інтегралів дорівнює інтегралу від суми ряду;

3) степеневий ряд допускає почленне диференціювання, причому сума ряду, складеного з похідних степеневого ряду, дорівнює похідній від суми ряду.

Вказані властивості степеневого ряду мають найширше застосування за розкладання функцій в ряд.

Розкладання степеневого ряду по степенях $x-a$

Розглянемо степеневий ряд (13.18). У ньому змінні величини піднесені до степеня, тому маємо розкладання в ряд по степенях величини x, яке називають розкладанням по степенях x. Якщо ввести заміну $x=(x-a)+a$ і звести спільні члени, то отримаємо ряд

$$c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+c_3(x-a)^3+...+c_n(x-a)^n+..., \qquad (13.22)$$

який називається степеневим рядом, розкладеним по степенях $x-a$. Якщо ряд (12.17) має інтервал збіжності $-R\le x\le R$, то для ряду (12.18) запишемо: $-R\le x-a\le R\Rightarrow -R+a\le x\le R+a$ (рис. 13.5).

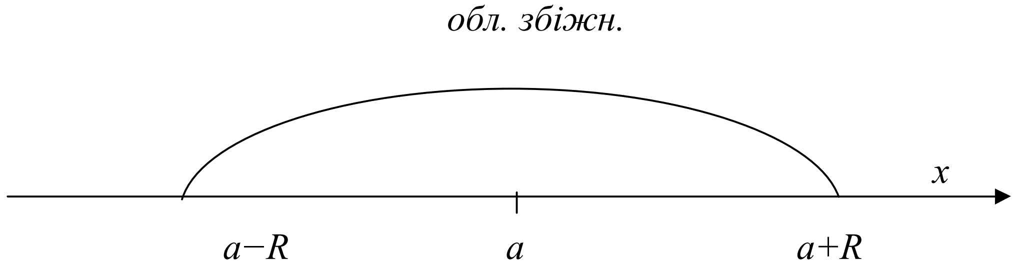


Рис. 13.5.

Ряд (13.22) збігається на інтервалі $(a-R;a+R)$ з центром у точці a. Якщо $a=0$, то отримаємо ряд (13.23).

$$c_0+c_1(x-0)+c_2(x-0)^2+c_3(x-0)^3+...+c_n(x-0)^n+..., \qquad (13.23)$$

До ряду (13.22) належать всі властивості, які розглянуті для ряду (13.18). Наприклад, для ряду

$$(x-3)+(x-3)^2+(x-3)^3+...$$

при заміні $t=x-3$ отримаємо ряд $t+t^2+t^3+...$, збіжний на інтервалі $(-1;1)$. Тоді $-1<t<1\Rightarrow -1<x-3<1\Rightarrow 2<x<4$ − область збіжності цього ряду.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Знайти інтервал збіжності степеневих рядів та з'ясувати питання про збіжність на кінцях інтервалу:

12.55. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{4^n\sqrt[4]{n}}$;

12.56. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{3^n\sqrt[5]{n}}$;

12.57. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{5^n\sqrt[6]{n}}$;

12.58. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n x^n}{7^n\sqrt[4]{n}}$.;

12.59. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{5^n\sqrt[3]{n}}$;

12.60. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{9^n\sqrt{n}}$;

12.61. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{7^n \sqrt[7]{n}}$; **12.62.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{2^n \sqrt[6]{n}}$;

Індивідуальне завдання

Знайти інтервал збіжності степеневих рядів та вияснити питання про збіжність на кінцях інтервалу $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{N^n x^n}{(N+1)^n \sqrt[N]{n}}$, де N – номер студента за списком.

§7. Ряд Тейлора. Використання бінома Ньютона

З §5, IX відомо, що многочлен $R_n(x)$ розкладається за формулою Тейлора. Якщо степінь многочлена − число від’ємне чи дробове, то формула Тейлора стає нескінченною, тобто перетворюється в степеневий ряд, який називається рядом Тейлора.

Будь-яка функція може бути представлена у вигляді многочлена і деякого остаточного члена $M_n(x)$. Якщо при зростанні числа членів остаточний член прямує до нуля, то ця функція може бути замінена многочленом у вигляді ряду Тейлора, тобто:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\ldots+$$

$$+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots. \qquad (13.24)$$

В області збіжності степеневий ряд Тейлора збіжний і має своєю сумою функцію $f(x)$. Справедливо стверджувати, що ця функція розкладається у ряд Тейлора в області збіжності ряду, коли $x\in(a-R;a+R)$. При цьому остаточний член прямує до нуля. Якщо остаточний член до нуля не прямує, то така функція не може бути представлена цим рядом Тейлора, або цей ряд представляє іншу функцію .

Якщо в ряді Тейлора взяти $a=0$, то отримаємо ряд

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x+\frac{f'''(0)}{3!}x+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x+\ldots, \qquad (13.25)$$

який називається рядом Маклорена і є частковим випадком ряду Тейлора.

Розкладання елементарних функцій в ряд Тейлора

1) $y=e^x$.

Всі похідні від e^x будуть e^x, а в точці $x=0$ завжди $e^0=1$. Тоді:

$$e^x=1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\ldots+\frac{1}{n!}x^n,\ (x\in R). \qquad (13.26)$$

Якщо $x=1$ то $e^x=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+...\approx 2{,}718281...$.

2) $y=\sin x.$

Похідні: $y'=\cos x$; $y''=-\sin x$; $y'''=-\cos x$; $y^{(4)}=\sin x$ і т.д. При $x=0 \Rightarrow \sin 0=0; \cos 0=1.$

Тоді:

$$\sin x = x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\frac{1}{7!}x^7+... \quad (x\in R) \tag{13.27}$$

3) $y=\cos x.$

Похідні: $y'=-\sin x$; $y''=-\cos x$; $y'''=\sin x$; $y^{(4)}=\cos x$ і т.д. При $x=0 \Rightarrow \sin 0=0;\ \cos 0=1.$

Тоді:

$$\cos x = 1-\frac{1}{2!}x+\frac{1}{4!}x^2-\frac{1}{6!}x^3+... \quad (x\in R) \tag{13.28}$$

Зауваження: в розкладанні обох тригонометричних функцій кут вимірюється в радіанах (за доведення похідних цих функцій використовується перша визначна границя, в якій застосовується радіанна міра кута).

г) $y=(1+x)^m.$ Це біном Ньютона.

Похідні: $y'=m(1+x)^{m-1}$;

$y''=m(m-1)(1+x)^{m-2}$;

$y'''=m(m-1)(m-2)(1+x)^{m-3}$;...

$y^{(n)}=m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)...(m-n+1)(1+x)^{m-n}$;... .

Якщо $x=0$ маємо:

$y(0)=1; y'(0)=m; y''(0)=m(m-1); y'''(0)=m(m-1)(m-2);...$

$y^{(n)}(0)=m(m-1)(m-2)(m-3)...(m-n+1)$. Тоді

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+...+$$

$$+\frac{1}{n!}m(m-1)(m-2)(m-3)...(m-n+1)x^n+...,\ (x\in(-1;1)). \tag{13.29}$$

Якщо $m\in N$, то число членів обмежене і дорівнює $m+1$. Якщо $m\notin N$, то число членів необмежене.

Використання бінома Ньютона

Розглянемо функцію $y = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$. Для цієї функції можемо використати формулу (13.29), в якій $m=-1$. Тоді:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots, \tag{13.30}$$

де права частина є геометричною прогресією. Інтегруємо ряд в інтервалі $[0;x]$, який знаходиться всередині інтервалу $(-1;1)$. Отримаємо:

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x} = \int_0^x (1 - x + x^2 - x^3 + \ldots)dx \Rightarrow \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots,$$

$$x \in (-1;1) \tag{13.31}$$

Заміна в (13.31) $+x$ на $-x$ дає:

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots. \tag{13.32}$$

Тоді:

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \ldots \Rightarrow \ln\frac{1+x}{1-x} = 2(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots).$$

Зробимо заміну: $\frac{1+x}{1-x} = 1 + \frac{1}{n} \Rightarrow x = \frac{1}{2n+1}$. Отримаємо:

$$\ln(1+\frac{1}{n}) = \ln\frac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln n = 2(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \ldots).$$

Якщо $n=1$, то $\ln 2 = 2(\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} + \ldots) = 0{,}6931$.

Якщо $n = 2 \Rightarrow \ln 3 - \ln 2 = 2(\frac{1}{1\cdot 7} + \frac{1}{3\cdot 7^3} + \frac{1}{5\cdot 7^5} + \ldots) - 0{,}6931 = 1{,}0986$.

Аналогічно знаходяться логарифми інших чисел.

В розкладанні формули (13.30) введемо заміну x на x^2.

Тоді: $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots \Rightarrow \int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^x (1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots)dx \Rightarrow$

$$\Rightarrow arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \qquad x \in [-1;1]. \tag{13.33}$$

Якщо $x=1$, то $arctg1 = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots \Rightarrow \pi = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \ldots$. Цей ряд збігається повільно, тому для обчислення π необхідно взяти досить велику кількість членів.

В розкладанні формули (13.29) підставимо $m=-\frac{1}{2}$. Тоді:

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1+\left(-\frac{1}{2}\right)x+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)x^2+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)x^3+...=$$

$$=1-\frac{x}{2}+\frac{1\cdot3}{2!\cdot2^2}x^2-\frac{1\cdot3\cdot5}{3!\cdot2^3}x^3+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{4!\cdot2^4}x^4-....$$

Проведемо заміну x на $-x^2$. Отримаємо:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{x^2}{2}+\frac{1\cdot3}{2!\cdot2^2}x^4+\frac{1\cdot3\cdot5}{3!\cdot2^3}x^6+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{4!\cdot2^4}x^8+...\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_0^x(1+\frac{x^2}{2}+\frac{1\cdot3}{2!\cdot2}x^4+\frac{1\cdot3\cdot5}{3!\cdot2}x^6+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{4!\cdot2}x^8+...)dx\Rightarrow$$

$$\arcsin x=x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot3}{2^2\cdot2!}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2^3\cdot3!}\cdot\frac{x^7}{7}+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2^4\cdot4!}\cdot\frac{x^9}{9}+... . \qquad (13.35)$$

Цей ряд збігається на інтервалі $(-1;1)$.

