МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ

БІЛОЦЕРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ ІНСТИТУТ ЕКОНОМІКИ ТА БІЗНЕСУ

Кафедра вищої математики

ОПТИМІЗАЦІЙНІ МЕТОДИ І МОДЕЛІ В ЕКОНОМІЧНИХ ПРОЦЕСАХ

Модуль: Лінійні моделі

для студентів економічного факультету

(освітньо-кваліфікаційний рівень: бакалавр)

Біла Церква

2015

Тема 1:

Модель Леонтьєва багатогалузевої економіки (балансовий аналіз)

Розглянемо спрощену економіко-математичну модель міжгалузевого балансу. Зв’язок між галузями зазвичай відображують у таблицях міжгалузевого балансу, а математичну модель, яка дає змогу аналізувати їх, розроблено в 1936 р. американським економістом В.Леонтьєвим.

Припустимо, що весь виробничий комплекс поділено на n «чистих» галузей. Чисті галузі є економічною абстракцією, тобто це умовні галузі, кожна з яких об’єднує все виробництво даного виду продукції. Вважатимемо, що кожна з галузей випускає лише один певний вид продукції (тобто різні галузі випускають різну продукцію). В процесі виробництва кожна з галузей потребує продукції, виробленої в інших галузях.

Мета балансового аналізу – відповісти на запитання, яке постає в макроекономіці й пов’язане з ефективністю ведення багатогалузевого господарства: яким має бути обсяг виробництва кожної з галузей, щоб задовольнити всі потреби в продукції цієї галузі? При цьому кожна галузь виступає, з одного боку, як виробник даної продукції, а з іншого – як споживач і своєї, і виробленої іншими галузями продукції.

Основні припущення моделі, яку надалі називатимемо моделлю Леонтьєва, такі:

1. В економічній в системі виробляються, купуються, споживаються й інвестуються n видів продукції.

2. Кожна галузь виробляє лише один вид продукції, отже, спільне виробництво різних товарів виключається. Різні галузі виробляють різні товари, й тому галузь, що виробляє продукцію виду i, позначатимемо тим самим індексом.

3. Під виробничим процесом у кожній галузі розумітимемо перетворення деяких (можливо всіх) видів продукції, взятих у певних обсягах, на деякий обсяг продукції того чи іншого виду. При цьому припускається, що співвідношення витраченої й випущеної продукції є сталим.

Нехай економіко-виробнича система складається з n галузей, тобто виробляє n видів продукції. Введемо позначення: X_i – обсяг валової продукції і-галузі за одиницю часу (наприклад, за рік); x_{ij} – обсяг продукції i-галузі, що потребує j-та галузь у процесі виробництва, Y_i – обсяг кінцевої продукції i-ї галузі, призначеної для невиробничого споживання.

Схему міжгалузевого балансу виробництва й розподілу продукції подано в табл. 1, де зазначено основні показники та зв'язки виробництва за певний період часу (зазвичай за рік).

Таблиця 1.

Галузь виробництва	Розподіл випуску продукції в галузях виробництва				Обсяг кінцевої продукції	Обсяг валової продукції
	1	…	n	всього		
1	x_{11}	...	x_{1n}	$\sum_{j=1}^{n} x_{1j}$	$У_1$	X_1
...	...	...	...	...	...	...
n	X_{n1}	...	x_{nn}	$\sum_{j=1}^{n} x_{nj}$	$У_2$	X_2
всього	$\sum_{i=1}^{n} x_{i1}$	...	$\sum_{i=1}^{n} x_{in}$	$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{in}$	$У$	X

Використовуючи дані табл. 1, запишемо квадратну матрицю n-го порядку (за умови рівності поданих у балансі галузей виробництва та споживачів продукції). Кожен елемент матриці характеризує обсяг поставки продукції з *i*-ї галузі, що йде на виробниче споживання *j*-ї галузі. Взявши суму міжгалузевих поставок продукції *i*-ї галузі в усіх галузях-споживачах, отримаємо загальний обсяг проміжної продукції *j*-ї галузі. Сума обсягів проміжної продукції всіх галузей виробництва становить загальний обсяг проміжної продукції.

За економічним змістом обсяг проміжної продукції – частина обсягу валової продукції, яка залишається після вилучення кінцевого продукту й спрямовується для відшкодування поточних матеріальних витрат у межах розглядуваного періоду часу.