Якщо $x=\frac{1}{2}$, то $\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^4\cdot3}+\frac{3}{2^8\cdot5}+...\Rightarrow$

$\Rightarrow\pi=3+\frac{1}{8}+\frac{9}{640}+...\approx3{,}139$. Це число отримане за використання всього трьох членів. Таким чином, цей ряд збігається досить швидко.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Розкласти в ряд Маклорена функції:

12.63. $\frac{\ln(1+x^3)}{x^2}$;

12.64. $\frac{\arcsin x^3}{x\sqrt{x}}$;

12.65. $\frac{\sin5x}{x}$;

12.66. $\frac{arctgx\sqrt{x}}{x}$;

12.67. $x^2e^{-x\sqrt{x}}$;

12.68. $\sqrt{x}\cos x\sqrt{x}$;

12.69. $e^{-\frac{1}{2}x^2}$;

12.70. $x\sin\sqrt[3]{x}.$;

Індивідуальне завдання

Розкласти в ряд Маклорена функцію $\frac{\arccos\sqrt{x}}{Nx}$, де N – номер студента за списком.

§ 8. Використання рядів до наближених обчислень інтегралів

При розкладанні будь-якої функції в ряд Тейлора отримуємо степеневий ряд, який в області збіжності допускає інтегрування. При цьому інтеграл від функції дорівнює інтегралу від отриманого ряду за необмеженого зростання членів ряду. Досить часто інтеграл від функції, що розкладається в ряд, обчислюється з певними труднощами, або взагалі його первісна не виражається через елементарні функції. Разом з тим інтегрування членів ряду зводиться в основному до неодноразового використання формули:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

Розглянуті міркування спонукали до виникнення ідеї використати розкладання в ряд Тейлора до наближеного інтегрування. Степінь наближеності визначається необхідною точністю обчислень (як правило, точність обчислень відома заздалегідь) та вибраною для інтегрування кількістю членів ряду, яка визначається швидкістю збіжності ряду. За безумовної простоти використання такого методу наближеного інтегрування існує досить суттєве обмеження його використання: межі інтегрування мають знаходитись в межах збіжності ряду Тейлора. Підінтегральна функція може досить суттєво відрізнятись від наведених розкладань елементарних функцій, але для її розкладання необов'язково завжди знаходити похідні й використовувати безпосередньо ряд Тейлора. Якщо функція, що розкладається в ряд Тейлора, така, що допускає можливість використати розкладання елементарних функцій, то таку можливість необхідно завжди використовувати. Наприклад, потрібно розкласти в ряд Тейлора функцію $y = \frac{\sin x}{x}$. Звичайно, для розкладання в ряд можемо застосувати формулу (13.24), але такий спосіб неефективний. Набагато простіше використати відоме розкладання функції $y = \sin x$. Отже:

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \ldots .$$

Ділимо наведене розкладання почленно на x. Отримаємо:

$$\frac{\sin x}{x} = x - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \frac{1}{7!}x^6 + \ldots$$

Якщо розкладанню підлягає функція $y = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$, то використовують розкладання бінома Ньютона за $m = \frac{1}{2}$. Отримаємо:

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 + \ldots .$$

Проводимо заміну x на x^2 і отримаємо:

$$\sqrt{1+x^2}=1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2\cdot 4}x^4+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^6-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^8+\ldots.$$

Отримане розкладання ділимо на x:

$$\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\frac{1}{x}+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot 4}x^3+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^5-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^7+\ldots.$$

<u>Приклад:</u> Обчислити $\int\limits_0^1 e^{-0,5x^2}dx$ з точністю до $0,001$.

Використовуємо розкладання: $e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\ldots$.

Проводимо заміну x на $-\frac{1}{2}x^2$ і отримаємо:

$$e^{-0,5x^2}=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{8}\cdot x^6+\frac{1}{4!}\cdot\frac{1}{16}x^8-\ldots.$$

Підставимо отримане розкладання, яке збігається за всіх значеннь x, в інтеграл:

$$\int\limits_0^1 e^{-0,5x^2}dx=\int\limits_0^1(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{48}x^6+\frac{1}{384}x^8-\ldots)dx=$$

$$=\left(x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{40}x^5-\frac{1}{336}x^7+\frac{1}{3456}x^9-\ldots\right)\Bigg|_0^1=1-\frac{1}{6}+\frac{1}{40}-\frac{1}{336}+\frac{1}{3456}+\ldots\approx 0,856.$$

<u>Приклад:</u> Обчислити $\int\limits_0^{0,5}\frac{\sin x^2}{\sqrt{x}}dx$ з точністю до $0,001$.

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\ldots\Rightarrow \sin x^2=x^2-\frac{1}{3!}x^6+\frac{1}{5!}x^{10}-\frac{1}{7!}x^{14}+\ldots\Rightarrow$$

$$\frac{\sin x^2}{\sqrt{x}}=\frac{x^2}{\sqrt{x}}-\frac{x^6}{3!\sqrt{x}}+\frac{x^{10}}{5!\sqrt{x}}-\frac{x^{14}}{7!\sqrt{x}}+\ldots=$$

$$=x\sqrt{x}-\frac{1}{6}x^5\sqrt{x}+\frac{1}{120}x^9\sqrt{x}-\frac{1}{5040}x^{13}\sqrt{x}+\ldots.$$

Обчислюємо інтеграл:

$$\int\limits_0^{0,5}\frac{\sin x^2}{\sqrt{x}}dx=\int\limits_0^{0,5}(x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{6}x^{\frac{11}{12}}+\frac{1}{120}x^{\frac{19}{2}}-\frac{1}{5040}x^{\frac{27}{2}}+\ldots)\,dx=$$

$$=\left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}-\frac{x^{\frac{13}{2}}}{\frac{6\cdot 13}{2}}+\frac{x^{\frac{21}{2}}}{\frac{120\cdot 21}{2}}-\frac{x^{\frac{29}{2}}}{\frac{5040\cdot 29}{2}}+\ldots\right)\Bigg|_0^{0,5}=\left(\frac{1}{10\sqrt{2}}-\frac{1}{2496\sqrt{2}}+\ldots\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{20} - \frac{\sqrt{2}}{4992} + ... \approx 0,0498 \cdot \sqrt{2} \approx 0,0704 .$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Обчислити з точністю до 0,001 визначені інтеграли

12.71. $\int_0^{\frac{3}{4}} \frac{\sin 2x}{\sqrt[3]{x^2}} dx$;

12.72. $\int_0^{0,5} \frac{xdx}{\sqrt{1+x^4}}$;

12.73. $\int_0^{0,5} \frac{\ln(1-x^2)}{x^2} dx$;

12.74. $\int_0^1 xe^{-x} dx$;

12.75. $\int_0^1 x^3 \cos\sqrt{x} dx$;

12.76. $\int_0^1 x^{\frac{3}{2}} \sin x^{\frac{1}{2}} dx$;

12.77. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{arctgx^3}{x^2} dx$;

12.78. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{xdx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$.

Індивідуальне завдання

Обчислити з точністю до 0,001 визначені інтеграли $\int_0^1 (x+N)e^{-Nx} dx$, де N – номер студента за списком.

§ 9. Розв'язування диференціальних рівнянь за допомогою рядів

Наведеними в XIII розділі методами розв'язування диференціальних рівнянь розв'язується досить обмежена кількість рівнянь. До всіх інших рівнянь застосовують методи наближеного обчислення. Одним із них є метод представлення розв'язку у вигляді степеневого ряду Тейлора, за яким частинним розв'язком рівняння є сума ряду. Досить часто для диференціального рівняння відомі початкові умови. Нехай необхідно розв'язати диференціальне рівняння $y' = f(x, y)$, яке задовольняє початкову умову: $y(a) = y_0$. Його розв'язок шукаємо у вигляді ряду Тейлора:

$$y = y(a) + y'(a) \cdot (x-a) + \frac{y''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{y'''(a)}{3!}(x-a)^3 + ...$$

Для цього розв'язку з умови задачі відомий перший член ряду: $y(a) = y_0$. Щоб знайти другий член, вирахуємо $y'(a)$, для чого використаємо диференціальне рівняння: $y'(a) = f(x, a)$. Шляхом диференціювання заданого диференціального рівняння знаходимо наступні похідні, з яких після заміни x на a обчислюємо $y''(a), y'''(a)$ і т.д.

Приклад: розв'язати диференціальне рівняння $y' = x^2 + y^2 - e^x$, якщо $y(0) = 0$.

Знаходимо $y'(0) = 0^2 + 0^2 - e^0 = -1$.

Знайдемо послідовно декілька похідних:

$y'' = 2x + 2yy' - e^x \Rightarrow y''(0) = 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \cdot (-1) - e^0 = -1$.

$y''' = 2 + 2(y')^2 + 2y \cdot y'' - e^x \Rightarrow y'''(0) = 2 + 2 - 1 = 3$.

$y^{(4)} = 4y' \cdot y'' + \; + 2y' \cdot y'' + 2y \cdot y''' - e^x = 6y' \cdot y'' + 2y \cdot y''' - e^x \Rightarrow y^{(4)}(0) = 5$.

$y^{(5)} = 6(y'')^2 + 6y' \cdot y''' + 2y' \cdot y''' + 2y \cdot y^{(4)} - e^x \Rightarrow y^{(5)}(0) = -19$.

$y^{(6)} = 12y'' \cdot y''' + 6y'' \cdot y''' + 6y' \cdot y^{(4)} + 2y'' \cdot y''' + 2y' \cdot y^{(4)} + 2y' \cdot \; y^{(4)} + 2y \cdot y^{(5)} - e^x =$

$= 20y''y''' + 10y' \cdot y^{(4)} + 2y \cdot y^{(5)} - e^x \Rightarrow y^{(6)}(0) = -111$.

Тоді розв'язок буде:

$$y = 0 + (-1) \cdot x + \frac{-1}{2!} \cdot x^2 + \frac{3}{3!} \cdot x^3 + \frac{5}{4!} \cdot x^4 + \frac{-19}{5!} \cdot x^5 + \frac{-111}{6!} \cdot x^6 + \ldots =$$

$$= -x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{24}x^4 - \frac{19}{120}x^5 - \frac{111}{720}x^6 + \ldots.$$

Приклад: Розв'язати рівняння: $y'' - e^y \cdot y' = 0; y(0) = 0; y'(0) = 1$.

Знайдемо $y''(0) = e^0 \cdot 1 = 1$.

Знайдемо наступні похідні за $a = 0$:

$y''' = e^y (y')^2 + e^y y'' \Rightarrow y'''(0) = 2$.

$y^{(4)} = e^y (y')^3 + e^y 2y'y'' + e^y y'y'' + e^y y''' = e^y((y')^3 + 3y'y'' + y''') \Rightarrow y^{(4)}(0) = 6$.

$y^{(5)} = e^y y'((y')^3 + 3y'y'' + y''') + e^y(3(y')^2 y'' + 3(y'')^2 + 3y'y''' + y^{(4)}) =$

$= e^y((y')^4 + 6(y')^2 y'' + 3(y'')^2 + 4y'y''' + y^{(4)}) \Rightarrow y^{(5)}(0) = 24$.

Підставимо в ряд Тейлора і отримаємо:

$$y = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{6}x^3 + \frac{6}{24}x^4 + \frac{24}{120}x^5 + \ldots = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^5 + \ldots.$$

Отриманий розв'язок − розкладання в ряд функції $-\ln(1-x)$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Знайти перші чотири ненульових члени розв'язку рівнянь

12.79. $y' = y^2 + e^{-2x}; \quad y(0) = 0$.

12.80. $y' = \cos 2x - \sin x; \; y(0) = 0$.

12.81. $y'' = \dfrac{1 + \ln x}{x}; \; y(1) = y'(1) = 0$.

12.82. $y'' = 3\sqrt{1+y};\ y(2) = 0; y'(2) = 2$.

12.83. $y'' + 2y' + y = x - 2\sin x + 2;\ \ y(0) = 1; y'(0) = 2.$

Індивідуальне завдання

Знайти перші чотири ненульових члени розв'язку рівнянь $y' = \cos Nx - \left(N+1\right)\sin x;\ \ y(0) = 0$, де N – номер студента за списком.

Запитання до розділу XIII

1. Що таке числовий ряд?
2. Що таке функціональний ряд?
3. Що таке степеневий ряд?
4. Які ряди називаються знакопозитивними?
5. Яка різниця між знакозмінними та знакочерговими рядами?
6. Чи утворює ряд спадна геометрична прогресія?
7. Що таке сума ряду та частинна сума ряду?
8. Які теореми називаються порівняльними та в чому їх цінність?
9. Що таке збіжність та розбіжність ряду?
10. В чому полягає зміст необхідної умови збіжності ряду?
11. Ознака збіжності Даламбера.
12. Ознака збіжності Коші.
13. Інтегральна ознака збіжності.
14. Ознака збіжності Лейбніца для знакозмінних рядів.
15. Що таке область збіжності функціонального ряду?
16. Які ряди називаються мажорантними?
17. Які умови інтегрування та диференціювання степеневого ряду?
18. Який зміст в понятті: ”розкладання по степенях x”?
19. Як розуміти поняття: ”розкладання по степенях $x-a$”?
20. Який вигляд має ряд Тейлора?
21. Що таке ряд Маклорена і чим він відрізняється від ряду Тейлора?
22. За яких умов функція розкладається в ряд Тейлора?
23. Як провести розкладання в ряд Тейлора функцій e^x, $\sin x$, $\cos x$?
24. Як розкладається в ряд Тейлора біном Ньютона?
25. Як знаходять розкладання в ряд $\arcsin x$ та $\arccos x$?
26. Як обчислюються натуральні логарифми?
27. Як використовують ряд Тейлора до обчислення визначених інтегралів?
28. Як розв'язують диференціальні рівняння за допомогою рядів?
29. Чи існують функціональні ряди від неалгебраїчних функцій?

Абетковий покажчик

ДОДАТКИ

Таблиця 1

Основні правила диференціювання

функція	похідна
$y = c \cdot u$	$y' = c \cdot u'$
$y = u + v$	$y' = u' + v'$
$y = u \cdot v$	$y' = u' \cdot v + u \cdot v'$
$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$

Основні формули диференціювання

№	функція	похідна	№	функція	похідна
1	$y = C(const)$	$y' = 0$	2	$y = x$	$y' = 1$
3	$y = x^n$	$y' = n \cdot x^{n-1}$	4	$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
5	$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$	6	$y = e^x$	$y' = e^x$
7	$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \ln a}$	8	$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
9.	$y = \sin x$	$y' = \cos x$	10	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
11	$y = tgx$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$	12	$y = ctgx$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
13	$y = \arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	14	$y = arccosx$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
15	$y = arctgx$	$y' = \frac{1}{1 + x^2}$	16	$y = arcctgx$	$y' = -\frac{1}{1 + x^2}$

Таблиця 2

Таблиця невизначених інтегралів

1	$\int dx = x + C$	2	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C;\ (n \neq -1)$
3	$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$	4	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
5	$\int e^x dx = e^x + C$	6	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
7	$\int \cos x dx = \sin x + C$	8	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$
9	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$	10	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$
11	$\int \frac{dx}{\sqrt{a - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$	12	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right\| + C$
13	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\| \frac{x-a}{x+a} \right\| + C$	14	$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\| \frac{a+x}{a-x} \right\| + C$

Правила інтегрування

$\int (u + v + w) dx = \int u dx + \int v dx + \int w dx$
$\int u dv = uv + \int v du$
$\int C \cdot f(x) dx = C \cdot \int f(x) dx$
$\int f(kx + b) dx = \frac{1}{k} \cdot F(kx + b)$

ВІДПОВІДІ ДО ЗАВДАНЬ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

РОЗДІЛ 1:

1.1. а) $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 11 & \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} -4 & -8 \\ -16 & 4 \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, г) $\begin{pmatrix} 19 & -8 \\ 13 & -5 \end{pmatrix}$, д) $\begin{pmatrix} -3 & 12 \\ -5 & 17 \end{pmatrix}$, е) $\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$; **1.2.** $A \cdot B = \begin{pmatrix} -5 & -23 & -16 \\ 5 & 4 & -2 \\ -21 & -51 & -24 \end{pmatrix}$, $B \cdot A = \begin{pmatrix} -12 & 19 \\ 25 & -13 \end{pmatrix}$; **1.3.** а) $\begin{pmatrix} 6{,}5 & 23 \\ 10 & 13{,}5 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 185 & 24 \\ -66 & -3 \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} 34 & 214 \\ 34 & 134 \end{pmatrix}$; **1.4.** а) $\begin{pmatrix} 1 & 8 & 10 \\ 2 & -4 & 4 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 0 & 12 & -4 \\ -4 & 16 & -8 \\ -8 & 4 & 8 \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & -4 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, г) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 5 & 15 & 5 \\ -8 & 16 & 6 \end{pmatrix}$, д) $\begin{pmatrix} 29 & -56 & 5 \\ 4 & -5 & -3 \\ 13 & -29 & 0 \end{pmatrix}$, е) $\begin{pmatrix} -1 & -11 & -12 \\ 0 & 11 & -11 \\ -5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; **1.5.** а) $\begin{pmatrix} -2{,}5 & 5 & -4 \\ 8{,}5 & 12{,}5 & -9 \\ 4 & 3{,}5 & 3{,}5 \end{pmatrix}$**,** б) $\begin{pmatrix} 31 & 8 & -22 \\ -7 & 53 & 26 \\ -22 & -7 & 19 \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} 38 & 8 & -14 \\ 66 & 66 & -37 \\ 46 & -26 & 26 \end{pmatrix}$; **1.6.** *формули скороченого множення не справджуються.*

1.7. $\begin{pmatrix} 20 & -36 \\ -9 & 29 \end{pmatrix}$; **1.8.** $\begin{pmatrix} -4894 & -3589 \\ 2035 & 5079 \end{pmatrix}$; **1.9.** $\begin{pmatrix} 14 & -32 & -11 \\ -16 & 36 & -7 \\ -2 & 16 & -10 \end{pmatrix}$; **1.10.** $\begin{pmatrix} 21 & -3 & 28 \\ -13 & 1 & -3 \\ 7 & -13 & 4 \end{pmatrix}$; **1.11.** $\begin{pmatrix} -5 & -9 \\ 3 & -16 \end{pmatrix}$; **1.12.** $\begin{pmatrix} -22 & 19 \\ -9 & -8 \end{pmatrix}$; **1.13.** $\begin{pmatrix} -45 & 14 \\ 20 & 9 \end{pmatrix}$;

1.14. $\begin{pmatrix} -93 & 35 \\ 36 & -20 \end{pmatrix}$; **1.15.** $\begin{pmatrix} -9 & -55 \\ 34 & -70 \end{pmatrix}$; **1.16.** $\begin{pmatrix} 4 & -26 & -58 \\ 25 & 34 & 44 \\ 16 & 42 & 26 \end{pmatrix}$; **1.17.**

$\begin{pmatrix} 21 & 10 \\ 5 & 78 \end{pmatrix}$; **1.18.** $\begin{pmatrix} -6 & 7 & 23 \\ -14 & 56 & 79 \\ 34 & -1 & -83 \end{pmatrix}$; **1.19.** –64; **1.20.** 9; **1.21.** 58; **1.22.** –22; **1.23.** 29; **1.24.** 26; **1.25.** 19; **1.26.** 120; **1.27.** 133; **1.28.** 0; **1.29.** 256; **1.30.** 149; **1.31.** –86; **1.32.** –9; **1.33.** 27; **1.34.** 245; **1.35.** 174; **1.36.** –809; **1.37.** –18; **1.38.** 32; **1.43.** –129; **1.44.** 232; **1.45.** 15; **1.46.** –212; **1.47.** –39; **1.48.** 112; **1.49.** 2; **1.50.** 2; **1.51.** 2; **1.52.** 3; **1.53.** 2; **1.54.** 2; **1.55.** 3; **1.56.** 3; **1.57.** 3; **1.58.** 2; **1.59.** $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1{,}5 & -0{,}5 \end{pmatrix}$;