Оскільки обсяг валової продукції будь-якої *i*-ї галузі дорівнює сукупному обсягові продукції, що споживається *n* галузями, та кінцевої продукції, то запишемо систему:

$$\begin{cases} X_1 = x_{11} + x_{12} + \ldots x_{1n} + У_1, \\ X_2 = x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} + У_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_n = x_{n1} + x_{n2} + \ldots + x_{nn} + У_n; \end{cases}$$ або в скороченій формі: $X_i = \sum_{i,j=1}^{n} x_{ij} + У_i$.

Дане рівняння називають *співвідношеннями балансу.*

Розглянемо міжгалузевий баланс у вартісній формі, тобто коли всі величини, що входять у вказану систему, виражають вартість. Особливість системи полягає в тому, що змінні в ній містяться в першому степені, тому залежність між обсягом валової продукції та розподілом продукції кожної галузі лінійна.

Зауважимо, що величини x_{ij}, X_i, Y_i можуть виражатися в натуральних одиницях (штуках, тоннах, літрах тощо). Тоді йдеться про міжгалузевий баланс у натуральній формі.

Під час побудови й практичних застосувань економіко-математичної моделі міжгалузевого балансу використовують коефіцієнти прямих матеріальних витрат. Якщо обсяг міжгалузевих поставок *i*-ї галузі в *j*-ту поділити на обсяг валової продукції *j*-ї галузі, дістанемо шуканий норматив: $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_{ij}}$, де a_{ij} – коефіцієнти прямих витрат продукції *i*-ї галузі на одиницю обсягу валової продукції *j*-ї галузі.

Ці коефіцієнти утворюють квадратну матрицю коефіцієнтів прямих витрат:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

яку іноді називають матрицею технологічних коефіцієнтів, або технологічною матрицею.

Матриця A містить інформацію про структуру міжгалузевих зв'язків, про технологію виробництва даної економіко-виробничої системи. З попередніх тверджень випливає, що $x_{ij} = a_{ij} X_j$.

Запишемо співвідношення, що називають ***рівнянням лінійного міжгалузевого балансу***, або моделлю Леонтьєва:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} У_1 \\ У_2 \\ \dots \\ У_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_n \end{pmatrix}, \text{ або } \boldsymbol{X=AX+У}.$$

Основна задача міжгалузевого балансу полягає у відшуканні такої матриці обсягів валової продукції X, яка за відомої матриці прямих витрат A забезпечує задану матрицю обсягів кінцевої продукції $У$.

Запишемо рівняння балансу у вигляді: $\boldsymbol{(E-A)X=У}$. Якщо $\boldsymbol{(E-A)}$ невироджена, то його можна подати у вигляді $X=\boldsymbol{(E-A)^{-1}У}$.

Матрицю $\boldsymbol{B=(E-A)^{-1}}$ називають матрицею повних витрат. Економічний зміст елементів матриці B такий: кожен елемент b_{ij} матриці B є обсягом валової продукції *i*-ї галузі, необхідної для забезпечення випуску одиниці кінцевої продукції *j*-ї галузі.

За економічним змістом задачі величини X_i мають бути невід'ємними. З математичного погляду питання про сумісність системи зводиться до питання про існування оберненої матриці $\boldsymbol{(E-A)^{-1}}$, складеної з невід'ємних елементів.

Рівняння міжгалузевого балансу можна використовувати у двох випадках. У першому випадкові, коли відома матриця обсягів валової продукції Х, потрібно обчислити матрицю обсягів кінцевої продукції *У*. Розглянемо приклад.

<u>Приклад:</u> Обчислити матрицю обсягів кінцевої продукції, що призначена для реалізації продукції, якщо матриця обсягів валової продукції галузі й матриця коефіцієнтів прямих витрат мають вигляд:

$$X = \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ 400 \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}6 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання:

$$У = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}6 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}7 & -0{,}1 & -0{,}2 \\ -0{,}2 & 0{,}7 & -0{,}1 \\ -0{,}2 & -0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 \\ 40 \\ 60 \end{pmatrix}.$$

У другому випадкові рівняння міжгалузевого балансу використовується для планування. Матрицю А, всі елементи якої невід'ємні, називають ***продуктивною,*** якщо для довільної матриці *У* із невід'ємними елементами існує розв'язок рівняння міжгалузевого балансу – матриця *Х*, усі елементи якої також невід'ємні. В цьому разі модель Леонтьєва називається продуктивною.

Критерій продуктивності матриці А: *матриця А з невід'ємними елементами продуктивна, якщо максимум сум елементів її стовпців не перевищує одиниці, причому хоча б для одного зі стовпців сума елементів строго менша за одиницю.*

<u>Приклад:</u> Розглянемо умовну виробничу систему, яка складається з трьох галузей. Коефіцієнти прямих витрат одиниць продукції та обсяги кінцевої продукції (у вартісній формі) наведено в таблиці:

Галузь виробництва	Прямі витрати галузей			Обсяг кінцевої продукції
	1	2	3	
1	0	0,2	0	200
2	0,2	0	0,1	100
3	0	0,1	0,2	300

Визначити коефіцієнти повних витрат; матрицю обсягів валової продукції X та план кожної галузі; коефіцієнти непрямих (посередницьких) витрат.

Розв'язання:

Позначимо матрицю обсягів валової продукції, яка визначає виробничу програму галузей $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$, де X_1, X_2, X_3 – планові обсяги валової продукції галузей. У розглядуваному прикладі матрицями технологічних коефіцієнтів та обсягів кінцевої продукції є відповідно:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}2 & 0 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix}.$$

Виробничі зв'язки галузей задовольняють умови:

$$\begin{cases} X_1 - (0 \cdot X_1 + 0{,}2 \cdot X_2 + 0 \cdot X_3) = 200, \\ X_2 - (0{,}2X_1 + 0 \cdot X_2 + 0{,}1 \cdot X_3) = 100, \\ X_3 - (0 \cdot X_1 + 0{,}1 \cdot X_2 + 0{,}2 \cdot X_3) = 300; \end{cases} \quad \begin{cases} X_1 - 0{,}2X_2 = 200, \\ -0{,}2X_1 + X_2 - 0{,}1X_3 = 100, \\ -0{,}1X_1 + 0{,}8X_3 = 300. \end{cases}$$

Система в матричному вигляді ***(E–A)X=У***. Тоді:

$$E - A = \begin{pmatrix} 0 & -0{,}2 & 0 \\ -0{,}2 & 1 & -0{,}1 \\ 0 & -0{,}1 & 0{,}8 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо обернену матрицю $\boldsymbol{B=(E-A)^{-1}}$.

Визначник матриці ***(E–A)***:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -0{,}2 & 0 \\ -0{,}2 & 1 & -0{,}1 \\ 0 & -0{,}1 & 0{,}8 \end{vmatrix} = 0{,}8 - 0{,}01 - 0{,}032 = 0{,}758.$$

Знайдемо алгебраїчні доповнення елементів матриці (Е - А):

$B_{11}=0{,}79$	$B_{21}=0{,}16$	$B_{11}=0{,}02$
$B_{12}=0{,}16$	$B_{22}=0{,}80$	$B_{11}=0{,}10$
$B_{13}=0{,}02$	$B_{23}=0{,}10$	$B_{11}=0{,}96$

Обернена матриця має вигляд:

$$B = (E - A)^{-1} = \frac{1}{0{,}758} \begin{pmatrix} 0{,}79 & 0{,}16 & 0{,}02 \\ 0{,}16 & 0{,}80 & 0{,}10 \\ 0{,}02 & 0{,}10 & 0{,}96 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}04 & 0{,}21 & 0{,}03 \\ 0{,}21 & 1{,}05 & 0{,}13 \\ 0{,}03 & 0{,}13 & 1{,}27 \end{pmatrix}.$$

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = (E-A)^{-1}У = \begin{pmatrix} 1{,}04 & 0{,}21 & 0{,}03 \\ 0{,}21 & 1{,}05 & 0{,}13 \\ 0{,}03 & 0{,}13 & 1{,}27 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 238 \\ 186 \\ 400 \end{pmatrix}.$$

Отже, планові обсяги валової продукції для галузей відповідно становлять: $X_1=238,\ X_2+186,\ X_3=400$. Обчислюючи обернену матрицю, ми округлили всі числа до сотих.