1.60. $\begin{pmatrix} -0{,}5 & 0{,}4 \\ 0 & 0{,}2 \end{pmatrix}$; **1.61.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 5 & 4 & -7 \\ -3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$; **1.62.** $\begin{pmatrix} -1{,}25 & -0{,}25 & 0{,}5 \\ -2{,}25 & -0{,}25 & 0{,}5 \\ 1{,}75 & 0{,}75 & -0{,}5 \end{pmatrix}$; **1.63.** $\begin{pmatrix} 0{,}6 & -0{,}1 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & -0{,}1 \\ -0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 \end{pmatrix}$; **1.56.** $\begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}25 & -0{,}125 \\ -2{,}25 & 4{,}25 & 3{,}625 \\ 0{,}75 & 1{,}75 & -1{,}375 \end{pmatrix}$; **1.65.** $\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}25 & -0{,}2 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}2 \\ -0{,}3 & 0{,}25 & 0{,}2 \end{pmatrix}$; **1.66.** $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; **1.67.** $\begin{pmatrix} 0{,}6 & -0{,}4 & 0{,}2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -0{,}8 & 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}$; **1.68.** $\begin{pmatrix} 0{,}85 & -0{,}2 & 0{,}25 \\ 0{,}7 & -0{,}4 & 0{,}5 \\ -0{,}45 & 0{,}4 & 0{,}25 \end{pmatrix}$; **1.69.** $\begin{pmatrix} 9{,}8 & 0{,}2 \\ -0{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix}$; **1.70.** $\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}2 \\ 9{,}2 & 3{,}4 \end{pmatrix}$; **1.71.** $\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1{,}6 & -1{,}8 \end{pmatrix}$; **1.72.** $\begin{pmatrix} 1{,}5 & 5 \\ -0{,}25 & 6 \end{pmatrix}$; **1.73.** $\begin{pmatrix} 1{,}6 & -0{,}8 \\ 1{,}6 & 0{,}2 \end{pmatrix}$; **1.74.** $\begin{pmatrix} 1{,}3 & -3 \\ -0{,}8 & 5 \end{pmatrix}$; **1.75.** $\begin{pmatrix} 0{,}4 & -0{,}2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$; **1.76.** $\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & -0{,}8 \end{pmatrix}$; **1.77.** $\begin{pmatrix} -1 & -5 & 7 \\ -0{,}5 & -4 & 4{,}5 \\ -1 & -4 & 6 \end{pmatrix}$; **1.78.** $\begin{pmatrix} -0{,}5 & 1 & 3 \\ 0{,}25 & 0 & 4{,}5 \\ 0{,}75 & 1{,}5 & 2 \end{pmatrix}$; **1.79.** $\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \\ -0{,}5 & -0{,}5 & 1 \\ 0 & -0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$; **1.80.** не існує; **1.81.**

$\left\{\frac{41}{46};\frac{58}{46};\frac{38}{46}\right\}$; **1.82.** $\left\{\frac{77}{63};-\frac{28}{63};-\frac{140}{63}\right\}$; **1.83.** {–1; –2; –4}; **1.84.** {2; 0; –1}; **1.85.** {3; 1; –1}; **1.86.** {4; 2; 1}; **1.87.** $\left\{-\frac{13}{8};-\frac{2}{8};-\frac{5}{8}\right\}$; **1.88.** $\left\{\frac{20}{17};\frac{16}{17};-\frac{55}{17}\right\}$; **1.89.** {4; 0,9; 1,4}; **1.90.** $\left\{\frac{18}{19};\frac{4}{19};\frac{78}{19}\right\}$; **1.91.** {1; 1; 1}; **1.92.** {–3; –5; –4}; **1.95.** $\left(0;x_2;\frac{9}{7}+x_2;\frac{1}{7}\right)$; **1.96.** $\left(-\frac{5}{17};\frac{23}{17}\right)$; **1.97.** система несумісна; **1.98.** система несумісна; **1.99.** $\left(\frac{5}{4}+\frac{1}{4}x_3-\frac{3}{4}x_4-x_5;-\frac{1}{4}+\frac{7}{4}x_3+\frac{7}{4}x_4;0;0;0\right)$; **1.100.** $(1;-1)$; **1.102.** $\left(\frac{30}{41};-\frac{53}{41};-\frac{5}{41}\right)$.

РОЗДІЛ 2:

2.1. $\{-3;\ -11;\ 6\}$; **2.2.** $\{10;\ -13;\ 21\}$, $\sqrt{734}$; **2.3.** можуть; **2.4.** $(4;\ 1;\ 1)$; **2.5.** $\{-5;\ 0\}$; **2.6.** $\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $\sqrt{2-\sqrt{2}}$; **2.7.** $\sqrt{13+\sqrt{3}}$, $\sqrt{13-\sqrt{3}}$; **2.8.** 7, $\sqrt{51}$; **2.9.** 20; **2.10.** 13; **2.11.** $\overrightarrow{AB}=\frac{\vec{a}}{2}-\frac{\vec{b}}{2}$, $\overrightarrow{BC}=\frac{\vec{a}}{2}+\frac{\vec{b}}{2}$, $\overrightarrow{CD}=\frac{\vec{a}}{2}+\frac{\vec{b}}{2}$, $\overrightarrow{DA}=\frac{\vec{a}}{2}-\frac{\vec{b}}{2}$; **2.14.** $np_{\vec{a}}\vec{b}=\frac{20}{3}$, $np_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{20}{7}$; 2.16. –4; **2.18.** $|\vec{a}|=70$; **2.21.** {–1; –2; –4}; **2.22.** {2; 0; –1}; **2.23.** {3; 1; –1}; **2.24.** {4; 2; 1}; **2.25.** {1; 1; 1}; **2.26.** –4; –2; 6; 10; **2.27.** $2\sqrt{2}$; **2.28.** –4; **2.29.** 9; **2.30.** 60°; **2.31.** $arcos\frac{17}{50}$; **2.32.** $arcos-\frac{7\sqrt{3}}{27}$; **2.33.** 9; **2.34.** 6; **2.35.** –2; **2.36.** $\frac{13}{3}$; **2.38.** $(-2\quad -6\quad -8)$; **2.39.** $\frac{26}{6}$; **2.41.** не компланарні; **2.42.** компланарні.

РОЗДІЛ 3:

3.1. $M\in y$, $P\in y$; **3.2.** а) $y=\frac{3}{4}x+3$, б) $\frac{x}{-4}+\frac{y}{3}=1$; **3.3.** $3x-y-4=0$, $3x+2y-1=0$, $3x+5y-34=0$; **3.4.** $arctg\frac{8}{9}$, $arctg\frac{4}{3}$, $arctg12$; **3.5.** *12 кв. од.*

3.6. $3x-4y+14=0$; **3.7.** $7x+3y-32=0$; **3.8.** 1) $2x+3y-7=0$, 2) $3x-2y-4=0$; **3.9.** *5 од.* **3.10.** *(11; –11)*; **3.11.** (10; –5); **3.12.** *(–2;–3)*; **3.13.** а) 15; 20; 25; б) $3x+4y-20=0$; $4x-3y+15=0$; $7x-24y-180=0$; в) $24x+7y-35=0$; г) *12од.* д) $x+18y+60=0$; е) *(2,47;–3,47)*; ж) $arctg\dfrac{3}{4}$; з) *150кв.од.* **3.14.** $(x-2)^2+(y+3)^2=36$; **3.15.** $(x+1)^2+(y-2)^2=25$; **3.16.** $\left(x+\dfrac{4}{3}\right)^2+\left(y+\dfrac{5}{3}\right)^2=\dfrac{65}{9}$; **3.17.** $(x-2)^2+(y-1)^2=25$; **3.18.** $(x-1)^2+(y-4)^2=8$; **3.19.** 1) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$, 2) $\dfrac{x^2}{169}+\dfrac{y^2}{144}=1$, 3) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$, 4) $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{64}=1$, 5) $\dfrac{x^2}{169}+\dfrac{y^2}{25}=1$; **3.20.** 1) $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$, 2) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$, 3) $\dfrac{x^2}{64}-\dfrac{y^2}{36}=1$, 4) $\dfrac{x^2}{36}-\dfrac{y^2}{64}=1$, 5) $\dfrac{x^2}{32}-\dfrac{y^2}{8}=1$; **3.21.** 1) $y^2=4x$, 2) $y^2=-9x$, 3) $x^2=y$, 4) $x^2=-2y$; **3.22.** $(x+1)^2+(y-2)^2=25$, *коло,* $r=4$, *центр (–2; 3);* **3.23.** $(x+2)^2+4(y-3)^2=1$, *еліпс, центр (–5; –1),* $a=1$, $в=\dfrac{1}{2}$.

РОЗДІЛ 4:

4.1. 5; 10; $3\sqrt{2}$; **4.2.** *С (6; 1; 19)*, *Д (9; –5; 12)*; **4.3.** $\sqrt{30}$; **4.4.** 4од. **4.5.** $x+y-4z=0$; **4.6.** *(1; –1; 2)*; **4.7.** $\sqrt{22}$; **4.8.** $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z-1}{-3}$, $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-1}{-4}=\dfrac{z-1}{2}$; **4.9.** $arccos\dfrac{8}{\sqrt{2122}}\approx 68^\circ$; **4.10.** *≈9,5кв.од.*; **4.11.** $18x-11y-29=0$; **4.12.** *3куб.од.*.

РОЗДІЛ 5:

5.1. 0,5;–4; 0,5; **5.2.** $\sqrt{5}$; $\sqrt{3}$; 0; **5.3.** $\dfrac{\pi}{6}$; $\dfrac{\pi}{2}$; $-\dfrac{\pi}{6}$; **5.4.** $\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;1; **5.5.** 9; 1; 1,1; **5.6.** $(-\infty;0)\cup(0;1)\cup(1;\infty)$; **5.7.** $\left(-\infty;\dfrac{5}{2}\right]$; **5.8.** $(-\infty;1)\cup(1;2)\cup(2;\infty)$; **5.9.** $(-\infty;0)\cup\ \cup(4;\infty)$; **5.10.** $(-\infty;1)\cup(3;\infty)$; **5.11.** $(-\infty;1)\cup(2;\infty)$; **5.12.** $[-4;4]$; **5.13.**

$(0;1)\cup \quad \cup(1;\infty)$; **5.14.** $[-1;3)$; **5.15.** $[4]$; **5.16.** $(-1;0)\cup(1;2)\cup(2;\infty)$; **5.17.** $[-4;-\pi]\cup[0;\pi]$; **5.33.** 0,5; **5.34.** ∞; **5.35.** 0; **5.36.** 1; **5.37.** 0; **5.38.** 0; **5.39.** 1; **5.40.** $-0,5$; **5.46.** 0; **5.47.** 1; **5.48.** 1; **5.49.** ∞; **5.50.** ∞; **5.51.** 0; **5.52.** ∞; **5.53.** ∞; **5.54.** $\frac{1}{3}$; **5.55.** 2; **5.56.** $\frac{1}{2}$; **5.57.** 0; **5.58.** ∞; **5.59.** $\frac{1}{2}$; **5.60.** 0; **5.61.** 3; **5.62.** ∞; **5.63.** ∞; **5.64.** ∞; **5.65.** 3; **5.66.** 0; **5.67.** 4; **5.68.** $\frac{5}{4}$; **5.69.** $-\frac{2}{3}$; **5.70.** $\frac{3}{4}$; **5.71.** 32; **5.72.** 6; **5.73.** –2; **5.74.** $\frac{2}{9}$; **5.75.** 2; **5.76.** $\frac{12}{5}$; **5.77.** –4; **5.78.** $-\infty$; **5.79.** 4; **5.80.** $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; **5.81.** $-\frac{1}{6}$; **5.81.** –1; **5.82.** $\frac{1}{8}$; **5.83.** $-\infty$; **5.84.** $-\infty$; **5.85.** 1; **5.86.** ∞; **5.87.** ∞; **5.88.** –2; **5.89.** 2; **5.90.** 9; **5.91.** $\frac{5}{4}$; **5.92.** 1; **5.93.** –6; **5.94.** $\frac{8}{5}$; **5.95.** $e^{\frac{1}{5}}$; **5.96.** e^{-10}; **5.97.** e^{-3}; **5.98.** e^{2}; **5.99.** e^{5}; **5.100.** $2\sqrt{e}$; **5.101.** $\frac{1}{3}$; **5.102.** e^{-6}; **5.103.** $\frac{1}{2}$; **5.104.** $\frac{1}{2}$; **5.105.** 1; **5.106.** e^{12}; **5.107.** $\frac{9}{5}$; **5.108.** $\ln\frac{3}{2}$; **5.109.** $\ln\frac{4}{7}$; **5.110.** ∞; **5.111.** $\ln 4$; **5.112.** $\frac{3}{2}$; **5.113.** 4; **5.114.** ∞; **5.115.** $\frac{7}{3}$; **5.117.** неперервна; **5.118.** розрив I роду в т. $x=1$; **5.119.** неперервна; **5.119.** розрив I роду в т. $x=\frac{1}{2}$ і $x=1$; **5.120.** неперервна; **5.121.** розрив I роду в т. $x=2$; **5.122.** неперервна; **5.123.** розрив I роду в т. $x=1$; **5.124.** розрив II роду в т. $x=1$; **5.125.** розрив II роду в т. $x=0$; **5.126.** розрив II роду в т. $x=-2$ і $x=2$; **5.127.** розрив II роду в т. $x=-1$; **5.128.** розрив II роду в т. $x=1$; **5.129.** розрив II роду в т. $x=-2$; **5.130.** розрив II роду в т. $x=-4$; **5.131.** розрив II роду в т. $x=3$; **5.132.** розрив II роду в т. $x=1$; **5.133.** розрив II роду в т. $x=-1$; **5.134.** розрив II роду в т. $x=-4$, $x=0$, $x=1$; **5.135.** розрив II роду в т. $x=1$.

РОЗДІЛ 6:

6.1. $y' = 20x^4 - x$; **6.2.** $y' = 2x^7 - 2x + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; **6.3.** $y' = 12x^2 - x + 1$; **6.4.** $y' = 24x^5 - 7x^6 + 3$; **6.5.** $y' = 2x - x^4$; **6.6.** $y' = 6x^2 - 0{,}5x$; **6.7.** $y' = 8x - 7$; **6.8.** $y' = 6x^2 - 2x - \dfrac{1}{x^2}$; **6.9.** $y' = 14x^6 - x^5$; **6.10.** $y' = 3x^2 - x^6$; **6.11.** $y' = \dfrac{3}{4\sqrt[4]{x}} - \dfrac{6}{x^4}$;

6.12. $y' = \dfrac{5}{3}\sqrt[3]{x^2} - \dfrac{18}{x^4}$; **6.13.** $y' = \dfrac{5}{6\sqrt[6]{x}} - \dfrac{18}{x^7}$; **6.14.** $y' = \dfrac{6}{7\sqrt[7]{x}} - \dfrac{28}{x^8}$; **6.15.** $y' = \dfrac{7}{6}\sqrt[6]{x} - \dfrac{12}{x^7}$; **6.16.** $y' = \dfrac{8}{7}\sqrt[7]{x} - \dfrac{1}{3x^4}$; **6.17.** $y' = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}} - \dfrac{8}{x^5}$; **6.18.** $y' = \dfrac{3}{5\sqrt[5]{x^2}} - \dfrac{42}{x^8}$; **6.19.** $y' = \dfrac{7}{8\sqrt[8]{x}} - \dfrac{72}{x^9}$; **6.20.** $y' = \dfrac{3}{4\sqrt[4]{x}} - \dfrac{6}{x^4}$; **6.21.** $y' = e^x \cdot sinx + e^x \cdot cosx$; **4.22.** $y' = e^x \cdot \sqrt[3]{x} + e^x \cdot \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$; **4.23.** $y' = cosx \cdot \dfrac{1}{x} - sinx \cdot \ln x$; **6.24.** $y' = cosx \cdot \dfrac{1}{x\ln 2} - siin \cdot \log_2 x$; **6.25.** $y' = \log_7 x + \dfrac{1}{\ln 7}$; **6.26.** $y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\log_5 x + arccosx \cdot \dfrac{1}{x\ln 5}$; **6.27.** $y' = cosx \cdot 3^x + sinx \cdot 3^x \ln 3$; **6.28.** $y' = ctgx \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{sin^2 x} \cdot \sqrt{x}$; **6.29.** $y' = \dfrac{1}{cos^2 x} \cdot \sqrt[3]{x} + tgx \cdot \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$; **6.30.** $y' = e^x \cdot \ln x + e^x \cdot \dfrac{1}{x}$; **6.31.**

$$y' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot tgx - \sqrt{x} \cdot \frac{1}{cos^2 x}}{tg^2 x};$$ **6.32.** $$y' = \frac{6x^5 \cdot \sqrt{x} - \left(x^6 - 25\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x};$$ **6.33.**

$$y' = \frac{\frac{1}{1+x^2} \cdot x - \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot arctgx}{\sqrt{x}};$$ **6.34.** $$y' = \frac{\frac{1}{cos^2 x} \cdot \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot tgx}{\sqrt{x}};$$ **6.35.** $y' = \dfrac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$;

6.36. $y' = \dfrac{2x \cdot sinx - cosx \cdot x^2}{\sin^2 x}$; **6.37.** $y' = \dfrac{e^x \cdot cosx - e^x \cdot sinx}{\cos^2 x}$; **6.38.**

$$y' = \frac{e^x \cdot \arccos x + e^x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\arccos^2 x};$$ **6.39.** $y' = \dfrac{5cosx - 5x \cdot sinx}{\cos^2 x}$; **6.40.**

$$y'=\frac{\frac{16x^3-18x}{2\sqrt{x+4}}-\left(4x^4-9x^2\right)\cdot\sqrt{x+4}}{\sqrt{x+4}};$$ **6.41.** $y'=5^{\arcsin 4x}\ln 5\cdot\frac{4}{\sqrt{1-16x^2}}$; **6.42.**

$y'=\frac{\ln 2}{2\sqrt{\ln 2^x}}$; **6.43.** $y'=\frac{-sinx}{2\sqrt{cosx}}$; **6.44.** $y'=\frac{cosx}{2\sqrt{sinx}}$; **6.45.** $y'=\frac{3}{2}\cdot\sqrt{e^{3x}}$; **6.46.**

$y'=\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}$; **6.47.** $y'=\frac{8x}{2\sqrt{4x^2-3}}$; **6.48.** $y'=\frac{1}{2x}$; **6.49.** $y'=\frac{1}{2\sqrt{e^x}}$; **6.50.**

$y'=2^{\sin 4x}\ln 2\cdot cos4x\cdot 4$; **6.51.** $y'=2arctgx\cdot\frac{1}{1+x^2}$; **6.52.** $y'=3\ln^2 x\cdot\frac{1}{x}$; **6.53.**

$y'=-8\cos^3(2x+5)\cdot sinx$; **6.54.** $y'=\frac{5x}{1+x^{10}}$; **6.55.**

$y'=-2\sin\cos x\cdot cosxcosx\cdot sinx$; **6.56.** $y'=\frac{cos\sqrt{x}}{2\sqrt{sin\sqrt{x}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$; **6.57.** $y'=\frac{-18}{x\ln^7 2x}$;

6.58. $y'=\frac{1}{arctg\sqrt{x^2+4}}\cdot\frac{2x}{5+x^2}\cdot$ $\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+4}}$; **6.59.**

$y'=-\frac{1}{2\sqrt{\ln\arccos 2^x}}\cdot\frac{1}{\arccos 2^x}\cdot$ $\frac{2^x\ln 2}{\sqrt{1-2^{2x}}}$; **6.60.** $y'=cos\sqrt{\ln 8^x}\cdot$ $\cdot\frac{\ln 8}{2\sqrt{\ln 8^x}}$; **6.61.**

$y'=\frac{6}{5\sqrt[5]{\log_{12}(6x+5)}\cdot(6x+5)\ln 12}$; **6.62.** $y'=7^{arctg(\arcsin x-3)}\ln 7\cdot$

$\cdot\frac{1}{1+(\arcsin x-3)^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; **6.71.** $y'=\frac{1+2xy^2}{3-2x^2y}$; **6.72.** $y'=\frac{2x+y^3+1}{3-3xy^2}$; **6.73.**

$y'=\frac{y}{e^y-x-20y^4}$; **6.74.** $y'=\frac{cos(x-y)\cdot sin(x+y)-1}{cos(x-y)\cdot sin(x+y)+1}$; **6.75.**

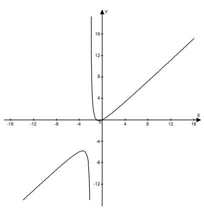
$y'=\frac{x^2+xy-2x+y}{x-x^2+xy}$; **6.76.** $y'=\frac{y\left(e^{xy}-1\right)}{x\left(e^{xy}-1\right)-\frac{4}{cos^2 4y}}$; **6.77.**

$$y'=\frac{\frac{1}{\sqrt{1-(x-y)^2}}+\frac{1}{1+(x+y)^2}}{\frac{1}{\sqrt{1-(x-y)^2}}-\frac{1}{1-(x+y)^2}};$$ **6.78.** $y'=-\frac{y+cos\left(\ln\left(x^2+x\right)\right)\cdot\frac{2x+1}{x^2+x}}{x}$; **6.81.**