Визначимо виробничу програму кожної галузі, використовуючи коефіцієнти a_{ij}:

$$x_{11} = a_{11}X_1 = 0 \cdot 238 = 0, \qquad x_{21} = a_{21}X_1 = 0{,}2 \cdot 238 = 47{,}6,$$

$$x_{12} = a_{12}X_2 = 0{,}2 \cdot 186 = 37{,}2, \qquad x_{22} = a_{22}X_2 = 0 \cdot 186 = 0,$$

$$x_{13} = a_{13}X_3 = 0 \cdot 400 = 0, \qquad x_{23} = a_{23}X_3 = 0{,}1 \cdot 400 = 40,$$

$$x_{31} = a_{31}X_1 = 0 \cdot 238 = 0,$$

$$x_{32} = a_{32}X_2 = 0{,}1 \cdot 186 = 18{,}6,$$

$$x_{33} = a_{33}X_3 = 0{,}2 \cdot 400 = 80.$$

Коефіцієнти непрямих (посередницьких) витрат c_{ij} матриці C визначаються як різниця внутрішньовиробничих витрат (елементи матриці В) та прямих витрат (елементи матриці А):

$$C = B - A = \begin{pmatrix} 1{,}04 & 0{,}21 & 0{,}03 \\ 0{,}21 & 1{,}05 & 0{,}13 \\ 0{,}03 & 0{,}13 & 1{,}27 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0{,}2 & 0{,}03 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}04 & 0{,}01 & 0{,}03 \\ 0{,}01 & 1{,}05 & 1{,}03 \\ 0{,}03 & 0{,}03 & 1{,}07 \end{pmatrix}.$$

<u>Приклад:</u> Дані про виконання балансу за звітний період (в умов. грош од.) наведено в таблиці:

Галузь виробництва	Розподіл випуску продукції в галузях		Обсяг кінцевої продукції	Обсяг валової продукції
	1	2		
1	9	25	66	100
2	8	27	165	200

Обчислити необхідний обсяг валової продукції кожної галузі, якщо обсяг кінцевої продукції збільшиться вдвоє, а другої – не зміниться.

Розв'язання:

Маємо X_1=100, X_2=200. Матриця обсягів валової продукції $X = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix}$.

Обчислимо коефіцієнти прямих витрат:

$$a_{11} = \frac{9}{100} = 0{,}09, \qquad a_{21} = \frac{8}{100} = 0{,}08,$$

$$a_{12} = \frac{25}{200} = 0{,}125, \qquad a_{22} = \frac{27}{200} = 0{,}135.$$

Тобто матриця технологічних коефіцієнтів $A = \begin{pmatrix} 0{,}09 & 0{,}125 \\ 0{,}08 & 0{,}135 \end{pmatrix}$ має невід'ємні елементи і задовольняє критерій продуктивності:

$$\max\{0{,}09 + 0{,}08;\ \ 0{,}125 + 0{,}135\} = \max\{0{,}17;\ \ 0{,}26\} = 0{,}26 < 1.$$

Тому для довільної матриці обсягів кінцевої продукції *У* можна знайти необхідний обсяг валової продукції *X* за формулою $X = (E-A)^{-1}У$.

Знайдемо матрицю повних витрат $B = (E-A)^{-1}$:

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}09 & 0{,}125 \\ 0{,}08 & 0{,}135 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}91 & -0{,}125 \\ -0{,}08 & 0{,}856 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $\det|E - A| = 0{,}77715 \neq 0$, то $B = (E - A)^{-1} = \dfrac{1}{0{,}77715} \begin{pmatrix} 0{,}865 & 0{,}125 \\ 0{,}08 & 0{,}91 \end{pmatrix}$.

За умовою матриця обсягів кінцевої продукції. Тоді матриця обсягів валової продукції: $X = \dfrac{1}{0{,}77715} \begin{pmatrix} 0{,}865 & 0{,}125 \\ 0{,}08 & 0{,}91 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 132 \\ 165 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 173{,}461 \\ 206{,}794 \end{pmatrix}$. Тобто обсяг валової продукції в першій галузі треба збільшити до 173,461 умов. грош. од., а в другій – до 206, 794 умов. грош. од.

ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ №1

Для заданої умовної виробничої системи визначити коефіцієнти повних витрат; матрицю обсягів валової продукції *X* та план кожної галузі; коефіцієнти непрямих (посередницьких) витрат.

Галузь виробництва	Прямі витрати галузей			Обсяг кінцевої продукції
	1	2	3	
1	0,01	0,02*N*	0,02	100*N*
2	0,01*N*	0	0,1*N*	200*N*
3	0,05 *N*	0,03*N*	0	120*N*

де *N* – остання цифра номера студента за списком.

Тема 2.

Модель рівноважних цін

Розглянемо балансову модель, яку називають ***моделлю рівноважних цін***.