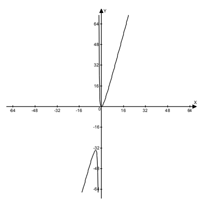
$y'_x = -\dfrac{3t^2}{2t+1}$; **6.82.** $y'_x = -\dfrac{3t^2-6}{6t+1}$; **6.83.** $y'_x = -\dfrac{2t-9}{t^3+1{,}5t}$; **6.84.** $y'_x = -\dfrac{1}{\ln 2}$; **6.85.** $y'_x = \dfrac{cos(t+1)-4sin4t}{cost+(2t+1)sin(x+y)+1}$; **6.85.** $y'_x = \dfrac{sin4t-e^{-t}}{e^t-7cost}$; **6.87.** $y' = \dfrac{2x\cdot(1+cosx)+sinx\cdot(x^2-4)}{(1+cosx)^2}$; **6.88.** $y' = \dfrac{2x\cdot(x^2+3x)+(2x+3)\cdot(x^2-4)}{(x^2+3x)^2}$; **6.90.** $y' = \dfrac{(e^{-x}+cos7x)-(-e^{-x}-7sin7x)}{(e^{-x}+cos7x)^2}$; **6.94.** $y' = -\dfrac{8}{(x-4)^2}$; **6.95.** $y' = \dfrac{\dfrac{3x^2+2x}{x^3+x^2}\cdot\ln x - \dfrac{\ln(x^3+x^2)}{x}}{\ln^2 x}$; **6.101.** $\approx 0{,}976$; **6.102.** $\approx 1{,}994$; **6.103.** $\approx 2{,}136$; **6.104.** $\approx 0{,}106$; **6.105.** $\approx 3{,}276$; **6.106.** $\approx 4{,}731$; **6.107.** $\approx 5{,}051$; **6.108.** $\approx 7{,}28$; **6.109.** $\approx 1{,}041$; **6.110.** $\approx 1{,}9$; **6.111.** $\approx 0{,}695$; **6.112.** $\approx 0{,}724$; **6.113.** $\approx 0{,}088$; **6.114.** $\approx 0{,}906$; **6.115.** $\approx 0{,}875$; **6.116.** $\approx 0{,}47$; **6.117.** $\approx 1062{,}98$; **6.118.** $\approx 1{,}518$.

РОЗДІЛ 7:

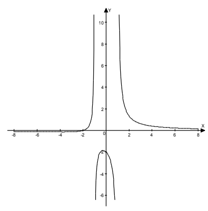
7.11. $y_{\min}(0{,}75) = -2{,}25$; зростає: $(0{,}75;+\infty)$; спадає: $(-\infty;0{,}75)$; **7.12.** $y_{\max}(0{,}58) = 1{,}38$; $y_{\min}(-0{,}58) = 0{,}62$; зростає: $(-0{,}58;0{,}58)$; спадає: $(-\infty;-0{,}58)\cup(0{,}58;+\infty)$; **7.13.** $y_{\max}(0) = 2$; $y_{\min}(-1) = 1$; $y_{\min}(1) = 1$; зростає: $(-1;0)\cup(1;+\infty)$; спадає: $(-\infty;-1)\cup(0;1)$; **7.14.** $y_{\max}(-1) = -2$; $y_{\min}(1) = 2$; зростає: $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$; спадає: $(-1;1)$; **7.16.** $y_{\max}(-1{,}41) = 4$; $y_{\max}(1{,}41) = 4$; $y_{\min}(0) = 0$; зростає: $(-\infty;-1{,}41)\cup(0;1{,}41)$; спадає: $(-1{,}41;0)\cup(1{,}41;+\infty)$; **7.31.**



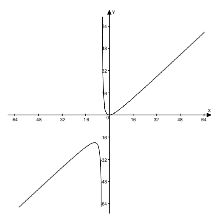
7.32.



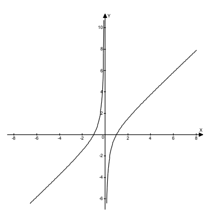
7.33.



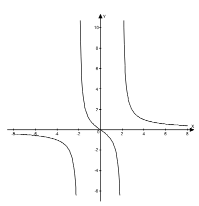
7.34.



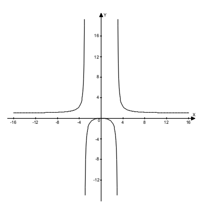
7.35.



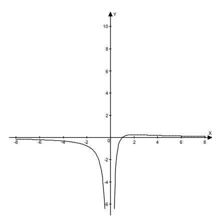
7.36.

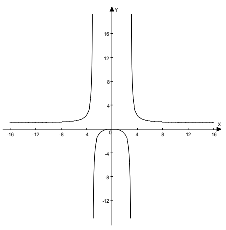
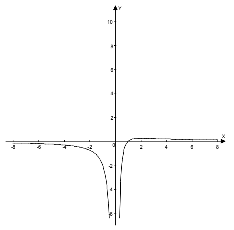


7.37.



7.38.



7.39.  7.40. 

РОЗДІЛ 8:

8.01. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=12x^2y^2-12y^3+\dfrac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=8x^3y-36xy^2+\dfrac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}$; **8.02.** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=3x^2y+$ $+4xy^2-\dfrac{1}{2\sqrt{x+y}}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^3+4x^2y-\dfrac{1}{2\sqrt{x+y}}$; **8.03.** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=6xy^3+6x^2y^2+\dfrac{1}{\sqrt{2x}}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=9x^2y^2-4x^3y$; **8.04.** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=16x^3y^3+1{,}5x^2y^2$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=12x^3y^2+x^3y+\dfrac{1}{2\sqrt{3+y}}$;

8.05. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=4x^3y^3+y^2-sinx$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=3x^4y^2+2xy$; **8.06.** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=x^3+10x^{19}y^2+cosx$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}= \quad =3xy^2-2x^{10}y$; **8.07.** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y^2+2cos2x$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{3}{y}+2xy$; **8.08.** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2\ln y\cdot\dfrac{1}{y}+4x^3y^2$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=2x4y+2y\cdot cosy^2$; **8.09.** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2}{x\ln 2}+\dfrac{3y^2}{2\sqrt{x}}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=6\sqrt{x}y+6$; **8.10.** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=3xy^2+\quad+10$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{y\ln 3}+3xy^2$; **8.11.** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{siny}{2\sqrt{x}}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\sqrt{x}\cdot cosy$; **8.12.** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{cosy}{2\sqrt{x+2}}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\sqrt{x+2}\cdot siny$; **8.13.** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2x-y^5}{2\sqrt{x^2-xy^5}}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{-5xy^4}{2\sqrt{x^2-xy^5}}$; **8.14.** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{y}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{x}{y^2}$; **8.15.** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{y\cdot(x^2+y)-2x^2y}{(x^2+y)^2}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x\cdot(x^2+y)-xy}{(x^2+y)^2}$; **8.16.** $\dfrac{\partial z}{\partial x}= \quad =-\dfrac{\ln y}{(x+10)^2}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{y\cdot(x+10)}$; **8.17.** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{\ln y}{x^2y}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x-y\ln y}{x^2y^2}$; **8.18.** $\dfrac{\partial z}{\partial x}= \quad =-\dfrac{\ln y}{2\sqrt{x^3}}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{y\cdot\sqrt{x}}$; **8.19.** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{sinx}{\sqrt{y}}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{cosx}{2\sqrt{y}}$; **8.20.** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{1}{\sqrt{y}\cdot\sqrt{1-x^2}}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{arccosx}{2\sqrt{y}}$; **8.21.**

$\frac{\partial z}{\partial x}=ye^{xy}\cdot\sqrt{2y}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=xe^{xy}\cdot\sqrt{2y}+\frac{e^{xy}}{2\sqrt{2y}}$; **8.22.** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x+2e^{x}}{3y}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x^{2}+2e^{x}}{3y^{2}}$;

8.23. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x+2e^{y}}{4y}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{8ye^{y}-4\left(x^{2}+2e^{y}\right)}{16y^{2}}$; **8.24.** $\frac{\partial z}{\partial x}= \quad =-\frac{\ln y}{(x+y)^{2}}$;

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\frac{x+y}{y}-\ln y}{(x+y)^{2}}$; **8.25.** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{4sin^{3}y}{2\sqrt{4x-3}}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=3sin^{2}y\cdot cosx\cdot\sqrt{4x-3}$; **8.26.**

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{cosy^{3}}{\sqrt{x}}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-3y\cdot siny^{3}\cdot\sqrt{2x}$; **8.27.** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{(x+y)\cdot\sqrt{1-x^{2}}}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=$

$=\frac{\frac{x+y}{\sqrt{1-x^{2}}}+arcsinx}{(x+y)^{2}}$; **8.28.** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x^{2}y^{3}\cdot\left(x^{2}+y^{3}\right)-2x^{3}y^{3}}{\left(x^{2}+y^{3}\right)^{2}}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{3x^{2}y^{2}}{\left(x^{2}+y^{3}\right)}-$

$-\frac{3x^{2}y^{5}}{\left(x^{2}+y^{3}\right)^{2}}$; **8.31.** $\overrightarrow{gradz}=5\vec{i}+1\frac{1}{3}\vec{j}$; **8.32.**

$\overrightarrow{gradz}=\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{3\sqrt[3]{25}}\right)\vec{i}+\left(\frac{7}{16}-\frac{1}{3\sqrt[3]{25}}\right)\vec{j}$; **8.33.** $\overrightarrow{gradz}=\frac{2}{81}\vec{i}+\frac{4}{243}\vec{j}$; **8.34.**

$\overrightarrow{gradz}=-7\vec{i}-\vec{j}$; **8.35.** $\overrightarrow{gradz}=-\frac{\sqrt{2}}{4}\vec{i}-\frac{\sqrt{2}}{4}\vec{j}$; **8.36** $\overrightarrow{gradz}=2\vec{i}+\vec{j}$; **8.37.**

$\overrightarrow{gradz}=576\vec{i}+2304\vec{j}$; **8.38.** $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; **8.39.** $(-0,8;0,6)$; **8.40.** $(0;1)$; **8.41.**

$\left(\frac{5}{\sqrt{26}};\frac{1}{\sqrt{26}}\right)$; **8.42.** $(-0,6;-0,8)$; **8.43.** $\left(-\frac{5}{\sqrt{13}};-\frac{12}{\sqrt{13}}\right)$; **8.44.** $\left.\frac{\partial z}{\partial \vec{l}}\right|_{M}=-0,1125$;

8.45. $\overrightarrow{gradz}=\frac{3}{8}\vec{i}-\frac{1}{16}\vec{j}$; $\left.\frac{\partial z}{\partial \vec{l}}\right|_{M}=-\frac{1}{8}$; **8.46.** $\overrightarrow{gradz}=-\frac{3}{32}\vec{i}+\frac{3}{64}\vec{j}$; $\left.\frac{\partial z}{\partial \vec{l}}\right|_{M}=\frac{3}{32}$; **8.47.**

$\overrightarrow{gradz}=3\vec{i}+2\vec{j}$; $\left.\frac{\partial z}{\partial \vec{l}}\right|_{M}=\frac{4}{\sqrt{5}}$; **8.48.** $\overrightarrow{gradz}=1,5\vec{i}+\vec{j}$; $\left.\frac{\partial z}{\partial \vec{l}}\right|_{M}=\frac{2}{\sqrt{5}}$; **8.49.**

$\overrightarrow{gradz}=-\frac{1}{\sqrt{15}}\vec{i}+\frac{1}{\sqrt{15}}\vec{j}$; $\left.\frac{\partial z}{\partial \vec{l}}\right|_{M}=-\frac{17}{13\sqrt{15}}$; **8.50.** $\overrightarrow{gradz}=0,8\vec{i}+0,2\vec{j}$; $\left.\frac{\partial z}{\partial \vec{l}}\right|_{M}=\frac{8,6}{13}$;

8.51. $\overrightarrow{gradz}=\frac{2}{13}\vec{i}+\frac{8}{13}\vec{j}$; $\left.\frac{\partial z}{\partial \vec{l}}\right|_{M}=\frac{38}{65}$; **8.52.** $\overrightarrow{gradz}=0,2\vec{i}+0,4\vec{j}$; $\left.\frac{\partial z}{\partial \vec{l}}\right|_{M}=-0,2$;

8.53. $\overrightarrow{gradz}=0{,}25\vec{i}+0{,}25\vec{j}$; $\left.\frac{\partial z}{\partial \vec{l}}\right|_M=-0{,}05$; **8.54.** $\overrightarrow{gradz}=-0{,}25\vec{i}$; $\left.\frac{\partial z}{\partial \vec{l}}\right|_M=-0{,}15$;

8.55. $\approx 6{,}83$; **8.56.** $\approx 2{,}68$; **8.57.** $\approx 22{,}66$; **8.58.** $\approx 0{,}96$; **8.59.** $\approx 119{,}34$; **8.60.** $\approx 0{,}03$; **8.61.** $\approx 0{,}499$; **8.62.** $\approx 3{,}392$; **8.63.** $\approx -4{,}76$; **8.64.** $\approx -10{,}225$; **8.65.** $\approx -0{,}175$; **8.66.** $\approx -0{,}087$; **8.67.** $\approx 0{,}027$; **8.68.** $\approx 0{,}637$; **8.69.** $\approx 0{,}747$; **8.70.** $\approx 0{,}649$; **8.81.** $z_{\max}=z(20;30)=500$; **8.82.** $z_{\max}=z(10;50)=2850$; **8.83.** $z_{\max}=z(40;30)=700$; **8.84.** $z_{\max}=z(20;50)=800$; **8.85.** $z_{\max}=z(20;40)=300$; **8.86.** $z_{\max}=z(10;40)=200$; **8.87.** $z_{\max}=z(50;20)=900$; **8.88.** $z_{\min}=z(2;2)=4$; $z_{\max}=z(-2;2)=4$; **8.89.** $z_{\min}=z(1;1)=2$; **8.90.** $z_{\min}=z\left(-\frac{3}{2};-\frac{3}{2}\right)=-\frac{19}{4}$.

РОЗДІЛ 9:

9.1. $\frac{10x}{3}+x^2+3\ln|x|+C$; **9.2.** $5x+\frac{1}{7x}+sin\,x+C$; **9.3.** $\frac{x^2}{10}+5x+sin\,x+C$;

9.4. $\frac{5x^6}{3}-\frac{x^2}{2}+3\ln x+C$; **9.5.** $\frac{x^8}{4}-\frac{x^7}{42}-2x+C$; **9.6.** $\frac{4x^3}{3}-\frac{7x^2}{2}+2x+C$;

9.7. $x^3+2x^2+5\ln x+C$; **9.8.** $2x^5+6x^2-cos\,x+C$; **9.9.** $x^4+\frac{2x^3}{3}+\ln x+C$; **9.10.** $x^3+\frac{3x^2}{2}+4\ln x+C$; **9.11.** $\frac{4}{5}\sqrt[4]{x^5}-\frac{11}{15\sqrt[11]{x^{15}}}+C$; **9.12.** $\frac{7}{3}x^3-\frac{9}{4}\sqrt[9]{x^4}+6x+C$; **9.13.** $\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}+4\sqrt[4]{x^5}+C$; **9.17.** $\frac{11}{12}\sqrt[11]{x^{12}}-6\sqrt[6]{x}+C$; **9.18.** $\frac{9}{5}\sqrt[3]{x^5}-\frac{2}{3}x^3+x+C$; **9.19.** $\frac{28}{15}\sqrt[7]{x^{15}}-\frac{1}{6x^2}+2x+C$; **9.20.** $\frac{7}{8}\sqrt[7]{x^8}-3\sqrt[3]{x}-x^2+C$; **9.21.** $\frac{1}{4}sin(4x-1)+C$; **9.22.** $-\frac{1}{3}\ln|1-3x|+C$; **9.23.** $-\frac{1}{4}e^{6-4x}+C$; **9.24.** $4^{\frac{x}{4+2}}+C$; **9.25.** $\frac{1}{4}ctg(3-4x)+C$;

9.26. $-\frac{1}{4}arctg(3-4x)+C$; **9.27.** $\frac{1}{8}sin(8x+3)+C$; **9.28.** $arcsin\,3x+C$; **9.29.** $-3ctg\frac{x}{3}+C$; **9.30.** $-\frac{1}{8}\ln|3-8x|+C$; **9.31.** $\frac{1}{5}\ln\left|1+x^5\right|+C$; **9.32.** $arctge^x+C$; **9.33.** $\frac{1}{6}\sqrt{(x^3-4)^3}+C$; **9.34.** $\ln|\ln|x||+C$; **9.35.** $\ln|e^x+1|+C$; **9.36.** $\frac{1}{3}\ln^3 x+C$; **9.37.**

$-\frac{1}{\ln|x|}+C$; **9.38.** $\frac{1}{4}\ln\left|1+x^4\right|+C$; **9.39.** $2\sqrt{e^x+1}+C$; **9.40.** $\frac{1}{2}\ln^2|x|+C$; **9.41.** $e^x(x-1)+C$; **9.42.** $\frac{x^3}{3}\ln|x|-\frac{1}{9}x^3+C$; **9.43.** $(x-2)sin\,x+cos\,x+C$; **9.45.** $\frac{3}{2}\sqrt{x^3}(\ln|x|-1)+C$; **9.46.** $C-\frac{\ln|x|-1}{x}$; **9.47.** $-xctgx+ln|sinx|+C$; **9.48.** $x^2sinx+2xcosx-2sinx+C$; **9.49.** $\frac{e^{2x}}{2}\left((x+3)^2-(x+3)+\frac{1}{2}\right)+C$; **9.50.** $\frac{1}{5}(4-x)^2\cos x+\frac{2}{5}(4-x)sin\,x+sin\,x+C$; **9.61.** $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-5}{x-2}\right|+C$; **9.62.** $\frac{1}{4}arctg\left(\frac{2x+1}{2}\right)+C$; **9.63.** $\frac{1}{3\sqrt{3}}arctg\left(\frac{3x+1}{\sqrt{3}}\right)+C$; **9.64.** $\frac{1}{2}\ln\left|4x^2-4x+5\right|+\frac{1}{4}arctg\left(\frac{2x-1}{2}\right)+C$; **9.65.** $\ln\frac{(x-4)^2}{|x-3|}+C$; **9.66.** $arcsin(x-2)+C$; **9.67.** $\frac{1}{3}arcsin\frac{3x+1}{\sqrt{3}}+C$; **9.68.** $3\sqrt{x^2+2x+2}-4\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right|+C$; **9.69.** $\ln\left|\frac{x-1}{\sqrt{2x-1}}\right|+C$; **9.70.** $\ln\left(\frac{x-5}{x+3}\right)^2+C$; **9.71.** $\frac{9}{2}\ln|2x+1|-\frac{5}{3}\ln|3x+2|+C$; **9.72.** $\frac{1}{2}\ln|2x-1|-\frac{1}{3}\ln|3x+2|+C$; **9.73.** $\ln\left|\frac{x^4}{x-1}+C\right|$; **9.74.** $-2{,}5\ln|x+1|+3{,}5\ln|x+5|+C$;

9.79. $\frac{3}{16}sin\frac{8}{3}x-\frac{3}{8}sin\frac{4}{3}x+C$; **9.80.** $C-\frac{1}{8}cos\,4x-\frac{1}{16}cos\,8x$; **9.81.** $3\,sin\frac{x}{6}+\frac{3}{5}sin\frac{5x}{6}+C$; **9.82.** $\frac{1}{4}sin\,2x-\frac{1}{16}sin\,8x+C$; **9.83.** $\frac{1}{14}sin\,7x-\frac{1}{6}sin\,3x+C$;

9.84. $\frac{1}{14}sin\,7x+\frac{1}{6}sin\,3x+C$; **9.85.** $\frac{1}{6}cos\,3x-\frac{1}{14}cos\,7x+C$; **9.86.** $\frac{1}{8}sin\,4x+\frac{1}{4}sin\,2x+C$; **9.87.** $\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+C$; **9.88.** $\frac{2}{3}arctg\left(\frac{5tg\frac{x}{2}+4}{3}\right)+C$; **9.89.**

$\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5+tg\frac{x}{2}}}{\sqrt{5-tg\frac{x}{2}}}\right|+C$; **9.90.** $C-\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}-3-2\sqrt{3}}{tg\frac{x}{2}-3+2\sqrt{3}}\right|$; **9.91.** $C-\frac{2}{tg\frac{x}{2}}$; **9.92.** $\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\left(\frac{2tg\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}\right)+C$; **9.93.** $\frac{x}{2}-\frac{1}{8}sin\,4x+C$; **9.94.** $\frac{x}{2}+\frac{1}{16}sin\,8x+C$; **9.95.** $\frac{3x}{8}+\frac{1}{4}sin\,2x+\frac{1}{32}sin\,4x+C$; **9.96.** $\frac{1}{2}cos\,2x-\frac{1}{6}cos^3 2x+C$; **9.97.** $sin\,x-\frac{2}{3}sin^3 x+\frac{1}{5}sin^5 x+C$; **9.98.** $C-\frac{1}{3cos^3 x}+\frac{1}{cos\,x}$; **9.99.** $sin\,x-\frac{1}{sin\,x}+C$; **9.100.** $\frac{1}{5}cos^5 x-\frac{1}{7}cos^7 2x+C$; **9.101.** $\frac{1}{4}sin^4 x-\frac{1}{6}sin^6 x+C$; **9.102.** $\frac{1}{5}cos^5 x-\frac{2}{7}cos^7 2x+\frac{1}{9}cos^9 x+C$.