Нехай задано матриці $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ ... \\ p_n \end{pmatrix}$

де A – матриця прямих витрат; X – матриця обсягів валової продукції; P – матриця цін, i-та координата якої дорівнює ціні одиниці продукції j-ї галузі.

Тоді, наприклад, перша галузь одержить прибуток, який дорівнює p_1x_1. Частину свого прибутку ця галузь витратить на закупівлю продукції інших галузей. Так, для випуску одиниці продукції їй необхідна продукція першої галузі в обсязі a_{11}, другої галузі – в обсязі a_{21}, ... n-ї галузі – в обсязі a_{n1}.

На закупівлю цієї продукції буде витрачено суму, що становить

$$a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + ... + a_{n1}p_n .$$

Отже, першій галузі для випуску продукції в обсязі x, необхідно витратити на закупівлю продукції інших галузей суму, що становить

$$x_1(a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + ... + a_{n1}p_n).$$

Частину доходу, що залишилася, позначимо V_1 (ця частина доходу називається додатковою вартістю й іде на виплату заробітної плати й податків, підприємницький прибуток та інвестиції).

Таким чином, справджується рівність

$$x_1p_1 = x_1(a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + ... + a_{n1}p_n) + V_1 .$$

Поділивши її на x_1, отримаємо:

$$p_1 = (a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + ... + a_{n1}p_n) + W_1$$

де $W_1 = V_1/x$, – норма додаткової вартості, тобто додаткова вартість на одиницю продукції, що випускається. Аналогічно для інших галузей отримаємо:

$$p_2 = (a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + ... + a_{n2}p_n) + W_2 ;$$

$$...$$

$$p_n = (a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + ... + a_{nn}p_n) + W_n$$

Добуті рівності можна записати в матричній формі $P = A^TP + W$,
де A^T – матриця, транспонована до матриці A, W – матриця норм додаткової вартості.

Бачимо, що рівняння $P = A^T P + W$ відрізняється від рівнянь моделі Леонтьєва лише тим, що матрицю обсягів валової продукції X замінено на матрицю цін P, матрицю обсягу кінцевої продукції $У$ – на матрицю додаткової вартості W, матрицю A – на транспоновану матрицю A^T.

Модель рівноважних цін дає змогу за відомих норм додаткової вартості прогнозувати ціни на продукцію галузей, а також зміни цін та інфляцію, що є наслідком зміни ціни в одній із галузей.

<u>Приклад.</u> Розглянемо економічну систему, яка складається з трьох галузей: паливно-енергетичної, промисловості й сільського господарства. Нехай транспонована матриця прямих витрат та матриця додаткової вартості: $A^T = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,2 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix} W = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix}$. Визначити рівноважні ціни.

Розв'язання:

Скористаємося формулою $P = A^T P + W$ або $(E - A^T)P = W$.

Звідси $P = (E - A^T)^{-1} W$. Обчислимо транспоновану матрицю повних витрат: $E - A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,1 & 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,2 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 & -0,1 & -,2 \\ -0,3 & 0,8 & -0,2 \\ -0,2 & -0,3 & 0,8 \end{pmatrix}$.

Обчислимо обернену матрицю до неї: $\left(E - A^T\right)^{-1} = \dfrac{1}{0,444}\begin{pmatrix} 0,58 & 0,14 & 0,18 \\ 0,28 & 0,68 & 0,24 \\ 0,25 & 0,29 & 0,69 \end{pmatrix}$.

Тоді: $P = \left(E - A^T\right)^{-1} W = \dfrac{1}{0,444}\begin{pmatrix} 0,58 & 0,14 & 0,18 \\ 0,28 & 0,68 & 0,24 \\ 0,25 & 0,29 & 0,69 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix}$.

Отже, рівноважними цінами для розглянутих галузей будуть: 10, 20 та 15 од.

Визначити рівноважні ціни.

ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ №2

Розглянемо економічну систему, яка складається з трьох галузей. Нехай матриця прямих витрат та матриця додаткової вартості: $A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,02N & 0,05N \\ 0,01N & 0,01N & 0,03N \\ 0,03N & 0,2 & 0,01N \end{pmatrix} W = \begin{pmatrix} N+1 \\ 2N \\ N+3 \end{pmatrix}$. Визначити рівноважні ціни.

Тема 3.

Лінійна модель міжнародної торгівлі

Розглянемо лінійну модель обміну, яку часто інтерпретують, як модель міжнародної торгівлі, що дає змогу визначити торгівельні доходи країн для збалансованої торгівлі. Нехай маємо групу з n країн $K_1, K_2, \ldots, K_n$, які ведуть між собою торгівлю. Позначимо через x_j торгівельний доход j-країни, який формується з продажу власних товарів як на внутрішньому, так і на зовнішньому ринках. Структуру торговельних відносин між країнами вважаємо встановленою: частина q_{ij} торговельного доходу x_{ij}, яку j-та країна витрачає на купівлю товарів i-ї країни, є сталою.

Розглянемо матрицю $Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix}$, яку називають структурною матрицею торгівлі.

Вважатимемо, що весь торговельний доход витрачається або на закупівлю товарів на своїй території, або на імпорт з інших країн, тобто сума елементів будь-якого стовпчика матриці Q дорівнює одиниці: $\sum_{i,j=1}^{n} q_{ij} = 1$.

Для країни K_i доход від внутрішньої та зовнішньої торгівлі становить $x_i = q_{i1}p_1 + q_{i2}p_2 + \ldots + q_{in}p_n$.

Для збалансованої торгівлі необхідно знайти таку матрицю торговельних доходів $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$, щоб справджувалося матричне рівняння: ***QX*=*X***, з якого можна визначити ***X***.

<u>Приклад:</u> Візьмемо три країни (наприклад, США, Німедчину й кувейт) учасниці торгівлі з торговельними доходами X_1, X_2, X_3. Вважатимемо, що весь торговельний доход кожної країни витрачається або на закупівлю товарів на своїй території, або на імпорт з інших країн. Нехай США половину торговельного доходу витрачають на закупівлю товарів на своїй території, чверть – на закупівлю товарів із Німеччини та ще чверть – товарів із Кувейту. Німеччина порівну витрачає торговельний доход на закупівлю товарів зі США, на своїй території та з Кувейту. Кувейт половину торговельного доходу витрачає на закупівлю товарів зі США, іншу половину – з Німеччини й нічого не закуповує на своїй території. Визначимо доходи країн, які

задовольняли б збалансовану бездефіцитну торгівлю, якщо сума їхніх доходів становить 9000 умов. грош. од.

Розв'язання:

Запишемо структурну матрицю торгівлі:

$$Q=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \scriptstyle США & \scriptstyle Німеччина & \scriptstyle Кувейт \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Нехай q_{ij} – частина доходу, яку j-та країна витрачає на закупівлю товарів i-ї країни. Зазначимо, що сума елементів матриці Q у кожному стовпці дорівнює одиниці.

Після підбиття підсумків торгівлі за рік i-та країна одержить прибуток: $x_i = q_{i1}X_1 + q_{i2}X_2 + \ldots + q_{in}X_n$.

Запишемо систему рівнянь для відшукання матриці X:

$$\boldsymbol{QX=X} \text{ або } \boldsymbol{(Q-E)X=0},$$

Тобто

$$Q-E=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок цієї системи: $X_1 = 2X_3$, $X_2 = 1{,}5X_3$, $X_3 \in R$.

Добутий результат означає, що збалансованість торгівлі даних країн досягається за співвідношення їхніх національних доходів 2 : 1,5 : 1.

Знайдемо доходи країн, які задовольняли б збалансовану бездефіцитну торгівлю за умови, що сума доходів становить $X_1 + X_2 + X_3 = 9000$ умов. гр. од. Підставимо в цю рівність значення $X_1 = 2C$, $X_2 = 1{,}5C$, $X_3=C$, де C=const. Отримаємо: $2C + 1{,}5C + C = 9000$, звідки C= 2000. Отже, X_1=4000, X_2=3000, X_3=2000 умов. грош. од.

На завершення зазначимо, що нами наведено спрощені варіанти моделей міжгалузевого балансу та міжнародної торгівлі.

ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ №3

Задано лінійну матрицю торгівлі чотирьох країн
$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{N+3} & \frac{1}{4} & \frac{N}{N+3} & 0 \\ \frac{2}{N+3} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{N}{N+3} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{N+3} & \frac{2}{N+3} \\ \frac{N}{N+3} & \frac{1}{4} & \frac{2}{N+3} & \frac{1}{N+3} \end{pmatrix}.$$
Знайти торговельні бюджети для збалансованої торгівлі цих країн за умови, що сума бюджетів $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = N \cdot 1000$ умов. гр. од.