РОЗДІЛ 10:

10.1. $19\frac{1}{6}$; **10.2.** 0; **10.3.** $\frac{7}{72}$; **10.4.** $-5\left(\sqrt[5]{16}-1\right)$; **10.5.** $7\frac{2}{3}$; **10.6.** $arctg\frac{1}{7}$; **10.7.** $\frac{1}{2}\ln 2$; **10.8.** $\frac{3-\sqrt{3}}{3}$; **10.9.** $\frac{3\pi}{8}+\frac{\ln 2}{2}$; **10.10.** $\frac{4}{3}\ln\frac{6}{5}-\frac{1}{3}\ln\frac{3}{2}$; **10.11.** 1; **10.12.** 0; **10.13.** $\frac{\pi}{6}$; **10.15.** 2; **10.16.** 1; **10.17.** $\sqrt{2}-1$; **10.18.** $\frac{\pi}{4}$; **10.19.** $\frac{4}{3}$; **10.20.** $\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$; **10.21.** $2\ln 2-\frac{3}{4}$; **10.22.** $1-\frac{2}{e}$; **10.23.** $\ln\left(3\sqrt{3}\right)-\frac{1}{4}$; **10.26.** $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}-\frac{1}{2}$; **10.27.** $\frac{1}{6}$*кв.од.*; **10.28.** $1\frac{1}{3}$*кв.од.*; **10.29.** $10\frac{2}{3}$*кв.од.*; **10.30.** $10\frac{2}{3}$*кв.од.*; **10.31.** $1\frac{1}{3}$*кв.од.*; **10.32.** $5\frac{5}{24}$*кв.од.*; **10.33.** $4\frac{2}{3}$*кв.од.*; **10.34.** 24*кв.од.*; **10.35.** $10\frac{2}{3}$*кв.од.*; **10.36.** $(4-\ln 27)$*кв.од.*; **10.37.** $\frac{112}{9}\sqrt{7\text{кв.од.}}$; **10.38.** $5\frac{5}{24}$*кв.од.* **10.40.** 9*кв.од.* **10.41.** $21\frac{1}{3}$*кв.од.*; **10.42.** $\frac{1}{8}$*кв.од.*

РОЗДІЛ XI:

11.1. $y=-\frac{1}{2}e^{-2x}+C$; **11.2.** $y=-\frac{1}{5}cos\,5x+C$; **11.3.** $y=\frac{1}{2}arctg\frac{x}{2}+C$;

11.4. $y=-\frac{1}{2}ctg\,2x+C$; **11.5.** $y=\frac{x}{1-xC}$; **11.6.** $y=\ln\left(\frac{1}{C-e^{x}}\right)$;

11.7. $y=\left(\frac{\sqrt[3]{x^{8}}}{8}+C\right)$; **11.8.** $y=-\frac{1}{2}ctg\,2x+C$; **11.9.** $y=C-\frac{1}{2\sqrt{x}}$;

11.10. $y=-\frac{1}{1{,}5\sqrt[3]{x}+C}$; **11.11.** $y=\frac{1}{\left(C-\sqrt{x}\right)^{2}}$; **11.12.** $y=\frac{32}{\sqrt{\left(\sqrt[5]{x^{8}}+4C\right)^{5}}}$;

11.13. $y=\sqrt{\left(\frac{5}{10C-2\sqrt[3]{x^{5}}}\right)^{3}}$; **11.14.** $y=\sqrt[3]{\left(\frac{9}{20}\sqrt[3]{x^{5}}+C\right)}$; **11.17.** $y=\sqrt{\left(\sqrt{1+x^{2}}+C\right)^{2}-1}$; **11.18.** $y=\sqrt{2\ln|x|-x^{2}+2C}$; **11.19.** $y=lg\left|\frac{-2}{10^{2x}+C}\right|$;

11.20. $y=\frac{C^{2}\,sin^{2}\,x-1}{2}$; **11.21.** $arctg\frac{x}{y}=\ln\left(C\sqrt{x^{2}+y^{2}}\right)$; **11.22.** $Cy=y\ln y+x$;

11.23. $y=xtg(Cx)$; **11.24.** $2Cy=C^{2}x^{2}+1$; **11.25.** $y=xe^{1+Cx}$; **11.26.** $y-2x=Cx^{2}(y+x)$; **11.27.** $y^{2}+x^{2}=Cy$; **11.28.** $y^{2}=x^{2}\left(2\ln|Cx|\right)$; **11.29.** $x^{2}=C^{2}-2Cy$; **11.30.** $Cy=e^{\frac{y}{x}}$; **11.31.** $y=e^{-x^{2}}\left(C+\frac{x^{2}}{2}\right)$; **11.32.** $y=e^{Cx}$; **11.33.** $y=(x+C)\left(1+x^{2}\right)$; **11.34.** $y=Cx^{2}+x^{4}$; **11.35.** $y=Ce^{-x}+x-1$; **11.36.** $y=sin\,x+C\,cos\,x$; **11.37.** $y=e^{x}\left(\ln|x|+C\right)$; **11.38.** $xy=C-\ln|x|$; **11.39.** $y=x(C+sin\,x)$; **11.40.** $y=e^{x}(x+C)$; **11.41.** $y=\frac{4x}{x\ln|Cx|}$;

11.42. $y=\sqrt{\frac{1}{x^{2}+Ce^{2x^{2}}}+\frac{1}{2}}$; **11.43.** $y=\frac{4x}{\ln|x|+1+xC}$; **11.44.** $y=-\frac{1}{2}\left(1+y^{2}\right)$; **11.45.** $y=\frac{4x}{1+\ln|y|+Cy}$; **11.51.** $y=\sqrt{x^{2}+Cx}$; **11.52.** $3xy+2x^{2}+y^{3}=C$; **11.53.** $4x^{2}+xy^{2}+\frac{5}{4}y^{4}=C$; **11.54.** $xe^{y}+ye^{x}=C$; **11.55.** $x+\frac{1}{3}\sqrt{\left(x^{2}+y^{2}\right)^{3}}-\frac{y^{2}}{2}-C$;

11.65. $y = C_1 arctg C_1 x + C_2$; **11.66.** $y = e^x(x-1) + C_1 + C_2 x^2$; **11.67.** $y = C_1 \sin x + C_2 - x - \frac{sin 2x}{2}$; **11.68.** $\frac{1}{3}\ln|3y+4| = C_1 x + C_2$; **11.69.** $y = 1 + \frac{1}{C_1 x + C_2}$; **11.70.** $y = C_1 \ln|x| + C_2$; **11.71.** $\ln\left|C_1 y + \sqrt{C_1^{\,2} y_2 - 1}\right| = C_1(x + C_2)$;

11.77. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-3x}$; **11.78.** $y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$; **11.79.** $y = C_1 cos\sqrt{3x} + C_2 sin\sqrt{3x}$; **11.80.** $y = e^{2x}(C_1 cosx + C_2 sinx)$; **11.82.** $y = C\ln^2 x - \ln x$; **11.83.** $y = e^{-x}(C_1 + C_2 x)$; **11.84.** $y = 4x + C_1 + C_2 e^{-x}$; **11.85.** $y = \frac{1}{2} + e^{-x}(C_1 cosx + C_2 sinx)$; **11.86.** $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - 5x - 2$; **11.87.** $y = C_1 + C_2 e^{3x} + x^2$; **11.88.** $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} - 3x^2 - 3x + 4{,}5$; **11.89.** $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-x} + \frac{1}{21} e^{2x}$; **11.90.** $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-x} 4{,}5 e^{-3x}$; **11.91.** $y = e^{3x}((C_1 cos4x + C_2 sin4x) + \frac{1}{102}(14cosx + 5sinx))$.

РОЗДІЛ 12:

12.11. $\frac{4}{3}$; **12.12.** 2; **8.13.** $\frac{10}{21}$; **12.14.** $\frac{1}{9}$; **12.15.** $\frac{3}{2}$; **12.16.** 3; **12.17.** 2; **12.18.** $\frac{3}{4}$; **8.19.** $\frac{1}{2}$; **12.20.** 2; **12.21.** не виконується; **12.22.** виконується; **12.23.** виконується; **12.24.** не виконується; **12.25.** не виконується; **12.26.** виконується; **12.28.** виконується; **12.29.** виконується; **12.30.** виконується; **12.31.** збіжний; **12.32.** розбіжний; **12.33.** розбіжний; **12.34.** збіжний; **12.35.** збіжний; **12.36.** збіжний; **12.37.** збіжний; **12.38.** збіжний; **12.39.** збіжний; **12.40.** збіжний; **12.41.** збіжний; **12.42.** збіжний; **12.43.** збіжний; **12.44.** розбіжний; **12.45.** збіжний; **12.46.** збіжний; **12.47.** збіжний; **12.48.** розбіжний; **12.49.** розбіжний; **12.50.** збігається неабсолютно; **12.51.** збігається неабсолютно; **12.52.** збігається абсолютно; **12.53.** збігається неабсолютно.

ЗМІСТ

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Навчально-методичний посібник
щодо самостійного вивчення дисципліни за кредитно-модульною технологією для студентів
економічних спеціальностей ОКР – бакалавр всіх форм навчання

Шевченко Ростислав Леонідович

Мельниченко Олена Петрівна

Непочатенко Віктор Андрійович

Редактор О.О. Грушко

Комп'ютерне верстання: В.С. Мельник

Здано до складання 08.09.2014. Підписано до друку
Формату 60×84 $\frac{1}{16}$ Ум. друк. арк. 17,55. Тираж 300. Зам.
РВвідділ, Сектор оперативної поліграфії БНАУ
09117 Біла Церква, Соборна пл., 8, тел. 33-11-01